# DINÂMICA

## MECÂNICA PARA ENGENHARIA

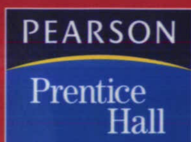
**10ª EDIÇÃO**



R. C. Hibbeler



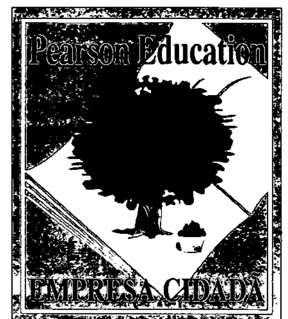

Site com material de apoio para professores e alunos



# DINÂMICA

## MECÂNICA PARA ENGENHARIA

10ª EDIÇÃO



# DINÂMICA

## MECÂNICA PARA ENGENHARIA

10ª EDIÇÃO

R. C. Hibbeler

**Tradução Técnica**
*Mário Alberto Tenan*
Doutor em ciências pelo Instituto de Física Gleb Wataghin
da Universidade Estadual de Campinas — Unicamp
Professor adjunto da Universidade de Mogi das Cruzes — UMC




São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela

*Diretor editorial:* José Martins Braga
*Gerente editorial:* Roger Trimer
*Gerente de produção:* Heber Lisboa
*Editora de texto:* Patrícia Carla Rodrigues
*Preparação:* Juliana Takahashi
*Revisão:* Maria Luiza Favret
*Capa:* Marcelo da Silva Françozo
*Sobre a capa:* Ao se projetar o *loop* deste brinquedo, é necessário certificar-se de que os carrinhos têm energia suficiente para completá-lo sem sair dos trilhos. A imagem é cortesia da Corbis.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Hibbeler, R.C.
Dinâmica : mecânica para engenharia, vol. 2 / R.C. Hibbeler ; tradutor técnico Mário Alberto Tenan. -- São Paulo : Prentice Hall, 2005.

Título original: Dynamics : engineering mechanics
ISBN 85-87918-96-6

1. Dinâmica 2. Engenharia mecânica I. Título.

04-7454 CDD-620.104

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Dinâmica : Mecânica para engenharia : Tecnologia 620.104

2005
Direitos exclusivos para a língua portuguesa cedidos
à Person Education do Brasil,
uma empresa do grupo Pearson Education
Av. Ermano Marchetti, 1435
CEP: 05038-001, São Paulo — SP, Brasil
Tel.: (11)3613-1222 Fax: (11)3611-0444
e-mail: vendas@personed.com

## Ao Estudante

Com a esperança de que este trabalho estimule
o interesse em mecânica para engenharia e sirva de
guia para o entendimento deste assunto.

# SUMÁRIO

# PREFÁCIO

O objetivo principal deste livro é fornecer ao estudante uma apresentação clara e completa da teoria de mecânica e aplicações à engenharia. Para atingir esse objetivo o autor não tem trabalhado isoladamente; em grande parte, esta obra, ao longo de suas 10 edições, tem sido moldada pelos comentários e sugestões de centenas de professores que a revisaram, bem como por muitos dos alunos do autor.

## Novas características

Esta décima edição apresenta características singulares, dentre as quais podemos destacar:

• ***Ilustrações.*** Ao longo do livro, foram incluídas ilustrações realistas que apresentam uma forte conexão com a natureza 3-D da engenharia. Além disso, procurou-se fornecer uma boa visão dos objetos físicos, suas dimensões e os vetores a eles aplicados, de maneira que as situações possam ser facilmente entendidas.

• ***Problemas.*** Os conjuntos de problemas foram revisados de modo que os professores possam selecionar problemas tanto de projeto quanto de análise com um amplo leque de dificuldade. Além do autor, dois outros profissionais verificaram todos os problemas para garantir clareza e exatidão das soluções. No fim de alguns capítulos, foram propostos projetos a serem desenvolvidos.

• ***Material de Revisão.*** Foram incluídas no final dos capítulos seções de revisão para o aluno recordar os pontos importantes.

Naturalmente, os pontos fortes deste livro permanecem os mesmos: onde necessário, dá-se grande ênfase à construção de diagramas de corpo livre e ressalta-se a importância da seleção de um sistema de coordenadas apropriado, com a devida convenção de sinal para os componentes dos vetores.

## Conteúdo

O livro está divido em 11 capítulos, nos quais os princípios introduzidos são aplicados inicialmente a situações simples e, em seguida, a situações mais complexas. A cinemática de um ponto material é discutida no Capítulo 12, seguida pela discussão da dinâmica de um ponto material nos capítulos 13 (equação de movimento), 14 (trabalho e energia) e 15 (impulso e quantidade de movimento/momento angular). Os conceitos da dinâmica de um ponto material contidos nesses quatro capítulos são, então, resumidos numa seção de revisão, oferecendo-se assim ao estudante a oportunidade de identificar e resolver uma variedade de problemas. É feita uma seqüência de apresentação semelhante para o movimento plano de um corpo rígido: Capítulo 16 (cinemática do movimento plano), Capítulo 17 (equações de movimento), Capítulo 18 (trabalho e energia) e Capítulo 19 (impulso e quantidade de movimento/momento angular).

Havendo disponibilidade de tempo, pode-se incluir no curso algum material envolvendo o movimento tridimensional de um corpo rígido. A cinemática e a dinâmica desse tipo de movimento são discutidas nos capítulos 20 e 21, respectivamente. O Capítulo 22 (vibrações) poderá ser incluído se os alunos tiverem os conhecimentos matemáticos necessários. As seções do livro que são consideradas como estando além da abrangência de um curso básico de dinâmica estão indicadas por um asterisco (*) e podem ser omitidas. Observe que esse material também oferece uma referência dos princípios básicos a serem discutidos em cursos mais avançados.

**Desenvolvimento Alternativo.** Com o devido cuidado do professor, é possível cobrir os capítulos 12 a 19, na seguinte ordem, sem perda de continuidade: capítulos 12 a 16 (cinemática), capítulos 13 e 17 (equações de movimento), 14 e 18 (trabalho e energia) e 15 e 19 (impulso e quantidade de movimento/momento angular).

## Características Especiais

**Organização e Abordagem.** O conteúdo de cada capítulo está organizado em seções bem definidas que contêm uma explanação de tópicos específicos, exemplos (problemas resolvidos) e um conjunto de problemas propostos. Os tópicos em cada seção estão colocados em subgrupos definidos por títulos em negrito. O propósito dessa disposição é apresentar um método estruturado para a introdução de cada nova definição ou novo conceito, tornando o livro adequado para futuras referências e recapitulações.

**Conteúdo dos Capítulos.** Cada capítulo inicia-se com uma ilustração demonstrando a ampla aplicabilidade do material nele contido. Uma lista do conteúdo do capítulo é fornecida para dar uma visão geral do material a ser abordado.

**Diagramas de Corpo Livre.** O primeiro passo na resolução da maioria dos problemas de mecânica exige a construção de um diagrama. Com isso, o aluno cria o hábito de organizar os dados necessários, enquanto se concentra nos aspectos físicos do problema e na sua geometria. Se esse passo for dado corretamente, a aplicação das equações relevantes se tornará bastante sistemática, pois os dados podem ser tomados diretamente do diagrama construído. Esse passo é particularmente importante quando se resolvem problemas de equilíbrio, e, por essa razão, enfatiza-se fortemente ao longo do livro a construção de diagramas de corpo livre. Em particular, foram preparados seções especiais e exemplos para mostrar como se traçam diagramas de corpo livre, e, para se desenvolver essa prática, foram incluídos em muitas seções problemas propostos.

**Procedimento para Análise.** Encontrado no fim de muitos capítulos, este recurso singular fornece ao estudante um método lógico e ordenado para a aplicação da teoria. Segue-se esse método para resolver os problemas propostos como exemplos, de modo que sua aplicação numérica seja esclarecida. Entretanto, deve-se entender que, uma vez que tenha aprendido os princípios relevantes e tenha obtido a confiança suficiente, o estudante poderá, então, desenvolver seus próprios procedimentos para resolver os problemas.

**Fotografias.** Utilizam-se muitas fotos ao longo de todo o livro para explicar como os princípios da mecânica se aplicam a situações reais. Em muitas seções, usaram-se fotografias para mostrar como os engenheiros devem propor inicialmente um modelo idealizado para a análise e passar, então, à construção de um diagrama de corpo livre para aplicar a teoria a esse modelo.

**Pontos Importantes.** Este recurso fornece um resumo dos conceitos mais importantes apresentados na seção, enfatizando os pontos mais significativos que devem ser entendidos ao se aplicar a teoria à solução de problemas.

**Entendimento Conceitual.** Pelo uso de fotos distribuídas ao longo do livro, aplica-se a teoria de maneira simplificada para ilustrar algumas de suas características conceituais mais importantes e introduzir gradativamente o significado físico de muitos dos termos usados nas equações. Essas aplicações simplificadas aumentam o interesse no assunto e ajudam o estudante a entender os exemplos e solucionar os problemas.

**Exemplos.** Todos os problemas propostos como exemplos são apresentados de maneira concisa e num estilo de fácil compreensão.

## Problemas Propostos

- ***Problemas de Análise Geral e Projetos.*** A maioria dos problemas neste livro retrata situações realistas encontradas na prática de engenharia e alguns deles provêm de produtos reais utilizados na indústria. Espera-se que esse realismo tanto estimule o interesse do estudante pela mecânica, quanto forneça um meio de

desenvolver a habilidade em reduzir qualquer problema nessa área a um modelo ou representação simbólica ao qual os princípios da mecânica possam ser aplicados.

Procurou-se manter um bom equilíbrio entre o uso de unidades do SI e do FPS. Além disso, tentou-se apresentar os problemas, em todos os conjuntos, em ordem crescente de dificuldade. (Os problemas de revisão no fim de cada capítulo são apresentados aleatoriamente.) As respostas de três em cada quatro problemas propostos são dadas no final do livro. Para alertar o leitor da falta de resposta utilizou-se um asterisco (*) antes do número do problema.

• ***Problemas Computacionais.*** Foram incluídos alguns problemas que podem ser resolvidos usando-se procedimentos numéricos executáveis tanto num microcomputador quanto numa calculadora programável. No Apêndice B são apresentadas técnicas numéricas adequadas e respectivos programas de computador. A intenção é ampliar a aptidão do estudante para usar outras formas de análise matemática sem sacrificar o tempo necessário ao entendimento da aplicação dos princípios da mecânica. Problemas desse tipo, que podem ou devem ser resolvidos por meio de procedimento numérico, são identificados por um quadrado (■) antes de seu número.

• ***Projetos.*** No fim de alguns capítulos, foram incluídos estudos projetos. Considera-se que esse tipo de tarefa seja proposto somente após o estudante ter adquirido o conhecimento básico do assunto. Esses projetos são dedicados à solução de problemas por meio da especificação da geometria de uma estrutura ou objeto mecânico necessário para uma tarefa específica. Exige-se uma análise cinemática e dinâmica, e, em muitos casos, os resultados podem abranger questões de segurança e custos.

## Revisão dos Capítulos

Novas seções de revisão resumem, freqüentemente em listas, os pontos importantes em cada capítulo.

## Apêndices

Os apêndices são uma fonte de fórmulas matemáticas e de análise numérica necessárias à solução dos problemas.




## Material de Apoio

No site do livro (**www.prenhall.com/hibbeler_br**) estão disponíveis recursos adicionais para professores e estudantes, como as figuras do livro em PowerPoint, exercícios adicionais (em inglês) e o Manual de Soluções (também em inglês).

## Agradecimentos

O autor empenhou-se em escrever este livro para atender o estudante e o professor. Através dos anos, muitas pessoas contribuíram para seu desenvolvimento, e serei sempre grato pelas suas valiosas sugestões e comentários. Particularmente, desejo agradecer as seguintes pessoas pelos comentários que fizeram sobre este livro:

Paul Heyliger, *Colorado State University*
Kenneth Sawyers, *Lefigh University*
John Oyler, *University of Pittsburgh*
Glenn Beltz, *University of California – Santa Barbara*
Johannes Gessler, *Colorado State University*
Wilfred Nixon, *Universidade de Iowa*
Jonathan Russell, *U.S. Coast Guard Academy*
Robert Hinks, *Arizona State University*

Cap. Mark Orwat, *U.S. Military Academy, West Point*
Cetin Cetinyaka, *Clarkson University*
Jack Xin, *Kansas State University*
Pierre Julien, *Colorado State University*
Stephen Bechtel, *Ohio State University*
W.A. Curtain, *Brown University*
Robert Oakberg, *Montana State University*
Richard Bennett, *Universidade do Tennessee*

Devo um agradecimento especial aos professores Will Liddell, Jr. e Henry Kuhlman por sua ajuda específica. Devo também apresentar um agradecimento especial a Scott Hendricks da VPI e Karim Nohra da University of South California, que diligentemente verificaram todo o texto e os problemas. Gostaria de agradecer a revisão feita por minha esposa, Conny (Cornelie), durante o tempo em que preparei o manuscrito para publicação.

Finalmente, muitos agradecimentos são estendidos a todos os meus alunos e aos professores que espontaneamente gastaram seu tempo para me enviar sugestões e comentários. Como uma lista com todos os nomes seria muito extensa, espero que aqueles que me ajudaram dessa maneira aceitem meu reconhecimento anônimo.

Apreciaria muitíssimo receber a qualquer momento seus comentários, sugestões ou problemas a respeito desta edição.

*Russel Charles Hibbeler*
hibbeler@bellsouth.net



# Cinemática de um Ponto Material

## Objetivos do Capítulo

- Introduzir os conceitos de posição, deslocamento, velocidade e aceleração.
- Estudar o movimento de um ponto material ao longo de uma reta e representar graficamente esse movimento.
- Investigar o movimento de um ponto material ao longo de uma trajetória curva usando diferentes sistemas de coordenadas.
- Apresentar uma análise do movimento interdependente de dois pontos materiais.
- Examinar os princípios do movimento relativo de dois pontos materiais usando eixos em translação.



*Embora os aviões mostrados na figura sejam relativamente grandes, de uma longa distância seus movimentos podem ser modelados como se cada um deles fosse um ponto material.*

## 12.1 Introdução

A *Mecânica* é um ramo das ciências físicas que trata do estado de repouso ou de movimento de corpos submetidos à ação de forças. A mecânica de corpos rígidos é dividida em três áreas:* estática, cinemática e dinâmica. A *estática* estuda as condições dos corpos em repouso, a *cinemática* trata dos aspectos geométricos do movimento e a *dinâmica* analisa as relações entre as forças (causa) e o movimento (efeito). O presente volume, sob o título *Dinâmica*, é dedicado à *cinemática* e à *dinâmica*. Para desenvolver esses princípios, serão discutidas primeiramente a dinâmica de um ponto material e, em seguida, a dinâmica de um corpo rígido, em duas e três dimensões.

Historicamente, os princípios da dinâmica desenvolveram-se quando se tornou possível medir o tempo de forma precisa. Um dos que prestou maiores contribuições à área foi Galileu Galilei (1564-1642). Seu trabalho consistiu em experimentos com pêndulos e corpos em queda. As mais significativas contribuições à dinâmica, entretanto, foram dadas por Isaac Newton (1642-1727),

* O autor considera a mecânica dos corpos rígidos dividida em apenas duas áreas, denominadas em inglês *statics* e *dynamics*. O primeiro termo (*statics*) é definido como o estudo do equilíbrio de um corpo que está em repouso ou se move com velocidade constante. O segundo termo (*dynamics*) é subdividido em *kinematics* e *kinetics*, que correspondem, respectivamente, aos termos *cinemática* e *dinâmica* adotados na presente tradução. A preferência pela terminologia adotada em português se justifica não só pela sua pertinência, como também por ser consagrada em nosso meio (N. do T.).

famoso por sua formulação das três leis fundamentais do movimento e da lei da gravitação universal. Pouco depois de essas leis terem sido postuladas, técnicas importantes para a sua aplicação foram desenvolvidas por Euler, D'Alembert, Lagrange e outros.

Há muitos problemas em engenharia cuja solução exige a aplicação dos princípios da dinâmica. Normalmente, o projeto estrutural de um veículo, como um automóvel ou um avião, exige que se leve em conta o movimento a que ele seja submetido. Isso também se aplica a muitos dispositivos mecânicos, como motores, bombas, ferramentas móveis, manipuladores industriais e maquinaria. Além disso, previsões de movimento de satélites artificiais, projéteis e espaçonaves baseiam-se na teoria da dinâmica. Com os avanços tecnológicos, torna-se necessário saber, cada vez mais, como aplicar os princípios da dinâmica.

***Solução de Problemas.*** A dinâmica é considerada mais complexa do que a estática, uma vez que são considerados tanto as forças aplicadas a um corpo quanto o seu movimento. Além disso, muitas aplicações exigem o emprego de cálculo diferencial e integral, em vez de apenas álgebra e trigonometria. De qualquer maneira, o modo mais eficiente de aprender os princípios da dinâmica é *resolvendo problemas*. Para uma boa aprendizagem é necessário apresentar o trabalho de maneira lógica e bem ordenada, como sugerido pela seguinte seqüência de etapas:

1. Leia o problema atentamente e tente relacionar a situação física com a teoria estudada.
2. Esboce os diagramas necessários e construa uma tabela com os dados do problema.
3. Estabeleça um sistema de coordenadas adequado e aplique os princípios relevantes, geralmente em forma matemática.
4. Resolva as equações algebricamente, e, então, usando um conjunto coerente de unidades, complete numericamente a solução. Apresente as respostas numéricas com o número de algarismos significativos consistente com a exatidão dos dados fornecidos.
5. Examine a resposta de maneira crítica, usando julgamento técnico e bom senso para verificar se o resultado obtido é ou não razoável.
6. Ao terminar a solução, revise o problema. Tente também pensar em outros caminhos para se obter a mesma solução.

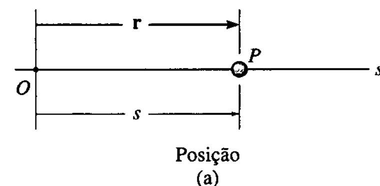
A aplicação desse procedimento geral permite que o trabalho seja desenvolvido da maneira mais cuidadosa e organizada possível. Boa organização e cuidado com a apresentação em geral estimula a clareza e a ordem do raciocínio e vice-versa.

## 12.2 Cinemática do Movimento Retilíneo: Movimento Contínuo

Iniciaremos nosso estudo discutindo a cinemática de um ponto material que se move ao longo de uma reta. Definimos *ponto material* como um ponto geométrico que representa um corpo material. Esse conceito se aplica a corpos cujas dimensões não têm relevância para a análise do movimento. Em muitos problemas, um objeto com dimensões finitas — como um foguete, um projétil ou um veículo — pode ser tratado como um ponto material, contanto que seu movimento seja caracterizado pelo movimento de seu centro de massa e qualquer rotação do corpo seja ignorada.

***Cinemática do Movimento Retilíneo.*** A cinemática de um ponto material é caracterizada especificando-se, em cada instante, sua posição, velocidade e aceleração.

***Posição.*** A trajetória retilínea de um ponto material será definida usando-se um único eixo coordenado $s$ (Figura 12.1$a$). Toma-se na trajetória um ponto fixo $O$, considerado a origem do *vetor de posição* $\mathbf{r}$ que especificará a localização do ponto material $P$ em cada instante. Observemos que $\mathbf{r}$ estará *sempre* disposto ao longo do eixo $s$, assim sua direção nunca se modifica. Apenas o seu módulo e sentido podem variar. Nos trabalhos analíticos, torna-se conveniente, portanto, representar $\mathbf{r}$ por um *escalar s*, que representa a *coordenada de posição* do ponto material (Figura 12.1$a$). O valor absoluto de $s$ (e $\mathbf{r}$) é a distância de $P$ a $O$, usualmente medida em metros (m) ou pés. Por outro lado, o sinal algébrico de $s$ (positivo ou negativo) indica, por convenção, a posição de $P$ em relação à origem $O$: quando é positivo, $P$ está à direita de $O$ e quando é negativo, ele está à esquerda. Com essa convenção, o sinal de $s$ também indica o sentido de $\mathbf{r}$.



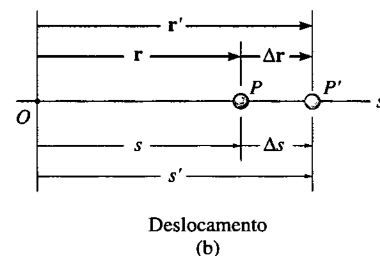
Posição
(a)

***Deslocamento.*** O *deslocamento* de um ponto material é definido como a *mudança* de sua *posição*. Por exemplo, se o ponto material se move de $P$ para $P'$ (Figura 12.1$b$), o deslocamento é dado por $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Usando-se escalares para representar $\Delta\mathbf{r}$, temos também

$$\Delta s = s' - s$$

Aqui $\Delta s$ é *positivo* se a posição final do ponto material está à *direita* de sua posição inicial, isto é, se $s' > s$. Do mesmo modo, se a posição final está à *esquerda* da posição inicial, então $\Delta s$ é *negativo*.

Por ser uma *quantidade vetorial*, o deslocamento de um ponto material distingue-se da distância percorrida pelo ponto. Especificamente, a *distância percorrida* é um *escalar positivo* que representa o comprimento total do caminho percorrido.



Deslocamento
(b)

***Velocidade.*** Se o ponto material sofre um deslocamento $\Delta\mathbf{r}$, ao se mover de $P$ a $P'$, durante um intervalo de tempo $\Delta t$ (Figura 12.1$b$), sua *velocidade média* durante esse intervalo de tempo é

$$\mathbf{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

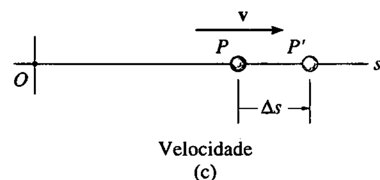
Se tomamos valores de $\Delta t$ cada vez menores, o módulo de $\Delta\mathbf{r}$ torna-se cada vez menor. Conseqüentemente, a *velocidade instantânea* é definida como $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0}(\Delta\mathbf{r}/\Delta t)$ ou

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Representando $\mathbf{v}$ como um escalar* (Figura 12.1$c$), também podemos escrever

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{v = \frac{ds}{dt}} \qquad (12.1)$$

Como $\Delta t$ ou $dt$ é sempre positivo, o sinal usado para definir o *sentido* da velocidade é o mesmo daquele de $\Delta s$ ou $ds$. Por exemplo, se o ponto está se movendo para a *direita* (Figura 12.1$c$), a velocidade é *positiva*; se ele está se movendo para a *esquerda*, a velocidade é *negativa*. (Isso é realçado pela seta colocada à esquerda da Equação 12.1.) O *módulo* da velocidade geralmente é expresso em unidades de m/s ou pés/s.

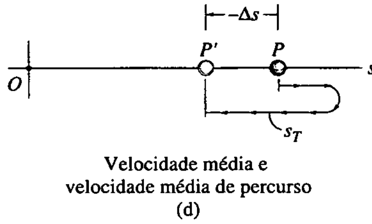


Velocidade
(c)

**Figura 12.1**

* A velocidade, quando tratada escalarmente de acordo com a definição dada pela Equação 12.1, também é conhecida como *velocidade escalar* (N. do T.).

Ocasionalmente, usaremos o termo 'velocidade média de percurso'. A *velocidade média de percurso* é uma *quantidade escalar positiva* definida como a distância total percorrida pelo ponto material, $s_T$, dividida pelo tempo decorrido $\Delta t$; isto é,



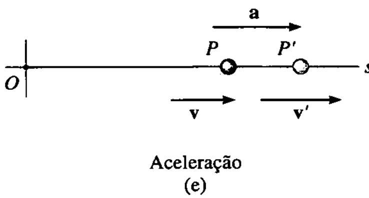
Velocidade média e velocidade média de percurso (d)

$$(v_{perc})_{méd} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

Por exemplo, na Figura 12.1*d*, o ponto material percorre a distância $s_T$ num tempo $\Delta t$, logo sua velocidade média de percurso é $(v_{sp})_{méd} = s_T/\Delta t$, mas sua velocidade média é $v_{méd} = \Delta s/\Delta t < 0$.

***Aceleração.*** Se a velocidade de um ponto material varia num dado intervalo de tempo $\Delta t$, sua *aceleração média*, durante esse intervalo de tempo, é definida como

$$\mathbf{a}_{méd} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$



Aceleração (e)

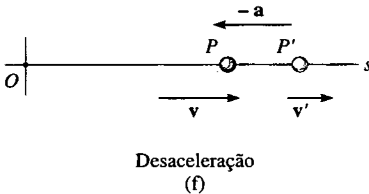
Aqui $\Delta \mathbf{v}$ representa a diferença de velocidade durante o intervalo de tempo $\Delta t$, isto é, $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ (Figura 12.1*e*).

A *aceleração instantânea* é obtida tomando-se intervalos de tempo $\Delta t$ cada vez menores, aos quais correspondem valores de $\Delta \mathbf{v}$ também cada vez menores, de modo que $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta \mathbf{v}/\Delta t)$ ou, usando escalares,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{a = \frac{dv}{dt}} \qquad (12.2)$$

Ao substituirmos a Equação (12.1) na Equação (12.2), também podemos escrever

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2}$$



Desaceleração (f)

**Figura 12.1**

Tanto a aceleração média quanto a instantânea podem ser positivas ou negativas. Em particular, quando a velocidade do ponto material está *diminuindo*, diz-se que o ponto está se *desacelerando*. Nesse caso, na Figura 12.1*f* $v'$ é *menor* do que $v$ e, portanto, a diferença $\Delta v = v' - v$ é negativa. Conseqüentemente a aceleração é negativa, indicando que velocidade e aceleração têm *sentidos opostos*. Observemos também que quando a *velocidade é constante* a *aceleração é nula*, pois $\Delta v = v - v = 0$. Como unidades para aceleração temos m/s$^2$ e pés/s$^2$.

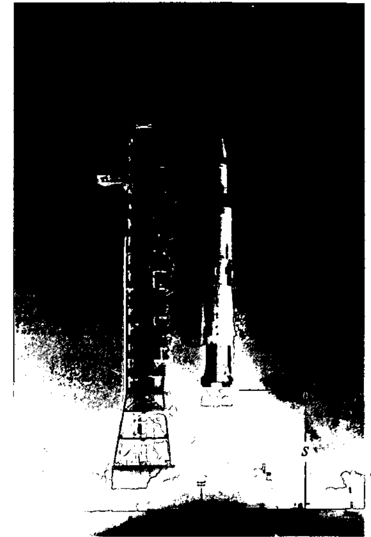
Uma relação diferencial envolvendo deslocamento, velocidade e aceleração ao longo da trajetória pode ser obtida pela eliminação de $dt$ nas equações 12.1 e 12.2. Devemos ter em mente que, embora possamos estabelecer uma outra equação, esse procedimento *não* leva a uma relação independente das equações 12.1 e 12.2. Mostre que

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{a\,ds = v\,dv} \qquad (12.3)$$

***Aceleração Constante, $a = a_c$.*** Quando a aceleração é constante, cada uma das equações cinemáticas, $a_c = dv/dt$, $v = ds/dt$ e $a_c ds = v dv$, pode ser facilmente integrada para se obter fórmulas que relacionam $a_c$, $v$, $s$ e $t$.

***Velocidade como Função do Tempo.*** Integrando $a_c = dv/dt$ e supondo que $v = v_0$ no instante inicial $t = 0$, obtemos

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_c\,dt$$




*Durante o tempo em que este foguete realiza movimento retilíneo, sua altitude como função do tempo pode ser medida e expressa como $s = s(t)$. Sua velocidade e sua aceleração podem então ser obtidas usando-se $v = ds/dt$ e $a = dv/dt$.*

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{\begin{array}{c} v = v_0 + a_c t \\ \text{aceleração constante} \end{array}} \qquad (12.4)$$

***Posição como Função do Tempo.*** Integrando $v = ds/dt = v_0 + a_c t$ e supondo que $s = s_0$ no instante inicial $t = 0$, temos

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_c t)\, dt$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{\begin{array}{c} s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t \\ \text{aceleração constante} \end{array}} \qquad (12.5)$$

***Velocidade como Função da Posição.*** Integrando $v\, dv = a_c ds$ e considerando que inicialmente $v = v_0$ e $s = s_0$, obtemos

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{s_0}^{s} a_c\, ds$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{\begin{array}{c} v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \\ \text{aceleração constante} \end{array}} \qquad (12.6)$$

Observemos que a Equação 12.6 não é independente das equações 12.4 e 12.5, visto que ela poderia ser obtida dessas equações. De fato, um procedimento alternativo para obter a Equação 12.6 seria resolver 12.4 para o tempo $t$ e substituir o resultado na Equação 12.5.

Os módulos e sinais de $s_0$, $v_0$ e $a_c$ nas equações 12.4, 12.5 e 12.6 são determinados a partir da origem escolhida e da orientação do eixo $s$, como indicado pela seta entre parênteses colocada à esquerda das equações. Também é importante lembrar que essas equações são válidas *apenas para aceleração constante e quando* $t = 0$, $s = s_0$, $v = v_0$. Um exemplo típico de movimento com aceleração constante é o de um corpo em queda livre. Se a resistência do ar é desprezível e a distância de queda é pequena, então a aceleração *vertical para baixo* experimentada pelo corpo nas proximidades da superfície da Terra é constante, valendo aproximadamente 9,81 m/s$^2$ ou 32,2 pés/s$^2$. A prova desse resultado é apresentada no Exemplo 13.2.

## PONTOS IMPORTANTES

- A dinâmica é o estudo da relação entre as forças e o movimento causado por elas.
- A cinemática é o estudo da geometria do movimento.
- A cinemática do movimento retilíneo refere-se a trajetórias ao longo de uma reta.
- A velocidade média de percurso é a distância total percorrida dividida pelo tempo total. Esse conceito é distinto do conceito de velocidade média, que é o deslocamento dividido pelo tempo.
- A aceleração, $a = dv/dt$, é negativa quando o ponto material está se desacelerando.
- Um ponto material pode ter num mesmo instante velocidade nula e aceleração não-nula.
- A relação $a\, ds = v\, dv$ é obtida de $a = dv/dt$ e $v = ds/dt$ pela eliminação de $dt$.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

As equações da cinemática do movimento retilíneo devem ser aplicadas usando-se o seguinte procedimento:

*Sistema de Coordenadas*

- Estabeleça uma coordenada de posição ao longo da trajetória e especifique sua *origem fixa* e um sentido positivo.
- Uma vez que o movimento se dá ao longo de uma reta, a posição, a velocidade e a aceleração do ponto material podem ser representadas por quantidades escalares. Para um trabalho analítico, os sentidos de $s$, $v$ e $a$ são, então, determinados a partir de seus *sinais algébricos.*
- O sentido positivo para cada escalar pode ser indicado por uma seta situada ao lado da equação à qual ela se aplica.

*Equações Cinemáticas*

- Quando se conhece uma relação cinemática entre *duas* quaisquer das quatro variáveis $a$, $v$, $s$ e $t$, então uma terceira variável pode ser obtida usando-se uma das equações cinemáticas, $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ ou $a\,ds = v\,dv$, que relaciona sempre três variáveis.†
- Quando a integração é feita, é importante que a posição e a velocidade sejam conhecidas em um determinado instante para que se possa avaliar a constante de integração, se a integral indefinida for utilizada, ou os limites de integração, no caso de se usar uma integral definida.
- Lembre-se de que as equações 12.4 a 12.6 têm uso limitado. Elas devem ser usadas apenas se há absoluta certeza de que a *aceleração é constante.*

† No Apêndice A encontram-se algumas fórmulas padrão de diferenciação e integração.

## EXEMPLO 12.1

Para um breve intervalo de tempo, a velocidade do carro que se move em linha reta (Figura 12.2) é dada por $v = (3t^2 + 2t)$ pés/s, onde $t$ é expresso em segundos. Determine a posição e a aceleração do carro para $t = 3$ s. Quando $t = 0, s = 0$.

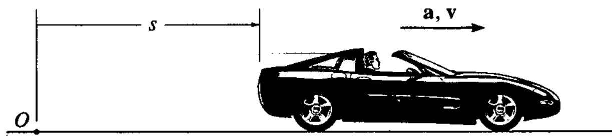



**Figura 12.2**

### SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** A coordenada de posição estende-se da origem fixa $O$ até o carro, positiva à direita.

***Posição.*** Uma vez que $v = f(t)$, a posição do carro pode ser determinada pelo uso de $v = ds/dt$, pois essa equação relaciona $v$, $s$ e $t$. Observando que $s = 0$ quando $t = 0$, temos[1]

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

[1] O mesmo resultado pode ser obtido calculando-se a constante de integração $C$ em vez de se usarem limites definidos na integral. Por exemplo, integrando $ds = (3t^2 + 2t)\,dt$, obtemos $s = t^3 + t^2 + C$. A condição $s = 0$, em $t = 0$, implica $C = 0$.

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t)\, dt$$

$$s\Big|_0^s = t^3 + t^2\Big|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

Quando $t = 3$ s,

$$s = (3)^3 + (3)^2 = 36 \text{ pés}$$ ***Resposta***

***Aceleração.*** Sabendo-se que $v = f(t)$, a aceleração é determinada a partir de $a = dv/dt$, pois essa equação relaciona $a$, $v$ e $t$.

$(\overset{+}{\rightarrow})$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t)$$
$$= 6t + 2$$

Quando $t = 3$ s,

$$a = 6(3) + 2 = 20 \text{ pés}/s^2 \rightarrow$$

As fórmulas para aceleração constante *não podem* ser usadas para resolver este problema. Por quê?

## EXEMPLO 12.2

Dispara-se verticalmente para *baixo*, com velocidade inicial de 60 m/s, um pequeno projétil contra um meio fluido. Devido à resistência do fluido, o projétil experimenta uma desaceleração $a = (-0{,}4v^3)$ m/s$^2$, onde a velocidade é dada em m/s.[2] Determine a velocidade e a posição do projétil 4 s após ter sido disparado.

### SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Uma vez que o movimento se dá para baixo, a coordenada de posição é positiva para baixo, da origem $O$, situada na superfície do líquido (Figura 12.3).

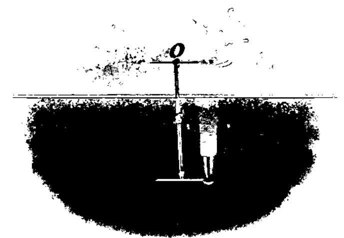



**Figura 12.3**

***Velocidade.*** Aqui $a = f(v)$, assim devemos determinar a velocidade como função do tempo usando $a = dv/dt$, pois essa equação relaciona velocidade, aceleração e tempo. (Por que não usar $v = v_0 + a_c t$?) Separando as variáveis e integrando o resultado, com $v_0 = 60$ m/s, temos

$(+\downarrow)$
$$a = \frac{dv}{dt} = -0{,}4v^3$$

$$\int_{60\text{ m/s}}^{v} \frac{dv}{-0{,}4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0{,}4}\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{1}{v^2}\Bigg|_{60}^{v} = t - 0$$

[2] Observemos que, para haver homogeneidade dimensional, a constante 0,4 deve ter unidades de s/m$^2$.

$$\frac{1}{0,8}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2}\right] = t$$

$$v = \left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t\right]^{-1/2}\right\} \text{ m/s}$$

Aqui se tomou a raiz positiva, pois o projétil está se movendo para baixo. Quando $t$ 5 4 s,

$$v = 0,559 \text{ m/s} \downarrow$$ ***Resposta***

***Posição.*** Conhecendo $v = f(t)$, podemos obter a posição do projétil a partir de $v = ds/dt$, pois essa equação relaciona $s$, $v$ e $t$. Usando a condição inicial $s = 0$ quando $t = 0$, temos

$(+\downarrow)$
$$v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t\right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t\right]^{-1/2} dt$$

$$s = \frac{2}{0,8}\left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t\right]^{1/2}\Bigg|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0,4}\left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0,8t\right]^{1/2} - \frac{1}{60}\right\} \text{ m}$$

Para $t = 4$ s,

$$s = 4,43 \text{ m}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 12.3

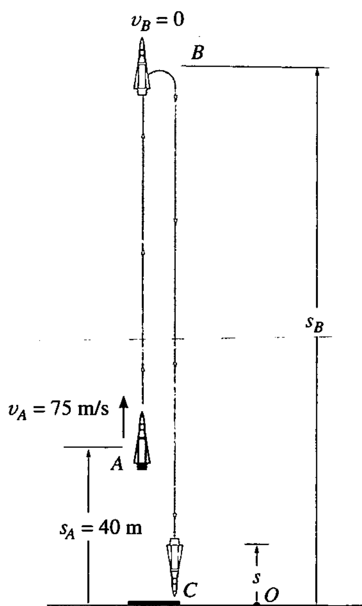



**Figura 12.4**

Durante um teste, um foguete está subindo verticalmente a 75 m/s quando, a 40 m do solo, ocorre uma avaria em seu motor. Determine a altura máxima $s_B$ alcançada pelo foguete e sua velocidade ao atingir o solo. Após a supressão da propulsão do motor, a aceleração do foguete, devido à ação da gravidade terrestre, passa a ser de 9,81 m/s$^2$ para baixo. Despreze o efeito da resistência do ar.

### SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Tomemos a origem $O$ para a coordenada de posição $s$ ao nível do solo e o sentido positivo para cima (Figura 12.4).

***Altura Máxima.*** Uma vez que o foguete está *subindo*, $v_A = +75$ m/s em $t = 0$. No ponto mais alto, $s = s_B$, a velocidade é $v_B = 0$. Durante todo o movimento, a aceleração é $a_c = -9,81$ m/s$^2$ (é negativa por ter o sentido *oposto* ao sentido considerado para o eixo $s$). Uma vez que $a_c$ é *constante*, a posição do foguete está relacionada com sua velocidade nos pontos $A$ e $B$, de acordo com a Equação 12.6.

$(+\uparrow)$
$$v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$

$$0 = (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9,81 \text{ m/s}^2)(s_B - 40 \text{ m})$$

$$s_B = 327 \text{ m}$$ ***Resposta***

***Velocidade.*** Para obtermos a velocidade do foguete imediatamente antes do impacto com o solo, podemos aplicar a Equação 12.6 entre os pontos $B$ e $C$ (Figura 12.4).

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B)$$

$$= 0 + 2(-9{,}81 \text{ m/s}^2)(0 - 327 \text{ m})$$

$$v_C = -80{,}1 \text{ m/s} = 80{,}1 \text{ m/s}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Escolheu-se a raiz negativa porque o foguete está se deslocando para baixo.

De maneira semelhante, a Equação 12.6 pode ser aplicada entre os pontos $A$ e $C$, isto é:

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A)$$

$$= (75 \text{ m/s})^2 + 2(-9{,}81 \text{ m/s}^2)(0 - 40 \text{ m})$$

$$v_C = -80{,}1 \text{ m/s} = 80{,}1 \text{ m/s}\downarrow$$

*Observação:* O foguete está submetido a uma *desaceleração* de 9,81 m/s$^2$ de $A$ a $B$, de modo que ele é *acelerado* à mesma taxa de $B$ a $C$. Além disso, embora no ponto mais alto de sua trajetória a velocidade se anule ($v_B = 0$), a aceleração nesse ponto é de 9,81 m/s$^2$ para baixo!

## EXEMPLO 12.4

Um ponto material metálico está submetido à influência de um campo magnético conforme ele se move para baixo num fluido que se estende da placa $A$ à placa $B$ (Figura 12.5). O ponto material inicialmente em repouso foi abandonado no ponto médio $C$, $s$ = 100 mm, e sua aceleração é $a = (4s)$ m/s$^2$, onde $s$ é dado em metros. Determine a velocidade com que ele atinge a placa $B$, $s$ = 200 mm, assim como o tempo que leva para ir de $C$ a $B$.

### SOLUÇÃO

***Sistema de coordenadas.*** Como mostrado na Figura 12.5, toma-se $s$ positivo no sentido de $A$ para $B$, com a origem na placa $A$.

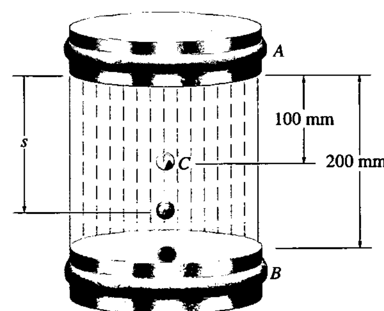


**Figura 12.5**

***Velocidade.*** Como $a = f(s)$, a velocidade como função da posição pode ser obtida usando-se $v\,dv = a\,ds$. Por que não usar as fórmulas para aceleração constante? Observando que $v = 0$ em $s$ = 100 mm = 0,1 mm, temos

$$(+\downarrow) \qquad v\,dv = a\,ds$$

$$\int_0^v v\,dv = \int_{0,1}^s 4s\,ds$$

$$\tfrac{1}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2\Big|_{0,1}^s$$

$$v = 2(s^2 - 0{,}01)^{1/2} \qquad (1)$$

Em $s$ = 200 mm = 0,2 m,

$$v_B = 0{,}346 \text{ m/s} = 346 \text{ mm/s}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A raiz positiva foi escolhida porque a partícula se desloca para baixo, isto é, no sentido $+s$.

***Tempo.*** O tempo que a partícula leva para se deslocar de $C$ a $B$ pode ser obtido usando-se $v = ds/dt$ e a Equação 1, onde $s = 0{,}1$ m em $t = 0$. Do Apêndice $A$,

$(+\downarrow)$

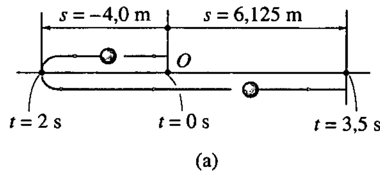
$$ds = v\,dt$$
$$= 2(s^2 - 0{,}01)^{1/2}\,dt$$
$$\int_{0,1}^{s} \frac{ds}{(s^2 - 0{,}01)^{1/2}} = \int_0^t 2\,dt$$
$$\ln(\sqrt{s^2 - 0{,}01} + s)\Big|_{0,1}^{s} = 2t\Big|_0^t$$
$$\ln(\sqrt{s^2 - 0{,}01} + s) + 2{,}33 = 2t$$

Em $s = 200$ mm $= 0{,}2$ m,

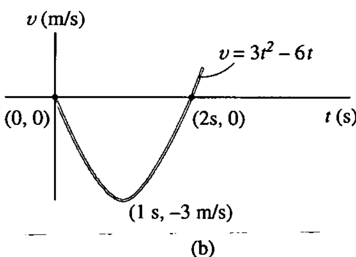
$$t = \frac{\ln(\sqrt{(0{,}2)^2 - 0{,}01} + 0{,}2) + 2{,}33}{2} = 0{,}658 \text{ s} \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 12.5

Um ponto material move-se ao longo de uma trajetória horizontal com velocidade $v = (3t^2 - 6t)$ m/s, onde $t$ é o tempo em segundos. Supondo que no instante inicial o ponto se localiza na origem $O$, determine a distância percorrida em 3,5 s. Determine também a velocidade média e a velocidade média de percurso durante o intervalo de tempo de 3,5 s.



(a)



(b)

**Figura 12.6**

### SOLUÇÃO

***Sistema de coordenadas.*** Suponha aqui movimento positivo para a direita, medido a partir da origem $O$ (Figura 12.6*a*).

***Distância percorrida.*** Uma vez que $y = f(t)$, a posição como função do tempo pode ser obtida pela integração de $y = ds/dt$, com $t = 0$ e $s = 0$,

$(\overset{+}{\rightarrow})$

$$ds = v\,dt$$
$$= (3t^2 - 6t)\,dt$$
$$\int_0^s ds = 3\int_0^t t^2\,dt - 6\int_0^t t\,dt$$
$$s = (t^3 - 3t^2)\text{ m} \qquad (1)$$

Para se determinar a distância percorrida em 3,5 s é necessário investigar a trajetória do ponto material. O gráfico da função velocidade (Figura 12.6*b*) mostra que a velocidade é *negativa* para $0 \leq t < 2$ s, indicando que o ponto está se movendo para a *esquerda*, e é *positiva* para $t > 2$ s, portanto o ponto está se movendo para a *direita*. Tem-se também que $v = 0$ em $t = 2$ s. Assim, a posição do ponto material nos instantes $t = 0$, $t = 2$ s e $t = 3{,}5$ s pode ser determinada pela Equação 1. O resultado é

$$s|_{t=0} = 0 \qquad s|_{t=2\text{ s}} = -4{,}0 \text{ m} \qquad s|_{t=3,5\text{ s}} = 6{,}125 \text{ m}$$

A trajetória é mostrada na Figura 12.6*a*. Logo, a distância percorrida em 3,5 s é

$$s_T = 4{,}0 + 4{,}0 + 6{,}125 = 14{,}125 \text{ m} = 14{,}1 \text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

***Velocidade.*** O *deslocamento* de $t = 0$ a $t = 3{,}5$ s é

$$\Delta s = s|_{t=3,5\,\text{s}} - s|_{t=0} = 6{,}12 - 0 = 6{,}12 \text{ m}$$

e a velocidade média é

$$v_{\text{méd}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6{,}12}{3{,}5 - 0} = 1{,}75 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A velocidade média de percurso é definida em termos da *distância percorrida* $s_T$. Este escalar positivo vale

$$(v_{\text{perc}})_{\text{méd}} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14{,}125}{3{,}5 - 0} = 4{,}04 \text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

# PROBLEMAS

**12.1.** Um ciclista parte do repouso e alcança a velocidade de 30 km/h após percorrer uma distância de 20 m ao longo de uma trajetória retilínea. Determine a sua aceleração se ela for *constante*. Quanto tempo leva o ciclista para atingir os 30 km/h?

**12.2.** Um carro parte do repouso e alcança a velocidade de 80 pés/s após trafegar por 500 pés ao longo de um trecho retilíneo de uma estrada. Determine sua aceleração constante e o tempo decorrido nesse percurso.

**12.3.** De uma torre a 50 pés do solo, atira-se verticalmente para baixo uma bola de beisebol com uma velocidade de 18 pés/s. Determine o tempo que a bola leva para chegar ao solo, assim como a velocidade com que ela chega.

***12.4.** Um ponto material desloca-se numa trajetória retilínea tal que em 2 s ele se move de uma posição inicial $s_A = +0{,}5$ m até uma posição $s_B = -1{,}5$ m. Em seguida, em 4 s ele se desloca da posição $s_B$ para $s_C = +2{,}5$ m. Determine a velocidade média e a velocidade média de percurso do ponto material durante o intervalo de tempo de 6 s.

**12.5.** Dirigindo a uma velocidade inicial de 70 km/h, um carro acelera a 6.000 km/h$^2$ num trecho reto de uma estrada. Quanto tempo o carro leva para atingir a velocidade de 120 km/h? Que distância o carro percorre nesse tempo?

**12.6.** Um trem de carga viaja a uma velocidade $v = 60(1 - e^{-p})$ pés/s, onde $t$, medido em segundos, é o tempo decorrido. Determine a distância que é coberta pelo trem em três segundos, assim como a aceleração nesse tempo.




**Problema 12.6**

**12.7.** A posição de um ponto material ao longo de uma linha reta é dada por $s = (t^3 - 9t^2 + 15t)$ pés, onde $t$ é dado em segundos. Determine sua aceleração máxima e sua velocidade máxima no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 10$ s.

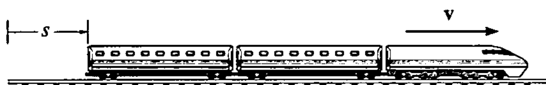
***12.8.** Aproximadamente de que andar de um edifício um carro deve cair, a partir do repouso, para que ele alcance a velocidade de 80,7 pés/s (55 mi/h) ao atingir o solo? Cada andar tem altura de 12 pés. (É bom você se lembrar deste resultado quando estiver dirigindo a essa velocidade.)

**12.9.** Um carro deve ser transportado em um elevador até o quarto andar de um estacionamento que está 48 pés acima do solo. Se o elevador pode acelerar a 0,6 pé/s$^2$, desacelerar a 0,3 pé/s$^2$ e atingir uma velocidade máxima de 8 pés/s, determine o menor tempo em que o elevador faz o transporte, partindo do repouso e terminando em repouso.

**12.10.** Um ponto material se desloca numa reta de tal modo que para um breve intervalo de tempo $2 \text{ s} \leq t \leq 6$ s seu movimento é descrito por $v = (4/a)$ pés/s, onde $a$ é dado em pés/s$^2$. Se $v = 6$ pés/s quando $t = 2$ s, determine a aceleração do ponto quando $t = 3$ s.

**12.11.** A aceleração de um ponto material em movimento retilíneo é dada por $a = (2t - 1)$ m/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Se $s = 1$ m e $v = 2$ m/s, quando $t = 0$, determine a velocidade e a posição do ponto material no instante $t = 6$ s, assim como a distância total percorrida até esse instante.

***12.12.** Quando um trem está se deslocando a 2 m/s num trecho retilíneo da estrada, ele começa a acelerar segundo a expressão $a = (60\ v^{-4})$ m/s$^2$, onde $v$ é dado em m/s. Determine sua velocidade e posição 3 s após o início da aceleração.




**Problema 12.12**

**12.13.** A posição de um ponto material em movimento retilíneo é dada por $s = (1{,}5t^3 - 13{,}5t^2 + 22{,}5t)$ pés, onde $t$ é medido em segundos. Determine a posição do ponto quando $t = 6$ s e a distância total que ele percorre durante o intervalo de tempo de 0 a 6 s. *Dica:* trace a trajetória para determinar a distância total percorrida.

**12.14.** A posição de um ponto material em movimento retilíneo é dada por $s = (t^3 - 9t^2 + 15t)$ pés, onde $t$ é medido em segundos. Determine a posição do ponto quando $t = 6$ s e a distância total que ele percorre durante o intervalo de tempo de 0 a 6 s. *Dica*: trace a trajetória para determinar a distância total percorrida.

**12.15.** A velocidade de um ponto material em movimento retilíneo é dada por $v = [5/(4 + s)]$ m/s, onde $s$ é dado em metros. Determine a posição do ponto para $t = 6$ s, considerando $s = 5$ m quando $t = 0$.

***12.16.** A velocidade de um ponto material em movimento retilíneo é dada por $v = [5/(4 + s)]$ m/s, onde $s$ é dado em metros. Determine a desaceleração do ponto para $s = 2$ m.

**12.17.** Dois pontos materiais, $A$ e $B$, partem do repouso na origem $s = 0$ e se deslocam em movimento retilíneo com acelerações $a_A = (6t - 3)$ pés/s$^2$ e $a_B = (12t^2 - 8)$ pés/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine a distância entre eles, quando $t = 4$ s e a distância que cada um deles percorre entre $t = 0$ e $t = 4$ s.

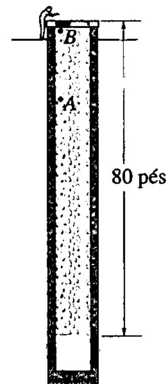
**12.18.** Um carro parte do repouso, em movimento retilíneo, com aceleração $a = (3s^{-1/3})$ m/s$^2$, onde $s$ é dado em metros. Determine a aceleração do carro quando $t = 4$ s.

**12.19.** Uma pedra $A$, inicialmente em repouso, é abandonada e cai num poço. Após 1 s, uma pedra $B$, também em repouso, é abandonada e cai no poço. Determine a distância entre elas 1 s após a partida de $B$.

***12.20.** Uma pedra $A$, inicialmente em repouso, é abandonada e cai num poço. Após 1 s, uma pedra $B$, também em repouso, é abandonada e cai no poço. Determine o intervalo de tempo entre o instante em que $A$ atinge a água no poço e o instante em que $B$ chega à água. Com que velocidade elas chegam à água?

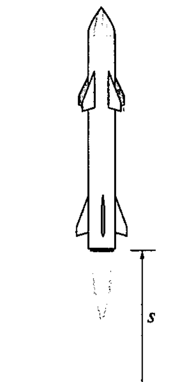
**12.21.** Um ponto material tem movimento retilíneo, com aceleração $a = -ks$, onde $s$ é a distância do ponto material ao ponto de partida e $k$ é uma constante de proporcionalidade a ser determinada. Para $s = 2$ pés a velocidade é de 4 pés/s e para $s = 3{,}5$ pés a velocidade é de 10 pés/s. Qual é o valor de $s$ quando $v = 0$?

**12.22.** A aceleração de um foguete em movimento ascendente é dada por $a = (6 + 0{,}02s)$ m/s$^2$, onde $s$ é dado em metros. Determine a velocidade do foguete quando $s = 2$ km e o tempo necessário para ele atingir essa altitude. Inicialmente (quando $t = 0$), $v = 0$ e $s = 0$.




**Problemas 12.19/20**

**12.23.** A aceleração de um foguete em movimento ascendente é dada por $a = (6 + 0{,}02s)$ m/s$^2$, onde s é dado em metros. Determine o tempo necessário para o foguete atingir a altitude de $s = 100$ m. Inicialmente (quando $t = 0$), $v = 0$ e $s = 0$.

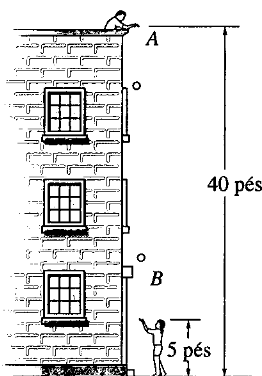



**Problemas 12.22/23**

***12.24.** No instante $t = 0$ uma bala $A$ deixa o cano de uma arma a uma velocidade de 450 m/s, verticalmente para cima. Quando $t = 3$ s, uma bala $B$ é disparada para cima com velocidade de 600 m/s. Determine o tempo $t$, após o primeiro disparo, em que $B$ alcança $A$. Em que altitude isso ocorre?

**■12.25.** Um ponto material desloca-se em uma reta, com aceleração $a = 5/(3s^{1/3} + s^{5/2})$ m/s$^2$, onde $s$ é dado em metros. Determine a velocidade do ponto quando $s = 2$ m, supondo que ele parte do repouso em $s = 1$ m. Use a regra de Simpson para calcular a integral.

**12.26.** Uma bola $A$ inicialmente em repouso é abandonada a uma altura de 40 pés ao mesmo tempo em que uma segunda bola $B$ é atirada verticalmente para cima a 5 pés do solo. Se as bolas se cruzam a 20 pés do solo, determine a velocidade com que a bola $B$ foi arremessada.




Problema 12.26

■12.27. Um projétil, inicialmente na origem, move-se verticalmente para baixo ao longo de uma trajetória retilínea, através de um meio fluido tal que sua velocidade é definida por $v = 3(8e^{-t} + t)^{1/2}$ m/s, onde $t$ é dado em segundos. Construa o gráfico da posição $s$ do projétil durante os primeiros 2 s. Use o método de Runge-Kutta para calcular $s$ com incrementos de $h = 0{,}25$ s.

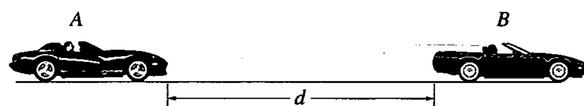
*12.28. A aceleração de um ponto material em movimento retilíneo é definida por $a = (2t - 9)$ m/s², onde t é dado em segundos. Em $t = 0$, $s = 1$ m e $v = 10$ m/s. Determine, quando $t = 9$ s, (a) a posição, (b) a distância total que o ponto percorre e (c) sua velocidade.

12.29. Um ponto material está se deslocando ao longo de uma reta tal que sua velocidade na origem é de 4 m/s. Se o ponto começa a desacelerar a uma taxa $a = (-1{,}5v^{1/2})$ m/s², onde $v$ é dado em m/s, determine a distância que ele percorre até parar.

12.30. Um ponto material tem movimento retilíneo acelerado com aceleração $a = 5/(3s^{1/3} + s^{5/2})$ m/s², onde $s$ é dado em metros. Determine a velocidade do ponto quando $s = 2$ m, supondo que ele parte do repouso em $s = 1$ m. Use a regra de Simpson para calcular a integral.

12.31. Determine o tempo necessário para um carro se deslocar 1 km, supondo que ele parte do repouso, atinge um máximo de velocidade em algum ponto intermediário e, então, pára ao fim do percurso. O carro pode acelerar a 1,5 m/s² e desacelerar a 2 m/s².

*12.32. Quando dois carros, $A$ e $B$, que se movem no mesmo sentido estão emparelhados, suas velocidades são $v_A$ e $v_B$, respectivamente. Se $B$ se mantém com velocidade constante e $A$ começa a desacelerar com $a_A$, determine a distância $d$ entre os carros no instante em que $A$ pára.




Problema 12.32

12.33. Se os efeitos da resistência do ar são levados em conta, a aceleração de um corpo em queda livre é definida pela equação $a = 9{,}81[1 - v^2(10^{-4})]$ m/s², onde $v$ é dado em m/s e o sentido positivo é para baixo. Se o corpo inicialmente em repouso é abandonado a uma *grande altitude*, determine (a) a velocidade para $t = 5$ s e (b) a velocidade terminal ou velocidade máxima atingida ($t \to \infty$) pelo corpo.

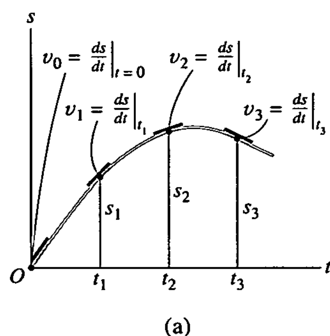
12.34. Quando um corpo é lançado de uma grande altitude, a variação da aceleração da gravidade deve ser levada em conta. Desprezando-se a resistência do ar, essa aceleração pode ser calculada pela fórmula $a = -g_0[R^2/(R + y)^2]$, onde a constante $g_0$ é a aceleração da gravidade ao nível do mar, $R$ é o raio da Terra, $y$ é a altitude em relação à superfície terrestre e o sentido positivo é para cima. Se $g_0 = 9{,}81$ m/s² e $R = 6.356$ km, determine a velocidade mínima (velocidade de escape) de lançamento vertical na superfície da Terra para a qual o corpo não retorna ao solo. *Dica:* isso exige que $v = 0$ para $y \to \infty$.

12.35. Levando em conta a dependência da aceleração gravitacional com a altitude $y$ (veja o Problema 12.34), deduza uma equação que relacione a velocidade de queda livre de um corpo com sua altitude. Suponha que o corpo inicialmente em repouso é abandonado a uma altitude $y_0$ medida a partir da superfície terrestre. Com que velocidade o corpo atinge o solo se ele é abandonado a uma altitude $y_0 = 500$ km? Use os valores fornecidos no Problema 12.34.

*12.36. Quando um corpo cai através do ar, sua aceleração inicial $a = g$ diminui até se anular e a partir daí ele cai a uma velocidade constante ou terminal $v_f$. Se essa variação de aceleração pode ser expressa como $a = (g/v_f^2)(v_f^2 - v^2)$, determine o tempo necessário para a velocidade se tornar $v < v_f$. O corpo inicia seu movimento do repouso.

# 12.3 CINEMÁTICA DO MOVIMENTO RETILÍNEO: MOVIMENTO IRREGULAR

Quando o movimento de um ponto material durante um dado tempo é irregular, torna-se difícil obter uma função matemática contínua para descrever sua posição, velocidade ou aceleração. Nesse caso, o movimento pode ser mais bem descrito graficamente usando-se uma série de curvas que podem ser geradas experimentalmente num computador. Se o gráfico resultante des-



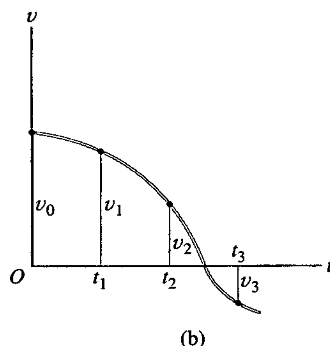




Figura 12.7

creve a relação entre quaisquer duas das variáveis $a, v, s, t$, podemos estabelecer um gráfico que descreve a relação entre as outras variáveis usando as equações cinemáticas $a = dv/dt$, $v = ds/dt$, $a\,ds = v\,dv$. Várias dessas situações ocorrem freqüentemente.

***Dado o Gráfico s–t, Construir o Gráfico v–t.*** Se a posição de um ponto material pode ser *determinada experimentalmente* durante um intervalo de tempo $t$, o gráfico $s$–$t$ para o ponto pode ser construído (Figura 12.7*a*). Para determinarmos a velocidade do ponto como função do tempo, isto é, o gráfico $v$–$t$, devemos fazer uso de $v = ds/dt$, pois essa equação relaciona $v$, $s$ e $t$. Logo, a velocidade em cada instante pode ser determinada medindo-se a *inclinação* do gráfico $s$–$t$, isto é,

$$\frac{ds}{dt} = v$$

inclinação do gráfico $s$–$t$ = velocidade

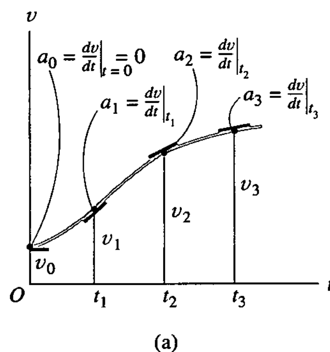
Por exemplo, no gráfico $s$–$t$ (Figura 12.7*a*), a medida de cada inclinação $v_0$, $v_1$, $v_2$, $v_3$ nos respectivos pontos intermediários $(0, 0)$, $(t_1, s_1)$, $(t_2, s_2)$, $(t_3, s_3)$ fornece os pontos correspondentes no gráfico $v$–$t$ (Figura 12.7*b*).

Também é possível estabelecer o gráfico $v$–$t$ *matematicamente*, contanto que os segmentos do gráfico $s$–$t$ possam ser expressos na forma de equações $s = f(t)$. As equações correspondentes que descrevem os segmentos do gráfico $v$–$t$ são, então, determinadas por *derivação*, pois $v = ds/dt$.

***Dado o Gráfico v–t, Construir o Gráfico a–t.*** Quando se conhece o gráfico $v$–$t$ de um ponto material, como na Figura 12.8*a*, a aceleração como função do tempo, isto é, o gráfico $a$–$t$, pode ser obtida usando-se $a = dv/dt$. (Por quê?) Logo, a aceleração em qualquer instante é determinada medindo-se a inclinação do gráfico $v$–$t$, isto é,

$$\frac{dv}{dt} = a$$

inclinação do gráfico $v$–$t$ = aceleração



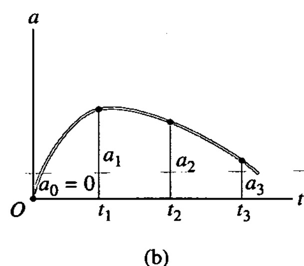




Figura 12.8

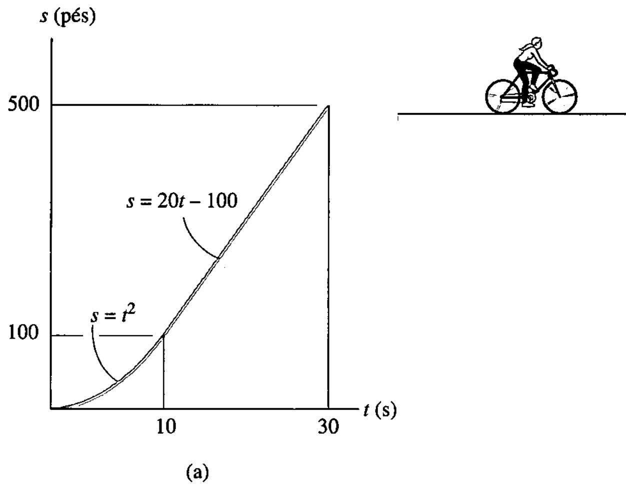
Por exemplo, no gráfico $v$–$t$ (Figura 12.8*a*), a medida de cada inclinação $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ nos respectivos pontos intermediários $(0, v_0)$, $(t_1, v_1)$, $(t_2, v_2)$, $(t_3, v_3)$ fornece os pontos correspondentes no gráfico $a$–$t$ (Figura 12.8*b*).

Quaisquer segmentos do gráfico $a$–$t$ também podem ser obtidos *matematicamente*, desde que se conheçam as equações, $v = g(t)$, correspondentes aos segmentos no gráfico $v$–$t$. Isto pode ser feito simplesmente tomando-se a *derivada* temporal de $v = g(t)$, pois $a = dv/dt$.

Como a derivada de um polinômio de grau-$n$ resulta em um polinômio de grau $n - 1$, então, se o gráfico $s$–$t$ é parabólico (curva de segundo grau), o gráfico $v$–$t$ correspondente é linear (curva de primeiro grau) e o gráfico $a$–$t$ é uma reta horizontal (curva de grau zero).

## EXEMPLO 12.6

O gráfico da Figura 12.9*a* mostra a posição de uma bicicleta que se desloca num trecho retilíneo de uma estrada. Construa os gráficos *v–t* e *a–t* para $0 \le t \le 30$ s.




(a)

## SOLUÇÃO

***Gráfico v–t.*** Uma vez que $v = ds/dt$, o gráfico *v–t* pode ser determinado derivando-se as equações que definem o gráfico *s–t* (Figura 12.9*a*). Temos então

$$0 \le t < 10\text{ s}; \qquad s = t^2 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 2t$$

$$10\text{ s} < t \le 30\text{ s}; \qquad s = 20t - 100 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 20$$

Os resultados encontram-se na Figura 12.9*b*. Podemos também obter valores específicos de *v* calculando a *inclinação* do gráfico *s–t* nos instantes correspondentes. Por exemplo, em $t = 20$ s, a inclinação do gráfico *s–t* é determinada a partir da reta de 10 s a 30 s, isto é,

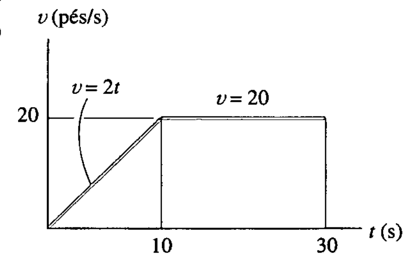
$$t = 20\text{ s}; \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{500 - 100}{30 - 10} = 20\text{ pés/s}$$

***Gráfico a–t.*** Como $a = dv/dt$, o gráfico *a–t* pode ser determinado derivando-se as equações dos segmentos de reta do gráfico *v–t*. Isso nos dá

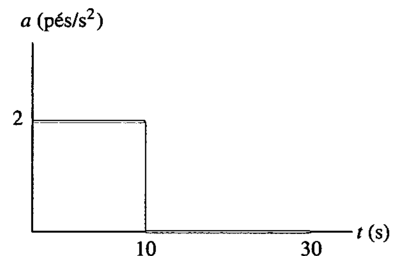
$$0 \le t < 10\text{ s}; \qquad v = 2t; \qquad a = \frac{dv}{dt} = 2$$

$$10 < t \le 30\text{ s}; \qquad v = 20; \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$$

Os resultados encontram-se na Figura 12.9*c*. Mostre que $a = 2$ pés/s² quando $t = 5$ s pelo cálculo da inclinação do gráfico *v–t*.




(b)




(c)

**Figura 12.9**

***Dado o Gráfico a–t, Construir o Gráfico v–t.*** Se o gráfico *a–t* é conhecido (Figura 12.10*a*), o gráfico *v–t* pode ser construído usando-se $a = dv/dt$, escrita na forma integral

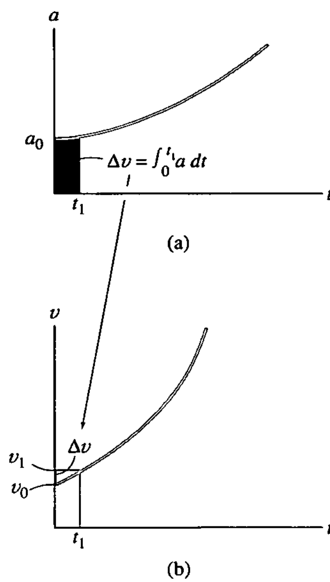



**Figura 12.10**

| $\Delta v = \int a\,dt$ | | |
|---|---|---|
| variação na velocidade | = | área sob o gráfico $a$–$t$ |

Assim, para construirmos o gráfico $v$–$t$, começamos por somar ao valor conhecido da velocidade inicial $v_0$ um incremento de área ($\Delta v$) determinado a partir do gráfico $a$–$t$. Dessa maneira, determinam-se pontos sucessivos, $v_1 = v_0 + \Delta v$, $v_2 = v_1 + \Delta v$ etc. para o gráfico $v$–$t$ (Figura 12.10*b*). Devemos observar que é necessário efetuar uma adição algébrica de áreas, pois áreas acima do eixo $t$ correspondem a um aumento de velocidade (áreas 'positivas'), enquanto aquelas abaixo do eixo indicam um decréscimo de velocidade (áreas 'negativas').

Se os segmentos do gráfico $a$–$t$ podem ser descritos por uma série de equações, então cada uma dessas equações pode ser *integrada* para resultar em equações que descrevem os segmentos correspondentes do gráfico. Logo, se o gráfico $a$–$t$ for linear (curva de primeiro grau), a integração fornecerá um gráfico $v$–$t$ parabólico (curva de segundo grau) etc.

***Dado o Gráfico v–t, Construir o Gráfico s–t.*** A partir do gráfico $v$–$t$ (Figura 12.11*a*), é possível determinar o gráfico $s$–$t$ usando-se $v = ds/dt$, escrito na forma integral:

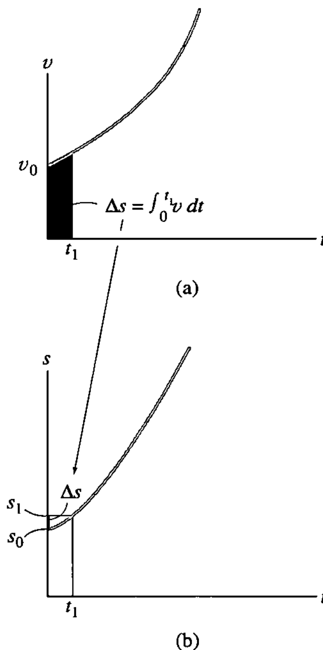



**Figura 12.11**

| $\Delta s = \int v\,dt$ | | |
|---|---|---|
| deslocamento | = | área sob o gráfico $v$–$t$ |

Da mesma maneira como se procedeu acima, começamos por somar algebricamente à posição inicial $s_0$ um pequeno incremento de área $\Delta s$ determinado no gráfico $v$–$t$ (Figura 12.11*b*) e assim sucessivamente.

Se for possível descrever segmentos do gráfico $v$–$t$ por meio de uma série de equações, então cada uma dessas equações poderá ser *integrada* para resultar em equações que descrevem os segmentos correspondentes do gráfico $s$–$t$.

## EXEMPLO 12.7

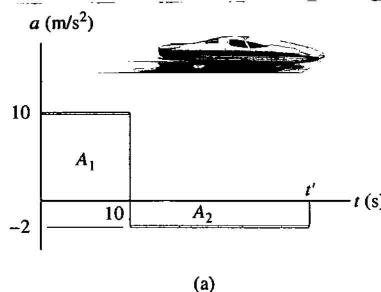



**Figura 12.12**

O carro de prova mostrado na Figura12.12*a* parte do repouso e se desloca ao longo da pista retilínea, acelerando a uma taxa constante durante 10 s e então desacelerando a uma taxa constante. Construa os gráficos $v$–$t$ e $s$–$t$ e determine o tempo $t'$ gasto da partida até a parada. Que distância foi percorrida pelo carro?

### SOLUÇÃO

***Gráfico v–t.*** Uma vez que $dv = a\,dt$, o gráfico $v$–$t$ é determinado pela integração dos segmentos de reta do gráfico $a$–$t$. Usando a *condição inicial* $v = 0$ quando $t = 0$, temos

$$0 \le t < 10\text{ s}; \quad a = 10; \quad \int_0^v dv = \int_0^t 10\,dt; \quad v = 10t$$

Quando $t = 10$ s, $v = 10(10) = 100$ m/s. Usando esse resultado como a *condição inicial* para o próximo intervalo de tempo, temos

$$10\text{ s} < t \le t'; \quad a = -2; \quad \int_{100}^v dv = \int_{10}^t -2\,dt; \quad v = -2t + 120$$

Quando $t = t'$ impomos $v = 0$, resultando em (Figura 12.12*b*):

$$t' = 60\text{ s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

É possível ter uma solução mais direta para $t'$ se levarmos em conta que a área sob o gráfico *a–t* é igual à variação da velocidade do carro. Impondo $\Delta v = 0 = A_1 + A_2$ (Figura 12.12*b*), obtemos

$$0 = 10\text{ m/s}^2(10\text{ s}) + (-2\text{ m/s}^2)(t' - 10\text{ s}) = 0$$

$$t' = 60\text{ s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

***Gráfico s–t.*** Como $ds = v\,dt$, a integração das equações do gráfico *v–t* fornece as equações correspondentes do gráfico *s–t*. Com a condição inicial $s = 0$ quando $t = 0$, tem-se

$$0 \le t \le 10\text{ s}; \quad v = 10t; \quad \int_0^s ds = \int_0^t 10t\,dt, \quad s = 5t^2$$

Quando $t = 10$ s, $s = 5(10)^2 = 500$ m. Usando-se essa *condição inicial*,

$$10\text{ s} \le t \le 60\text{ s}; \quad v = -2t + 120; \quad \int_{500}^s ds = \int_{10}^t (-2t + 120)\,dt$$

$$s - 500 = -t^2 + 120t - [-(10)^2 + 120(10)]$$

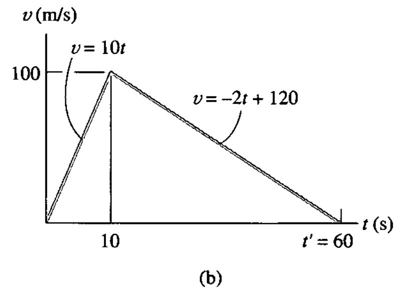
$$s = -t^2 + 120t - 600$$

Quando $t' = 60$ s, a posição é

$$s = -(60)^2 + 120(60) - 600 = 3.000\text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

O gráfico *s–t* pode ser visto na Figura 12.12*c*. Observemos que uma solução direta para $s$ é possível quando $t' = 60$ s, pois a *área triangular* sob o gráfico *v–t* fornece o deslocamento $\Delta s = s - 0$ de $t = 0$ até $t' = 60$ s. Logo:

$$\Delta s = \tfrac{1}{2}(60)(100) = 3.000\text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



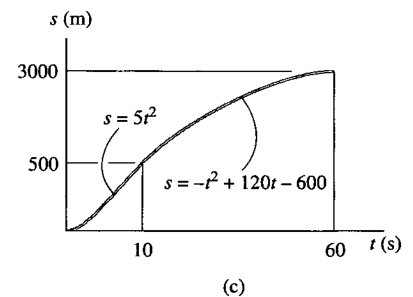




**Figura 12.12**

***Dado o Gráfico a–s, Construir o Gráfico v–s.*** Em alguns casos, é possível construir um gráfico *a–s*, a partir do qual pontos do gráfico *v–s* podem, então, ser determinados usando-se $v\,dv = a\,ds$. Integrando essa equação, entre os limites $v = v_0$ para $s = s_0$ e $v = v_1$ para $s = s_1$, temos

$$\tfrac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

área sob o gráfico *a–s*

Assim, o pequeno trecho de área sombreada sob o gráfico *a–s*, $\int_{s_0}^{s_1} a\,ds$, mostrado na Figura 12.13*a*, é igual à metade da diferença dos quadrados da

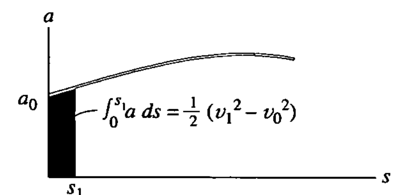



**Figura 12.13**

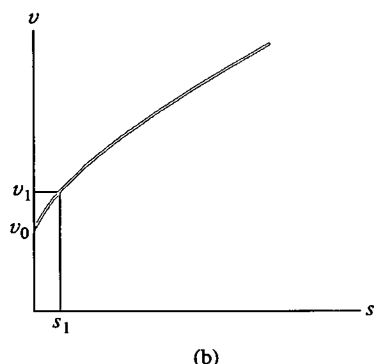



**Figura 12.13**

velocidade, $\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2)$. Portanto, se a área for determinada e o valor inicial de $v_0$ para $s_0 = 0$ for conhecido, então $v_1 = (2\int_{s_0}^{s_1} a\,ds + v_0^2)^{1/2}$ (Figura 12.13*b*). Dessa maneira, pontos sucessivos do gráfico *a–s* podem ser determinados.

Outro modo de construir o gráfico *v–s* consiste em determinar primeiro as equações que definem os segmentos do gráfico *a–s*. Então, as equações correspondentes que definem os segmentos do gráfico *v–s* podem ser obtidas diretamente por integração, usando-se $v\,dv = a\,ds$.

***Dado o Gráfico v–s, Construir o Gráfico a–s.*** Se o gráfico *v–s* é conhecido, a aceleração $a$ em qualquer posição $s$ pode ser determinada usando-se a relação $a\,ds = v\,dv$, escrita como

$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

aceleração = velocidade vezes inclinação do gráfico *v–s*

Assim, para qualquer ponto $(s, v)$ da Figura 12.14*a*, primeiro calculamos a inclinação $dv/ds$ do gráfico *v–s*. Com o resultado obtido mais o valor conhecido de $v$, determinamos $a$ (Figura 12.14*b*).

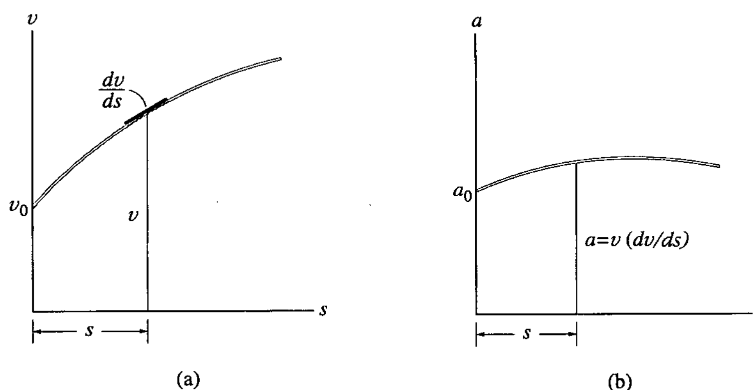



**Figura 12.14**

Também podemos determinar analiticamente os segmentos descrevendo o gráfico *a–s*, desde que saibamos as equações dos segmentos correspondentes do gráfico *v–s*. Como acima, isso exige integração usando-se $a\,ds = v\,dv$

## EXEMPLO 12.8

O gráfico *v–s* (Figura 12.15*a*) descreve o movimento de uma motocicleta. Construa o gráfico *a–s* para o movimento e determine o tempo necessário para a motocicleta atingir a posição $s = 400$ pés.

### SOLUÇÃO

***Gráfico a–s.*** Como são dadas as equações para os segmentos do gráfico *v–s*, o gráfico *a–s* pode ser determinado usando-se $a\,ds = v\,dv$.

$0 \le s < 200$ pés; $\quad v = 0{,}2\,s + 10$

$$a = v\frac{dv}{ds} = (0{,}2s + 10)\frac{d}{ds}(0{,}2s + 10) = 0{,}04s + 2$$

200 pés $< s \leq$ 400 pés; $\quad v = 50;$

$$a = v\frac{dv}{ds} = (50)\frac{d}{ds}(50) = 0$$

Os resultados estão na Figura 12.15*b*.

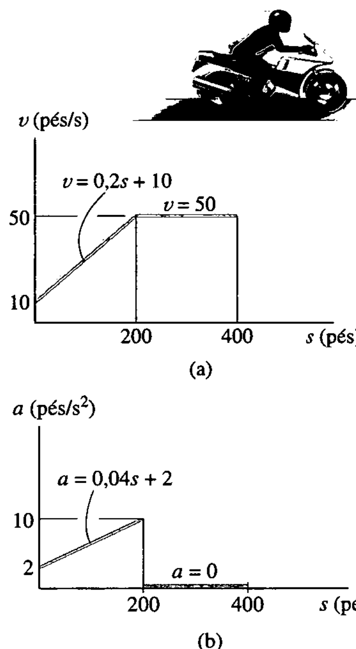



**Figura 12.15**

***Tempo.*** O tempo pode ser obtido usando-se o gráfico $v$–$s$ e $v = ds/dt$, porque essa equação relaciona $v$, $s$ e $t$. Para o primeiro trecho do movimento, $s$ = 0 em $t$ = 0, assim

0 $\leq s <$ 200 pés; $\quad v = 0{,}2s + 10; \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{0{,}25 + 10}$

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{0{,}2s + 10}$$

$$t = 5\ln(0{,}2s + 10) - 5\ln 10$$

Para $s$ = 200 pés, $t = 5\ln[0{,}2(200) + 10] - 5\ln 10 = 8{,}05$ s. Portanto, para o segundo trecho do movimento,

200 pés $< s \leq$ 400 pés; $\quad v = 50; \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{50}$

$$\int_{8{,}05}^t dt = \int_{200}^s \frac{ds}{50}$$

$$t - 8{,}05 = \frac{s}{50} - 4$$

$$t = \frac{s}{50} + 4{,}05$$

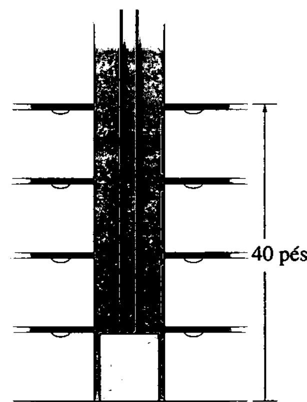
Portanto, para $s$ = 400 pés,

$$t = \frac{400}{50} + 4{,}05 = 12{,}0 \text{ s}$$ ***Resposta***

## PROBLEMAS

**12.37.** Um avião parte do repouso, desloca-se 5.000 pés ao longo da pista e, após uma aceleração uniforme, decola com uma velocidade de 162 mi/h. Ele sobe então em linha reta com aceleração constante de 3 pés/s$^2$ até alcançar uma velocidade constante de 220 mi/h. Desenhe os gráficos $s$–$t$, $v$–$t$ e $a$–$t$ que descrevem o movimento.

**12.38.** Um elevador parte do repouso no andar térreo, com uma aceleração de 5 pés/s$^2$. Determine o menor tempo gasto pelo elevador para chegar a um andar a 40 pés acima do térreo, sabendo que ele pode desacelerar a 2 pés/s$^2$ e pára nesse andar. Desenhe os gráficos $a$–$t$, $v$–$t$ e $s$–$t$ que descrevem o movimento.

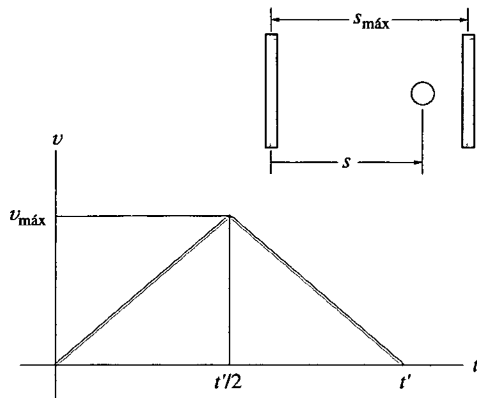



**Problema 12.38**

**12.39.** Um trem de carga parte do repouso e trafega com aceleração constante de 0,5 pé/s². Após um tempo $t'$ ele mantém uma velocidade constante. Quando $t = 160$ s, o trem já se deslocou 2.000 pés. Determine o tempo $t'$ e construa o gráfico $v$–$t$ para o movimento.

***12.40.** Se a posição de um ponto material é definida por $s = [2\ \text{sen}(\pi/5)t + 4]$ m, onde $t$ é dado em segundos, construa os gráficos $s$–$t$, $v$–$t$ e $a$–$t$ para $0 \leq t \leq 10$ s.

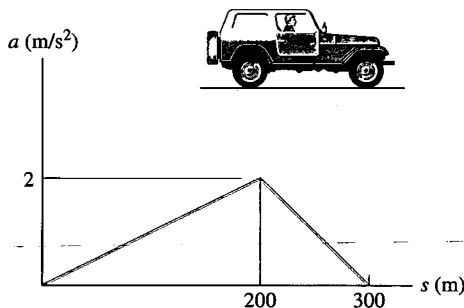
**12.41.** A figura mostra o gráfico $v$–$t$ para um ponto material que se move em um campo elétrico de uma placa a outra. A aceleração e a desaceleração têm módulo de 4 m/s². Se o espaço entre as placas é de 200 mm, determine a velocidade máxima $v_{máx}$ e o tempo $t'$ que o ponto leva para ir de uma a outra placa. Desenhe também o gráfico $s$–$t$. Quando $t = t'/2$, o ponto está em $s = 100$ mm.




**Problemas 12.41/42**

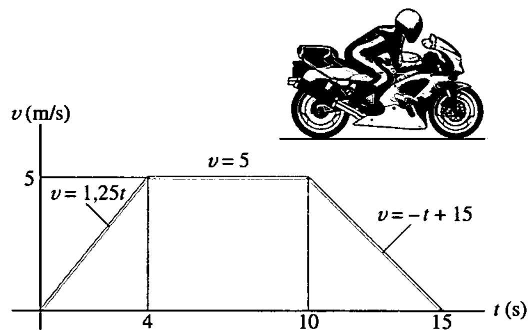
**12.42.** A figura mostra o gráfico $v$–$t$ para um ponto material que se move num campo elétrico de uma placa a outra, onde $t' = 0,2$ s e $v_{máx} = 10$ m/s. Desenhe os gráficos $s$–$t$ e $a$–$t$ para o ponto. Quando $t = t'/2$ a partícula está em $s = 0,5$ m.

**12.43.** O gráfico $a$–$s$ mostra os primeiros 300 m do movimento de um jipe que trafega numa estrada retilínea. Construa o gráfico $v$–$s$. Em $s = 0$, $v = 0$.



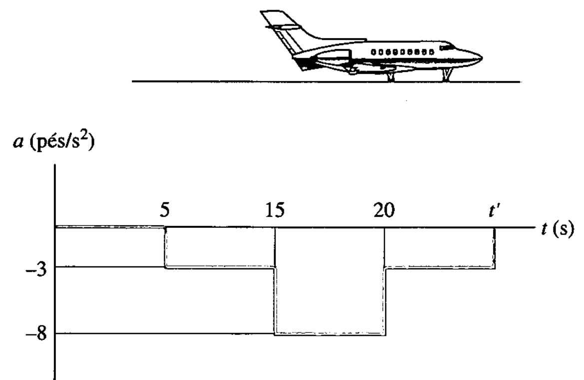

**Problema 12.43**

***12.44.** A figura mostra o gráfico $v$–$t$ para uma motocicleta que parte do repouso na posição $s = 0$ e trafega ao longo de uma estrada retilínea à velocidade indicada no gráfico. Determine a aceleração e a posição da motocicleta para $t = 8$ s e $t = 12$ s.



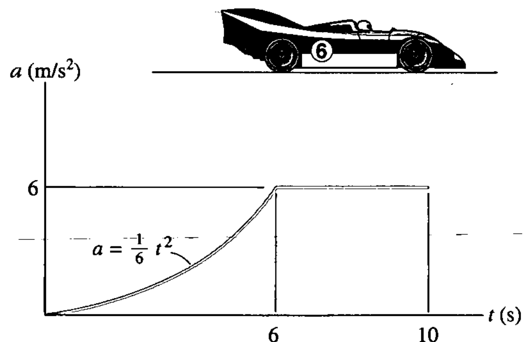

**Problema 12.44**

**12.45.** Um avião pousa numa pista a uma velocidade inicial de 110 pés/s na posição $s = 0$. Se a aeronave está submetida a uma desaceleração, como indicado na figura, determine o tempo $t'$ necessário para ela atingir o repouso. Construa o gráfico $s$–$t$ para o movimento.



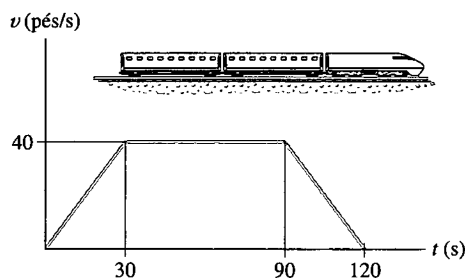

**Problema 12.45**

**12.46.** O carro de corrida parte do repouso, deslocando-se numa pista retilínea. Sua aceleração durante os primeiros 10 s é mostrada na figura. Construa o gráfico $v$–$t$ para o movimento e determine a distância percorrida nos 10 s.



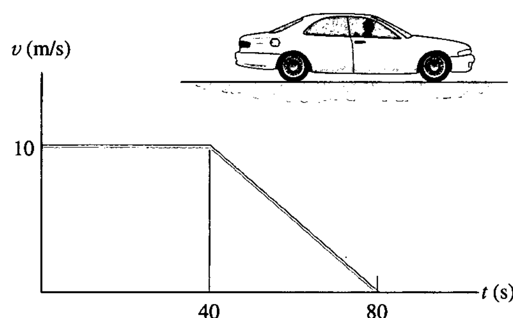

**Problema 12.46**

**12.47.** O gráfico mostra o movimento de um trem que se desloca da estação $A$ para a estação $B$. Desenhe o gráfico $a$–$t$ e determine a velocidade média do trem e a distância entre as estações.




**Problema 12.47**

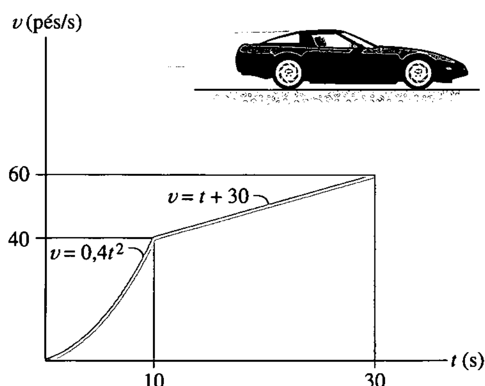
***12.48.** O gráfico mostra a velocidade de um carro em função do tempo. Determine a distância total percorrida até o repouso ($t$ = 80 s). Construa o gráfico $a$–$t$.




**Problema 12.48**

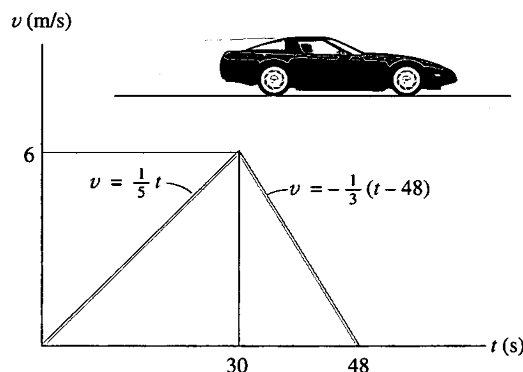
**12.49.** O gráfico $v$–$t$ mostra o movimento de um carro em movimento retilíneo. Desenhe o gráfico $a$–$t$ e determine a aceleração máxima durante o intervalo de 30 s. O carro parte do repouso na posição $s = 0$.

**12.50.** O gráfico $v$–$t$ mostra o movimento de um carro em movimento retilíneo. Desenhe o gráfico $s$–$t$ e determine a velocidade média e a distância percorrida no intervalo de tempo de 30 s. O carro parte do repouso na posição $s = 0$.




**Problemas 12.49/50**

**12.51.** Um carro trafega numa estrada retilínea a uma velocidade variável, como indica a figura. Determine a distância total que ele percorre até parar no instante $t$ = 48 s. Desenhe também os gráficos $s$–$t$ e $a$–$t$.

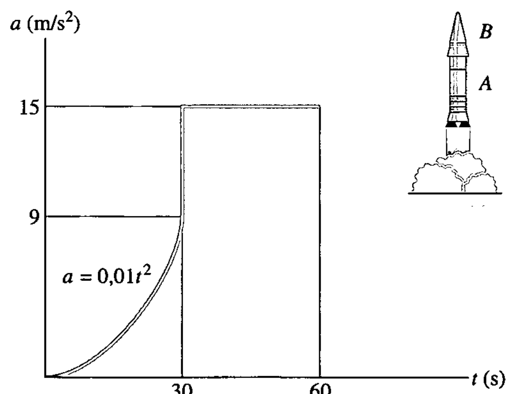



**Problema 12.51**

***12.52.** De um elevador de carga que está subindo, um homem deixa cair acidentalmente um pacote, quando está a 100 pés do solo. Se o elevador sobe com uma velocidade constante de 4 pés/s, determine a que altura estará o elevador no instante em que o pacote atingir o solo. Desenhe o gráfico $v$–$t$ para o tempo em que o pacote está em queda livre. Suponha que o pacote foi solto com a mesma velocidade do elevador.

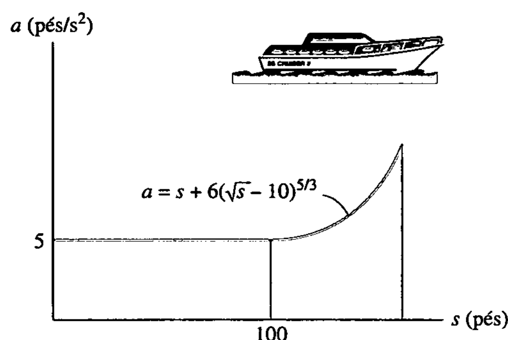
**12.53.** Dois carros emparelhados partem do repouso e deslocam-se numa pista retilínea. O carro $A$ acelera a 4 m/s$^2$ por 10 s e então mantém velocidade constante. O carro $B$ acelera a 5 m/s$^2$ até atingir uma velocidade de 25 m/s e a partir de então mantém essa velocidade. Construa os gráficos $a$–$t$, $v$–$t$ e $s$–$t$ para cada um dos carros até $t$ = 5 s. Qual é a distância entre os carros quando $t$ = 15 s?

**12.54.** Dispara-se verticalmente um foguete de dois estágios a partir do repouso em $s = 0$, com a aceleração mostrada no gráfico. Após 30 s o primeiro estágio se desprende e o segundo é acionado. Desenhe os gráficos $v$–$t$ e $s$–$t$ que descrevem o movimento para $0 \leq t \leq 60$ s.



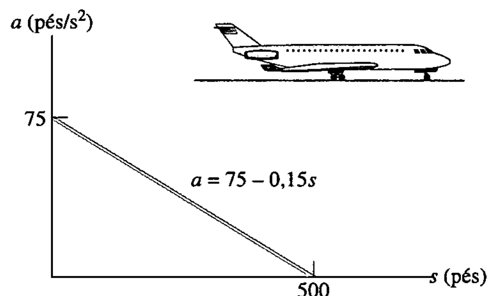

**Problema 12.54**

**■12.55.** A figura mostra o gráfico $a$–$s$ para um barco que se move numa trajetória retilínea. Se o barco parte de $s = 0$ com velocidade $v = 0$, determine sua velocidade em $s$ = 75 pés e $s$ = 125 pés. Use a regra de Simpson com $n$ = 100 para calcular $v$ em $s$ = 125 pés.



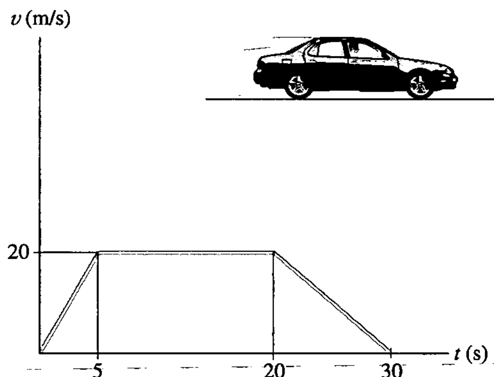

**Problema 12.55**

***12.56.** O avião a jato, que parte do repouso em $s = 0$, está submetido à aceleração mostrada na figura. Determine a velocidade do avião após um percurso de 200 pés. Quanto tempo é gasto nesse percurso?



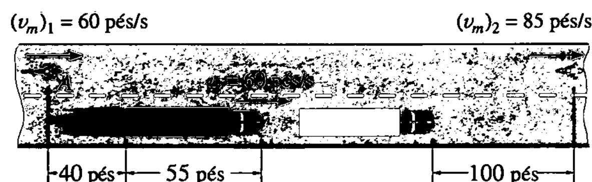

**Problema 12.56**

**12.57.** A figura mostra o gráfico $v$–$t$ para um carro em movimento retilíneo. Desenhe os gráficos $s$–$t$ e $a$–$t$ para o movimento.



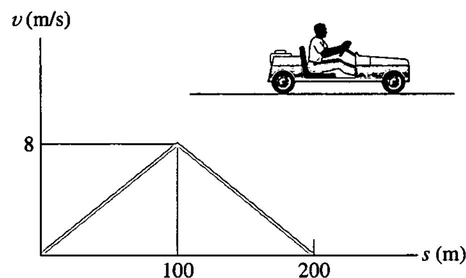

**Problema 12.57**

**12.58.** Um motociclista situado em $A$ está viajando a 60 pés/s quando decide ultrapassar o caminhão $T$ que trafega com velocidade constante de 60 pés/s. Para fazer a ultrapassagem, o motorista acelera a 6 pés/s$^2$ até atingir uma velocidade máxima de 85 pés/s. Supondo que ele mantenha essa velocidade, determine o tempo necessário para ele alcançar um ponto localizado 100 pés à frente do caminhão. Desenhe os gráficos $v$–$t$ e $s$–$t$ para a motocicleta durante esse tempo.



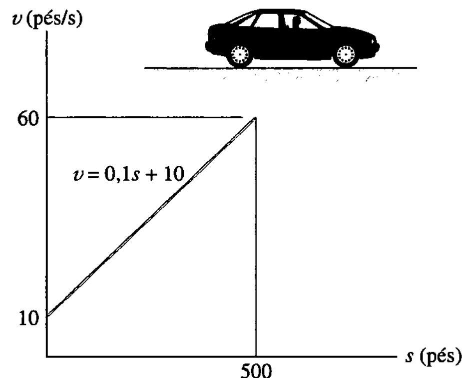

**Problema 12.58**

**12.59.** O gráfico $v$–$s$ de um cart em movimento retilíneo está mostrado na figura. Determine a aceleração para $s$ = 50 m e para $s$ = 150 m. Desenhe o gráfico $a$–$s$.



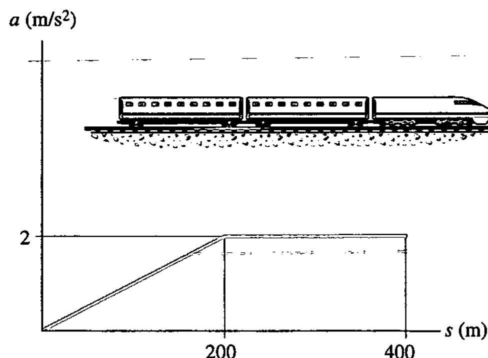

**Problema 12.59**

***12.60.** A figura mostra o gráfico $v$–$s$ para o carro durante os primeiros 500 pés. Construa o gráfico $a$–$s$ para $0 \leq s \leq 500$ pés. Quanto tempo o carro gasta para percorrer a distância de 500 pés? O carro parte de $s = 0$ no instante $t = 0$.



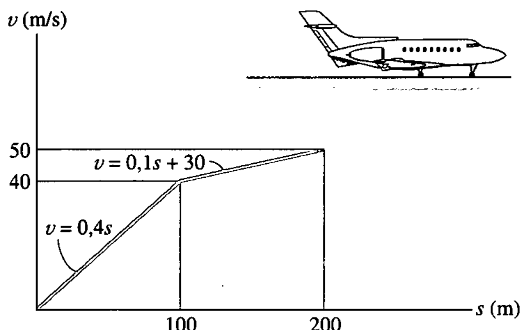

**Problema 12.60**

**12.61.** O gráfico $a$–$s$ mostra o movimento retilíneo de um trem nos primeiros 400 m. Desenhe o gráfico $v$–$s$, considerando $v = 0$ para $s = 0$.



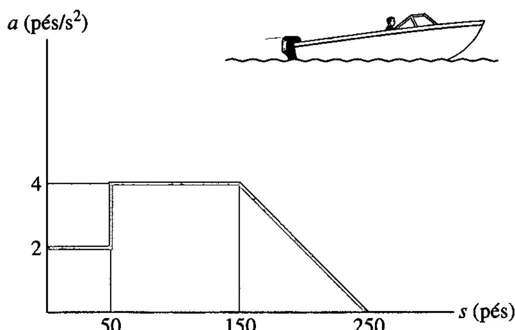

**Problema 12.61**

**12.62.** A figura mostra o gráfico $v$–$s$ para um avião em movimento retilíneo na pista de decolagem. Determine a aceleração do avião para $s = 100$ m e $s = 150$ m. Desenhe o gráfico $a$–$s$.



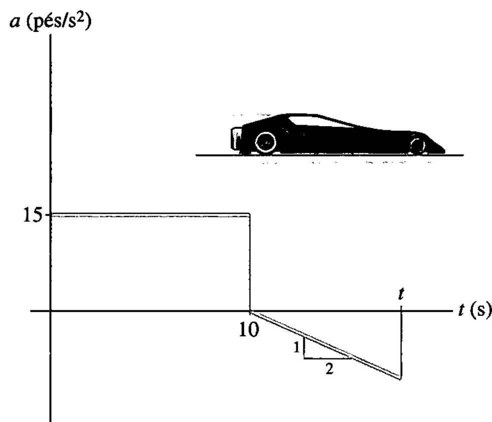

**Problema 12.62**

**12.63.** Partindo do repouso em $s = 0$, uma lancha desloca-se em linha reta com a aceleração mostrada no gráfico $a$–$s$. Determine a velocidade da lancha para $s = 40$, 90 e 200 pés.



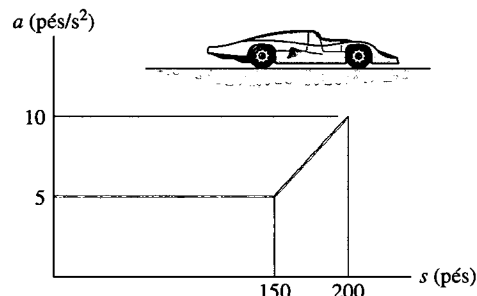

**Problema 12.63**

***12.64.** Um carro de prova parte do repouso e é submetido a uma aceleração constante $a_c = 15$ pés/s$^2$ para $0 \leq t <$ 10 s. A aplicação dos freios provoca uma desaceleração (como mostrado na figura) até a sua paralisação. Determine a velocidade máxima do carro e o instante $t$ em que ele pára.




**Problema 12.64**

**12.65.** Determinou-se experimentalmente o gráfico $a$–$s$ para um carro de corrida em movimento retilíneo. Se o carro partiu do repouso em $s = 0$, determine sua velocidade para $s =$ 50 pés, 150 pés e 200 pés.




**Problema 12.65**

# 12.4 MOVIMENTO CURVILÍNEO GERAL

Denomina-se *movimento curvilíneo* todo movimento de um ponto material cuja trajetória é uma curva. Uma vez que a trajetória é freqüentemente descrita em três dimensões, utiliza-se análise vetorial para definir a posição, a velocidade e a aceleração do ponto.[3] Nesta seção são discutidos os aspectos gerais do movimento e em seções subseqüentes serão introduzidos três tipos de sistema de coordenadas freqüentemente utilizados na análise de movimento curvilíneo.

*Posição.* Consideremos um ponto material localizado num ponto $P$ de uma curva definida pela função de trajetória $s$ (Figura 12.16$a$). A posição do ponto material, medida a partir de um ponto fixo $O$, será determinada pelo *vetor de posição* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Esse vetor é uma função do tempo, pois, em geral, módulo, direção e sentido modificam-se à medida que o ponto material se move ao longo da curva.

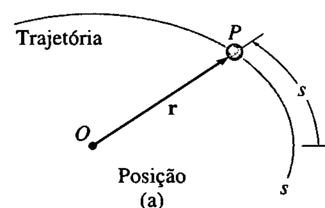
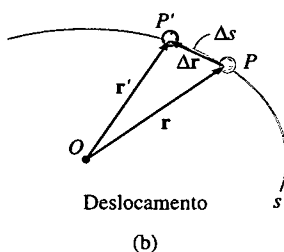


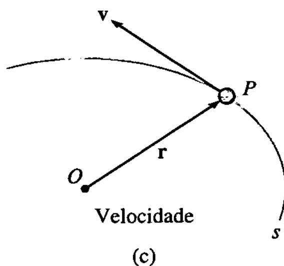

**Figura 12.16**

[3] Há um resumo de alguns conceitos importantes da análise vetorial no Apêndice C.



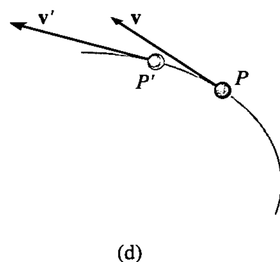
Deslocamento

(b)

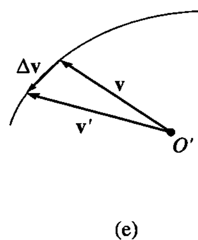


Velocidade

(c)



(d)



(e)

**Figura 12.16**

***Deslocamento.*** Suponha que durante um pequeno intervalo de tempo $\Delta t$ o ponto percorre uma distância $\Delta s$ ao longo da curva, indo de $P$ para uma nova posição $P'$, definida por $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, (Figura 12.16*b*). O *deslocamento* $\Delta\mathbf{r}$ representa a mudança da posição do ponto e é determinada pela subtração vetorial $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$.

***Velocidade.*** Durante o tempo $\Delta t$, a *velocidade média* do ponto material é definida como

$$\mathbf{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

A *velocidade instantânea* é definida a partir dessa equação tomando-se $\Delta t \to 0$. Conseqüentemente, a direção de $\Delta\mathbf{r}$ *tende* para a da *tangente* à curva no ponto $P$. Assim, $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{r}/\Delta t)$ ou

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}} \qquad (12.7)$$

Uma vez que $d\mathbf{r}$ é tangente à trajetória em $P$, a *direção* de $\mathbf{v}$ também é a da *tangente à trajetória* em $P$ (Figura 12.16*c*). O *módulo* de $\mathbf{v}$, que denominaremos *velocidade escalar*, pode ser obtido observando-se que o módulo do deslocamento $\Delta\mathbf{r}$ é o comprimento do segmento de reta de $P$ a $P'$ (Figura 12.16*b*). Observando também que este comprimento, $\Delta r$, aproxima-se do comprimento de arco $\Delta s$, no limite de $\Delta t \to 0$, temos $v = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta r/\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta s/\Delta t)$ ou

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}} \qquad (12.8)$$

Logo a *velocidade escalar* pode ser obtida pela derivação da função de trajetória ou posição $s$* em relação ao tempo.

Quando não houver perigo de confusão, muitas vezes para simplificarmos a linguagem usaremos o termo velocidade para designar tanto o vetor velocidade quanto a velocidade escalar. Por exemplo, se for dito que a velocidade de um carro é de 90 km/h, estaremos tratando da velocidade escalar; por outro lado, se dissermos que a velocidade com que a água sai de uma mangueira de jardim forma um ângulo de 35° com a horizontal, estaremos nos referindo ao vetor velocidade.

***Aceleração.*** Se o ponto material tem uma velocidade $\mathbf{v}$ num dado instante $t$ e uma velocidade $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ em $t + \Delta t$ (Figura 12.16*d*), então a *aceleração média* do ponto material no intervalo de tempo $\Delta t$ é

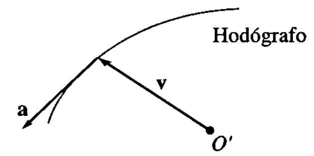
$$\mathbf{a}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

onde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. Para se estudar essa taxa temporal de variação, os dois vetores velocidade da Figura 12.16*d* são desenhados na Figura 12.16*e* de modo que suas origens estejam num ponto fixo $O'$ e suas extremidades toquem pontos de uma curva denominada *hodógrafo*. Essa curva, quando construída, é o lugar geométrico das extremidades do vetor velocidade, assim como a trajetória é o lugar geométrico das extremidades do vetor de posição (Figura 12.16*a*).

* Se admitirmos que o sentido do movimento do ponto material sobre a curva pode se inverter, a derivada $ds/dt$ poderá ter sinal algébrico positivo ou negativo. Nesse caso mais geral, o *módulo da velocidade* coincidirá com o *módulo* (ou *valor absoluto*) da *velocidade escalar* ($v = ds/dt$) (N. do T.).

Para obtermos a *aceleração instantânea*, façamos $\Delta t \to 0$ na equação anterior. Nesse limite, $\Delta\mathbf{v}$ se aproxima da *tangente ao hodógrafo*, logo $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{v}/\Delta t)$ ou

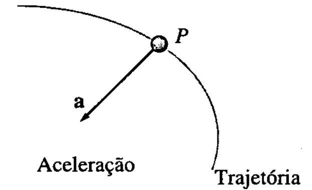
$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \qquad (12.9)$$




(f)

Substituindo a Equação 12.7 na Equação 12.9, temos também

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$




(g)

**Figura 12.16**

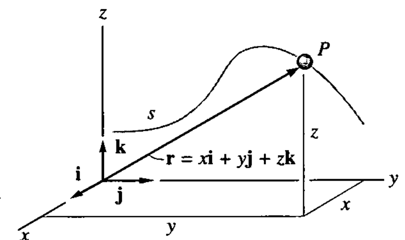
Pela definição de derivada, **a** é *tangente ao hodógrafo* (Figura 12.16*f*), portanto **a** *não é, em geral, tangente à trajetória* do ponto material (Figura 12.16*g*). Para aclarar este ponto, observe que $\Delta\mathbf{v}$ e conseqüentemente **a** devem dar conta de alterações tanto em *módulo* quanto em *direção* e *sentido* da velocidade **v**, à medida que o ponto material se move de $P$ a $P'$ (Figura12.16*d*). O vetor aceleração **a**, como uma medida de variação do vetor velocidade **v**, terá um componente tangente à trajetória quando houver um aumento ou decréscimo no 'comprimento' do vetor **v** (movimento tornando-se mais rápido ou mais lento) e terá sempre um componente apontando para o 'lado interno' ou melhor, o 'lado côncavo' da trajetória para dar conta da mudança de direção do vetor velocidade. Devido a esse componente, a aceleração *não* é tangente à trajetória curva. Observemos também que fazendo a correspondência entre **r**, **v** e *trajetória* de um lado, com **v**, **a** e *hodógrafo* de outro, podemos concluir que **v** é sempre tangente à *trajetória*, enquanto **a** é sempre tangente ao *hodógrafo*.

## 12.5 MOVIMENTO CURVILÍNEO: COMPONENTES CARTESIANOS

Muitas vezes, o movimento de um ponto material pode ser convenientemente descrito utilizando-se um sistema de referência fixo $x$, $y$, $z$.

***Posição.*** Se num dado instante o ponto material $P$ está no ponto $(x, y, z)$ da trajetória curvilínea $s$ (Figura 12.17*a*), sua localização é então definida pelo *vetor de posição*

$$\boxed{\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}} \qquad (12.10)$$




Posição

(a)

**Figura 12.17**

Por causa do movimento do ponto material e da forma da trajetória, os componentes $x$, $y$, $z$ de **r** são, em geral, funções do tempo; isto é, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, de modo que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

De acordo com a discussão presente no Apêndice, o módulo de **r** é *sempre positivo* e é definido na Equação C-3 como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A *direção* e o *sentido* de **r** são especificados pelos componentes do vetor unitário $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$.

***Velocidade.*** A primeira derivada temporal de **r** fornece a velocidade do ponto material. Logo:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{k})$$

Ao se tomar essa derivada, é necessário levar em conta as variações de módulo, direção e sentido de cada componente do vetor. A derivada do componente **i** de **v** é, portanto,

$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

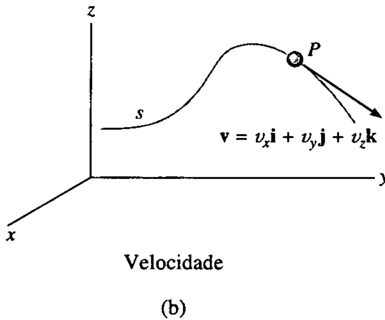
O segundo termo do segundo membro dessa equação é nulo, pois o sistema de referência $x$, $y$, $z$ é fixo, e, portanto, o vetor *unitário* **i** é constante no tempo. A derivação dos outros dois componentes segue de maneira semelhante, resultando em

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}} \qquad (12.11)$$

onde

$$\boxed{v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z}} \qquad (12.12)$$

A notação com 'ponto' — $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ — representa a primeira derivada temporal das equações paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, respectivamente.



Velocidade

(b)

O *módulo* da velocidade é

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

e sua *direção* e *sentido* são especificados pelo vetor unitário $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$. A direção de $\mathbf{u}v$ é *sempre tangente à trajetória*, como mostrado na Figura 12.17*b*.

***Aceleração.*** A aceleração do ponto é obtida tomando-se a primeira derivada temporal da Equação 12.11 (ou a segunda derivada temporal da Equação 12.10). Usando pontos para representar as derivadas dos componentes, temos

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}} \qquad (12.13)$$

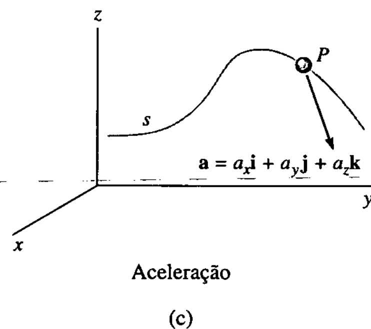
onde

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned}} \qquad (12.14)$$

Aqui $a_x$, $a_y$, $a_z$ representam, respectivamente, as primeiras derivadas temporais das funções $v_x = v_x(t)$, $v_y = v_y(t)$, $v_z = v_z(t)$ ou as segundas derivadas temporais das funções $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

O módulo da aceleração é

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Aceleração

(c)

**Figura 12.17**

e sua direção e sem sentido são especificados pelo vetor unitário $\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/a$. Uma vez que **a** representa a taxa temporal de *variação* da velocidade, a aceleração *não é*, em geral, tangente à trajetória (Figura 12.17*c*).

## PONTOS IMPORTANTES

- No movimento curvilíneo podem ocorrer alterações de *módulo*, *direção* e *sentido* dos vetores de posição, velocidade e aceleração.
- O vetor velocidade é sempre *tangente* à trajetória.
- De um modo geral, o vetor aceleração *não* é tangente à trajetória, mas é sempre tangente ao hodógrafo.
- Se coordenadas cartesianas são utilizadas para a descrição do movimento, então os componentes dos vetores ao longo de cada eixo coordenado obviamente não variam em direção. Somente o módulo e o sentido (sinal algébrico) poderão variar.

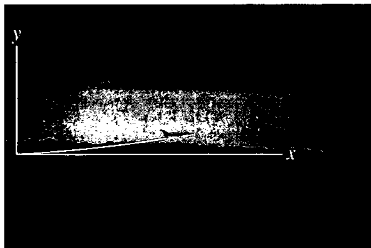
## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

### *Sistema de Coordenadas*

- Na solução de muitos problemas é conveniente expressar os vetores que descrevem o movimento em termos de seus componentes cartesianos $x$, $y$, $z$.

### *Quantidades Cinemáticas*

- Uma vez que o *movimento retilíneo* ocorre ao longo de *cada* eixo coordenado, o movimento de cada componente pode ser encontrado usando-se $v = ds/dt$ e $a = dv/dt$; em casos em que o movimento não é expresso como função do tempo, pode-se usar a equação $a\,ds = v\,dv$.
- Uma vez determinados os componentes $x, y, z$ de **v** e **a**, os módulos desses vetores podem ser calculados usando-se o teorema de Pitágoras (Equação C-3). Suas direções e sentidos, por sua vez, são determinados pelos componentes dos respectivos vetores unitários (equações C-4 e C-5).




*À medida que o avião decola, sua trajetória poderá ser estabelecida se forem conhecidas sua posição horizontal $x = x(t)$ e sua posição vertical ou altitude, $y = y(t)$. Com as informações fornecidas pelo equipamento de navegação, pode-se conhecer a trajetória e determinar pelo cálculo das derivadas temporais, em qualquer instante, a velocidade e a aceleração da aeronave.*

## EXEMPLO 12.9

Para cada instante a posição horizontal do balão meteorológico mostrado na Figura12.18*a* é definida por $x = (8t)$ pés, onde $t$ é dado em segundos. Se a equação da trajetória é $y = x^2/10$, determine (*a*) a distância do balão à estação em $A$ em $t = 2$ s, (*b*) o módulo, a direção e o sentido da velocidade em $t = 2$ s e (*c*) o módulo, a direção e o sentido da aceleração em $t = 2$ s.

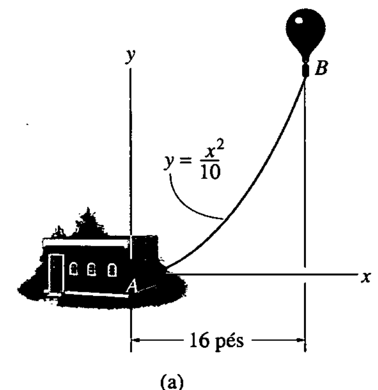



**Figura 12.18**

### SOLUÇÃO

***Posição.*** Quando $t = 2$ s, $x = 8(2) = 16$ pés; assim:

$$y = (16)2/10 = 25{,}6 \text{ pés}$$

A distância entre $A$ e $B$ é, portanto,

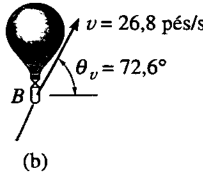
$$r = \sqrt{(16)^2 + (25{,}6)^2} = 30{,}2 \text{ pés} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

***Velocidade.*** Usando-se as equações 12.12 e aplicando-se a regra da cadeia para derivadas, os componentes da velocidade quando $t = 2$ s são

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ pés/s} \rightarrow$$
$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(x^2/10) = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25{,}6 \text{ pés/s} \uparrow$$

Quando $t = 2$ s, o módulo da velocidade é, portanto,

$$v = \sqrt{(8)^2 + (25{,}6)^2} = 26{,}8 \text{ pés/s}$$ ***Resposta***



(b)

A direção é tangente à trajetória (Figura 12.18*b*), com

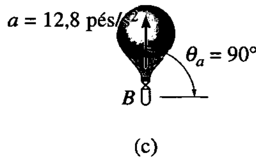
$$\theta_v = \text{tg}^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \text{tg}^{-1}\frac{25{,}6}{8} = 72{,}6°$$ ***Resposta***

***Aceleração.*** Os componentes da aceleração são determinados pela aplicacão das equações 12.14 e da regra da cadeia, observando-se que $\ddot{x} = d^2(8t)/dt^2 = 0$. Temos então

$$a_x = \dot{v}_x = 0$$
$$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(2x\dot{x}/10) = 2(\dot{x})\dot{x}/10 + 2x(\ddot{x})/10$$
$$= 2(8)^2/10 + 2(16)(0)/10 = 12{,}8 \text{ pés/s}^2 \uparrow$$

Logo:

$$a = \sqrt{(0)^2 + (12{,}8)^2} = 12{,}8 \text{ pés/s}^2$$ ***Resposta***



(c)

**Figura 12.18**

A direção e o sentido de **a** são especificados pela Figura 12.18*c* com

$$\theta_a = \text{tg}^{-1}\frac{12{,}8}{0} = 90°$$ ***Resposta***

*Observação:* Também é possível obter $v_y$ e $a_y$ expressando-se $y = f(t) = (8t)^2/10 = 6{,}4t^2$ para, em seguida, calcular derivadas temporais sucessivas.

## EXEMPLO 12.10

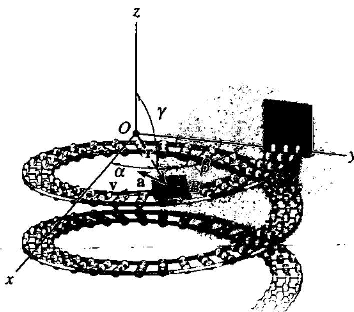



**Figura 12.19**

O movimento de uma caixa $B$ transportada por uma esteira helicoidal (Figura 12.19) é definido pelo vetor de posição $\mathbf{r} = [0{,}5 \text{ sen}(2t)\mathbf{i} + 0{,}5 \cos(2t)\mathbf{j} - 0{,}2t\mathbf{k}]$ m, onde $t$ é dado em segundos e os argumentos das funções trigonométricas, em radianos ($\pi$ rad = 180°). Determine a posição da caixa quando $t = 0{,}75$ s. Calcule também os módulos da velocidade e da aceleração da caixa nesse mesmo instante.

### SOLUÇÃO

***Posição.*** Calculando **r** para $t = 0{,}75$ s, obtemos

$$\mathbf{r}|_{t=0{,}75\text{ s}} = \{0{,}5 \text{ sen}(1{,}5 \text{ rad})\mathbf{i} + 0{,}5 \cos(1{,}5 \text{ rad})\mathbf{j} - 0{,}2(0{,}75)\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$= \{0{,}499\mathbf{i} + 0{,}0354\mathbf{j} - 0{,}150\mathbf{k}\} \text{ m}$$ ***Resposta***

A distância da caixa à origem $O$ é

$$r = \sqrt{(0{,}499)^2 + (0{,}0354)^2 + (-0{,}150)^2} = 0{,}522 \text{ m}$$ ***Resposta***

A direção e o sentido de **r** são obtidos dos componentes do vetor unitário

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{0{,}499}{0{,}522}\mathbf{i} + \frac{0{,}0354}{0{,}522}\mathbf{j} - \frac{0{,}150}{0{,}522}\mathbf{k}$$

$$= 0{,}955\mathbf{i} + 0{,}0678\mathbf{j} - 0{,}287\mathbf{k}$$

Logo, os ângulos diretores coordenados $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (Figura 12.19) são

$$\alpha = \cos^{-1}(0{,}955) = 17{,}2° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\beta = \cos^{-1}(0{,}0678) = 86{,}1° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}(-0{,}287) = 107° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

*Velocidade.* A velocidade é definida por

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[0{,}5\,\text{sen}(2t)\mathbf{i} + 0{,}5\cos(2t)\mathbf{j} - 0{,}2t\mathbf{k}]$$

$$= \{1\cos(2t)\mathbf{i} - 1\,\text{sen}(2t)\mathbf{j} - 0{,}2\mathbf{k}\}\ \text{m/s}$$

Logo, quando $t = 0{,}75$ s, o módulo da velocidade é

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$= \sqrt{[1\cos(1{,}5\text{ rad})]^2 + [-1\,\text{sen}(1{,}5\text{ rad})]^2 + (-0{,}2)^2}$$

$$= 1{,}02\text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A velocidade é tangente à trajetória, como indicado na Figura 12.19. Seus ângulos relativos aos eixos coordenados podem ser determinados a partir de $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$.

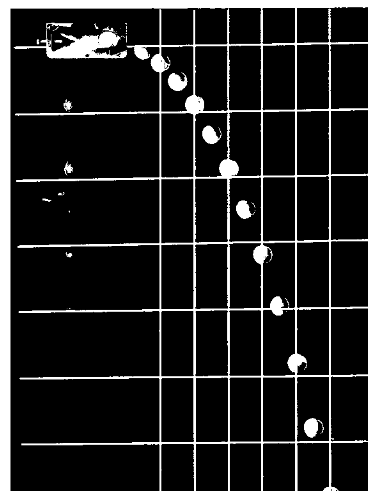
***Aceleração.*** Como é mostrado na Figura 12.19, a aceleração **a** da caixa *não* é tangente à trajetória. Mostre que

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \{-2\,\text{sen}(2t)\mathbf{i} - 2\cos(2t)\mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2$$

Para $t = 0{,}75$ s, $a = 2$ m/s$^2$. ***Resposta***

# 12.6 MOVIMENTO DE UM PROJÉTIL

O movimento de um projétil em vôo livre é estudado em termos de componentes cartesianos, pois sua aceleração mantém-se na direção vertical. Para ilustrar a análise cinemática, considere um projétil lançado de um ponto ($x_0$, $y_0$), como mostrado na Figura 12.20. A trajetória é definida no plano $x$–$y$, de modo que os componentes da velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ são $(\mathbf{v}_0)_x$ e $(\mathbf{v}_0)_y$. Quando se despreza a resistência do ar, a única força que age no projétil é o seu peso, que provoca uma *aceleração constante dirigida para baixo*, de módulo $a_c$, aproximadamente igual a $g = 9{,}81$ m/s$^2$ ou $g = 32{,}2$ pés/s$^2$.[4]



*Os quadros na seqüência mostrada foram tomados após intervalos de tempo iguais. A bola mais escura foi abandonada do repouso, enquanto à mais clara comunicou-se na partida uma velocidade horizontal. Observemos que as duas bolas têm a mesma aceleração vertical para baixo, uma vez que elas se mantêm à mesma altura em qualquer instante. Essa aceleração vertical produz um aumento na diferença entre elevações sucessivas. Observemos também que a distância horizontal entre fotos sucessivas da bola mais clara é constante, pois a velocidade na direção horizontal permanece constante.*

[4] Supõe-se que o campo gravitacional terrestre não varia com a altitude.



*O cascalho lançado de uma esteira transportadora segue uma trajetória que pode ser prevista usando-se as equações para aceleração constante. Dessa forma, pode-se determinar a localização do ápice da pilha de cascalho. Usam-se coordenadas cartesianas na análise, uma vez que a aceleração é vertical.*

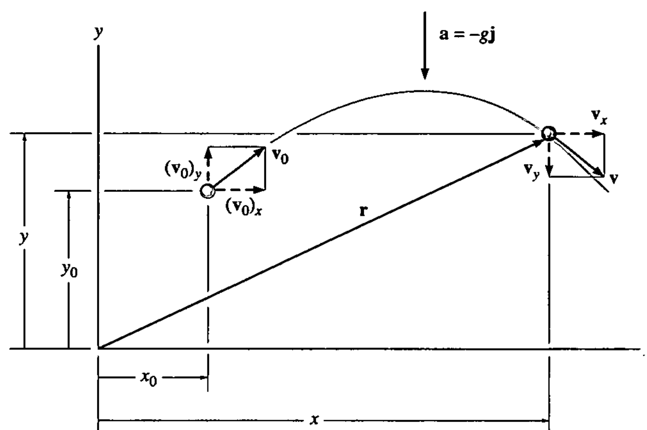



**Figura 12.20**

***Movimento Horizontal.*** Uma vez que $a_x = 0$, aplicando as equações para aceleração constante (12.4 a 12.6), obtemos

$$(\xrightarrow{+})\ v = v_0 + a_c t; \qquad v_x = (v_0)_x$$

$$(\xrightarrow{+})\ x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_c t^2; \qquad x = x_0 + (v_0)_x t$$

$$(\xrightarrow{+})\ v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0); \qquad v_x = (v_0)_x$$

A primeira e a última das equações indicam que *o componente horizontal da velocidade permanece constante durante o movimento.*

***Movimento Vertical.*** Como o eixo $y$ positivo é orientado para cima, $a_y = -g$. Aplicando as equações 12.4 a 12.6, temos

$$(+\uparrow)\ v = v_0 + a_c t; \qquad v_y = (v_0)_y - gt$$

$$(+\uparrow)\ y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_c t^2; \qquad y = y_0 + (v_0)_y t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$(+\uparrow)\ v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0); \qquad v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$$

Observemos que a última equação pode ser obtida pela eliminação do tempo $t$ entre as duas primeiras equações, portanto *somente duas das três equações são independentes.*

Para concluir, problemas que envolvem o movimento de um projétil podem ter no máximo três incógnitas, pois se pode escrever apenas três equações independentes; isto é, *uma equação na direção horizontal e duas na vertical.* Uma vez obtidos os componentes $\mathbf{v}_x$ e $\mathbf{v}_y$, a velocidade resultante $\mathbf{v}$, que *sempre é tangente* à trajetória, é definida pela *soma vetorial*, como é mostrado na Figura 12.20.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Problemas sobre movimento de vôo livre de um projétil podem ser resolvidos usando-se o seguinte procedimento.

***Sistema de Coordenadas***

- Estabeleça um sistema de eixos fixos de coordenadas $x$ e $y$ e esboce a trajetória do ponto material. Entre quaisquer *dois pontos* especifique os dados do problema e as *três incógnitas*. Em todos os casos, a aceleração da gravidade é orientada para baixo. As velocidades inicial e final devem ser representadas em termos de seus componentes $x$ e $y$.
- Observe que os componentes positivos e negativos da posição, velocidade e aceleração devem estar sempre de acordo com as orientações dos eixos coordenados.

**PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (CONTINUAÇÃO)**

***Equações cinemáticas***

- Dependendo dos dados fornecidos e do que se deseja determinar, deve-se fazer uma escolha de modo que três das quatro equações apresentadas a seguir devem ser aplicadas entre dois pontos da trajetória, para obter a solução mais direta para o problema.

***Movimento Horizontal***

- A *velocidade* na direção horizontal $x$ é *constante*, isto é, $(v_x) = (v_0)_x$ e

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

***Movimento Vertical***

- Na direção vertical $y$ somente duas das seguintes três equações podem usadas na solução.

$$v_y = (v_0)_y + a_c t$$

$$y = y_0 + (v_0)_y t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$

- Por exemplo, se a velocidade final $v_y$ não for necessária, então a primeira e a terceira dessas equações (para $y$) não serão úteis.

## EXEMPLO 12.11

Um saquinho sai de uma calha (Figura 12.21) com velocidade horizontal de 12 m/s. Se a saída da calha está a 6 m de altura, determine o tempo necessário para o saquinho atingir o piso e o alcance $R$ onde os saquinhos se empilham.

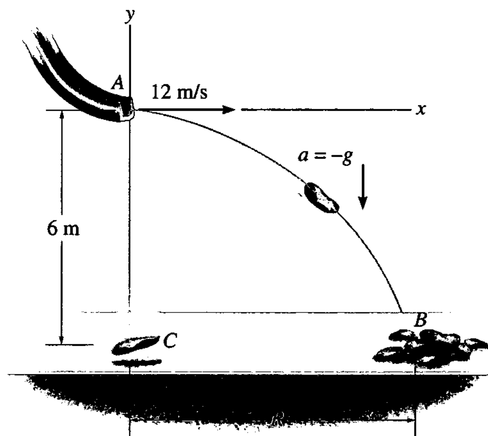



**Figura 12.21**

## SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Escolhe-se o início da trajetória em $A$ como origem do sistema de coordenadas. Os componentes da velocidade inicial de um saquinho são $(v_A)_x = 12$ m/s e $(v_A)_y = 0$. Entre os pontos $A$ e $B$ a aceleração é $a_y = -9{,}81$ m/s$^2$. Como $(v_B)_x = (v_A)_x = 12$ m/s, as três incógnitas são $(v_B)_y$, $R$ e o tempo de vôo $t_{AB}$. Não é necessário determinar $(v_B)_y$.

***Movimento Vertical.*** A distância vertical de $A$ até $B$ é conhecida e, portanto, podemos obter uma solução direta para $t_{AB}$ usando as equações

$$(+\uparrow) \qquad y = y_0 + (v_0)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2}a_c t_{AB}^2$$
$$-6\text{ m} = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-9{,}81\text{ m/s}^2)t_{AB}^2$$
$$t_{AB} = 1{,}11\text{ s.}$$ ***Resposta***

Esse cálculo também nos informa que, se um saquinho *inicialmente em repouso* fosse abandonado em $A$, ele gastaria o mesmo tempo para atingir o piso em $C$.

***Movimento horizontal.*** Uma vez que o tempo de vôo já foi calculado, $R$ pode ser determinado como se segue:

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad x = x_0 + (v_0)_x t_{AB}$$
$$R = 0 + 12\text{ m/s}\,(1{,}11\text{ s})$$
$$R = 13{,}3\text{ m}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 12.12

Um triturador foi projetado para ejetar lascas a uma velocidade $v_O = 25$ pés/s, como mostrado na Figura 12.22. Se o tubo é inclinado de 30° em relação à horizontal, determine a altura $h$ da pilha onde as lascas se depositam. $A$ distância horizontal de $A$ à saída do tubo em $O$ é de 20 pés.

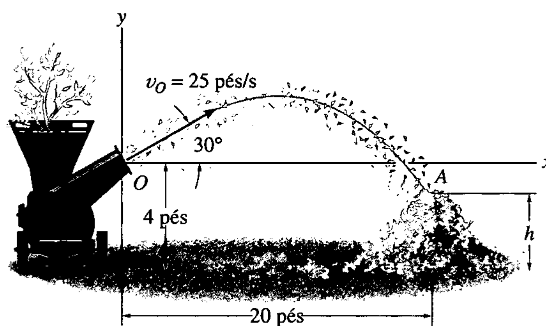



**Figura 12.22**

### SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Quando analisamos o movimento entre os pontos $O$ e $A$, as três incógnitas são a altura $h$, o tempo de vôo $t_{OA}$ e o componente vertical da velocidade $(v_A)_y$. (Observemos que $(v_A)_x = (v_O)_x$.) Com a origem do sistema de coordenadas em $O$, os componentes da velocidade inicial de uma lasca são

$$(v_O)_x = (25 \cos 30°)\text{ pés/s} = 21{,}65\text{ pés/s} \rightarrow$$

$$(v_O)_y = (25 \text{ sen } 30°)\text{ pés/s} = 12{,}5\text{ pés/s} \uparrow$$

Além disso, $(v_A)_x = (v_O)_x = 21{,}65$ pés/s e $a_y = -32{,}2$ pés/s. Uma vez que não precisamos determinar $(v_A)_y$, temos:

***Movimento Horizontal.***

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad x_A = x_O + (v_O)_x t_{OA}$$
$$20\text{ pés} = 0 + (21{,}65\text{ pés/s})\,t_{OA}$$
$$t_{OA} = 0{,}9238\text{ s}$$

***Movimento Vertical.*** Relacionando $t_{OA}$ às elevações inicial e final de uma lasca, temos

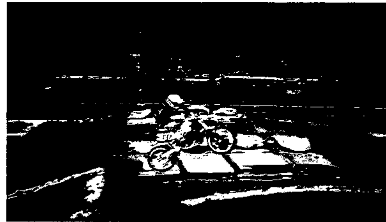
$$(+\uparrow) \qquad y_A = y_O + (v_O)_y t_{OA} + \tfrac{1}{2}a_c t_{OA}^2$$

$$(h - 4 \text{ pés}) = 0 + (12{,}5 \text{ pés/s})(0{,}9238 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-32{,}2 \text{ pés/s}^2)(0{,}9238 \text{ s})^2$$

$$h = 1{,}81 \text{ pés}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 12.13

Uma pista para competições foi preparada para que os pilotos sejam projetados a uma inclinação de 30°, de uma altura de 1 m. Durante uma corrida observou-se que o piloto mostrado na Figura 12.23*a* permaneceu no ar por 1,5 s. Determine a velocidade com que ele deixou a rampa, a distância horizontal percorrida até atingir o solo e a altura máxima alcançada. Despreze as dimensões da motocicleta e do piloto.



(a)

## SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Como mostrado na Figura 12.23*b*, a origem do sistema de coordenadas foi estabelecida em $A$. Entre os pontos da trajetória $AB$, as três incógnitas são a velocidade inicial $v_A$, o alcance $R$ e o componente vertical da velocidade $v_B$.

***Movimento Vertical.*** Uma vez que o tempo de vôo e a distância vertical entre os extremos da trajetória são conhecidos, podemos determinar $v_A$.

$$(+\uparrow) \qquad (s_B)_y = (s_A)_y + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2}a_c t_{AB}^2$$

$$-1 = 0 + v_A \operatorname{sen} 30° (1{,}5) + \tfrac{1}{2}(-9{,}81)(1{,}5)^2$$

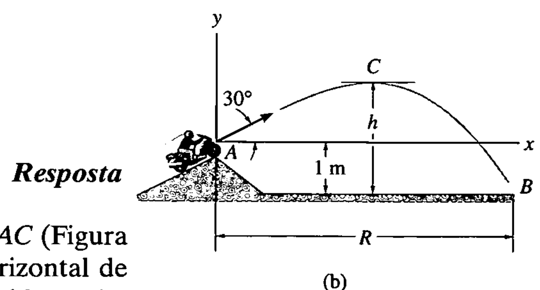
$$v_A = 13{,}38 \text{ m/s} = 13{,}4 \text{ m/s}$$ ***Resposta***

***Movimento Horizontal.*** Agora o alcance $R$ pode ser obtido.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad (s_B)_x = (s_A)_x + (v_A)_x t_{AB}$$

$$R = 0 + 13{,}38 \cos 30° (1{,}5)$$

$$= 17{,}4 \text{ m}$$ ***Resposta***




(b)

**Figura 12.23**

Para obtermos a altura máxima $h$ consideraremos a trajetória $AC$ (Figura 12.23*b*). As três incógnitas são o tempo de vôo, $t_{AC}$, a distância horizontal de $A$ a $C$ e a altura $h$. Na altura máxima $(v_C)_y = 0$ e, como $v_A$ é conhecido, podemos determinar $h$ *diretamente* sem considerar $t_{AC}$ usando a seguinte equação:

$$(v_C)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_c[(s_C)_y - (s_A)_y]$$
$$(0)^2 = (13{,}38 \text{ sen } 30°)^2 + 2\,(-9{,}81)\,[(h - 1) - 0]$$
$$h = 3{,}28 \text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Mostre que a motocicleta atingirá o solo em $B$ com velocidade de componentes

$$(v_B)_x = 11{,}6 \text{ m/s} \rightarrow, \quad (v_B)_y = 8{,}02 \text{ m/s} \downarrow$$

## PROBLEMAS

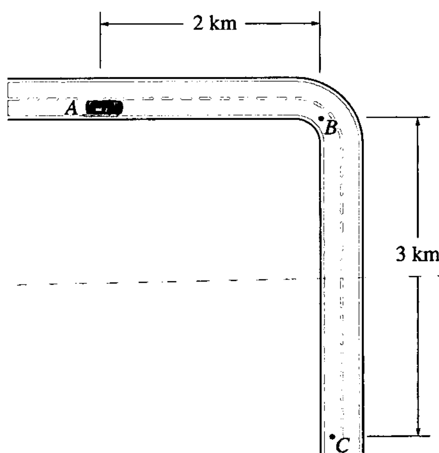
**12.66.** Um ponto material, originalmente localizado em (3 pés, 2 pés, 5 pés), está submetido a uma aceleração $\mathbf{a} = (6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j})$ pés/s. Determine a posição $(x, y, z)$ do ponto material em $t = 1$ s.

**12.67.** A velocidade de um ponto material é dada por $v = \{16t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + (5t + 2)\mathbf{k}\}$ m/s, pés/s, onde $t$ é dado em segundos. Se o ponto está na origem quando $t = 0$, determine o módulo de sua aceleração para $t = 2$ s. Qual é a posição $(x, y, z)$ do ponto nesse instante?

■*12.68. Um ponto material desloca-se com velocidade $\mathbf{v} = \{3\sqrt{t}e^{-0,2t}\mathbf{i} + 4e^{-0,8t^2}\mathbf{j}\}$ m/s, onde $t$ é dado em segundos. Determine o módulo do deslocamento do ponto entre $t = 0$ e $t = 3$ s. Use a regra de Simpson com $n = 100$ para calcular as integrais. Qual é o valor do módulo da aceleração do ponto material quando $t = 2$ s?

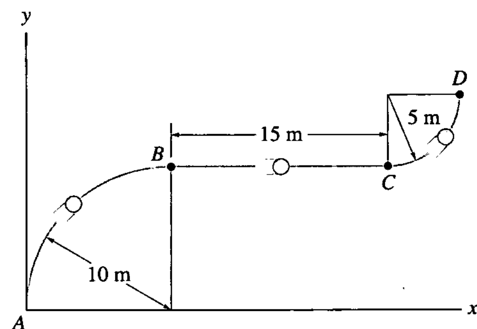
**12.69.** A posição de um ponto material é definida por $\mathbf{r} = [5\cos(2t)\mathbf{i} + 4(\text{sen } 2t)\mathbf{j}]$ m, onde $t$ é dado em segundos e os argumentos das funções trigonométricas, em radianos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do ponto quando $t = 1$ s. Prove que a trajetória é elíptica.

**12.70.** O carro desloca-se de $A$ para $B$ e, então, de $B$ para $C$, como indicado na figura. Determine o módulo de seu deslocamento e a distância percorrida.




**Problema 12.70**

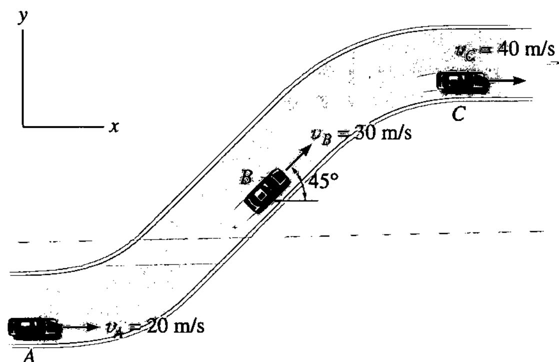
**12.71.** Um ponto material desloca-se de $A$ para $B$ em 2 s, de $B$ para $C$ em 4s e de $C$ para $D$ em 3s. Determine a velocidade média de percurso do ponto durante sua trajetória de $A$ até $C$.




**Problema 12.71**

***12.72.** Um carro viaja 2 km em 5 min no sentido leste, para, em seguida, viajar 4 km em 10 min no sentido oeste. Determine a distância total percorrida e o módulo do deslocamento do carro. Qual é o módulo da velocidade média e da velocidade média de percurso?

**12.73.** Um carro viaja em trechos retos de uma estrada com as velocidades indicadas na figura, quando passa pelos pontos $A$, $B$ e $C$. Se ele gasta 3 s para ir de $A$ para $B$ e 5 s para ir de $B$ para $C$, determine a aceleração média entre os pontos $A$ e $B$ e entre $A$ e $C$.



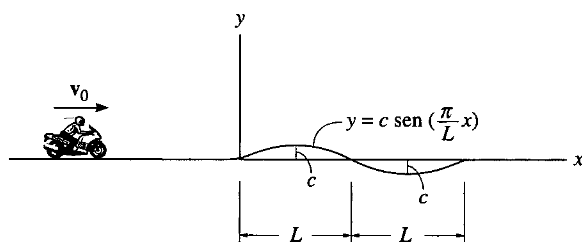

**Problema 12.73**

**12.74.** Um ponto material move-se ao longo da curva $y = e^{2x}$, com uma velocidade constante de módulo $v = 4$ pés/s. Determine os componentes $x$ e $y$ da velocidade do ponto quando ele está em $y = 5$ pés.

**12.75.** A trajetória de um ponto material é definida por $y^2 = 4kx$, e o componente da velocidade na direção $y$ é $v_y = ct$, onde $k$ e $c$ são constantes. Determine os componentes cartesianos $x$ e $y$ da aceleração.

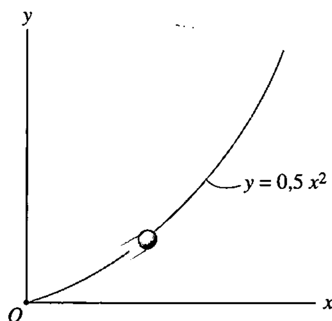
***12.76.** Um ponto material se move ao longo da curva $y = x - (x^2/400)$, onde $x$ e $y$ são expressos em pés. Se o componente $x$ da velocidade é $v_x = 2$ pés/s e se mantém constante, determine os módulos da velocidade e da aceleração quando $x = 20$ pés.

**12.77.** A moto viaja com velocidade de módulo constante $v_0$ ao longo de uma trajetória que apresenta um trecho na forma de uma senóide. Determine os componentes cartesianos da velocidade em qualquer ponto do trecho senoidal.




**Problema 12.77**

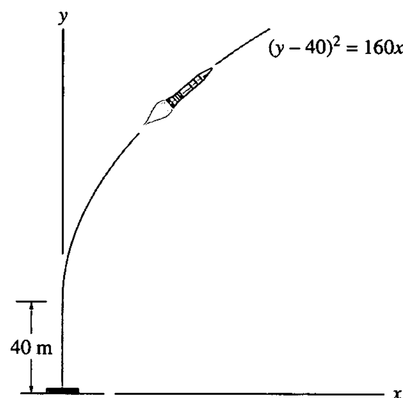
**12.78.** Um ponto material se move numa curva definida pela parábola $y = 0{,}5x^2$. Se o componente $x$ da velocidade é $v_x = (5t)$ pés/s, onde $t$ é dado em segundos, determine a distância do ponto à origem $O$ e o módulo da aceleração quando $t = 1$ s. Em $t = 0, x = 0$ e $y = 0$.



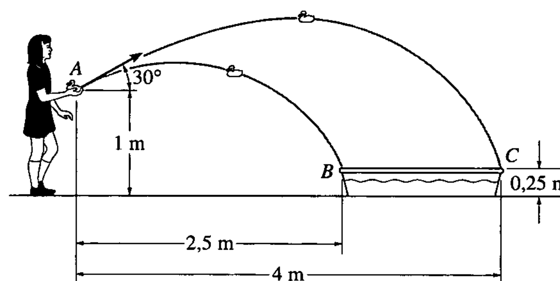

**Problema 12.78**

**12.79.** Quando um foguete atinge uma altitude de 40 m, ele inicia um movimento de trajetória parabólica $(y - 40)^2 = 160x$, onde as coordenadas são dadas em metros. Se o componente vertical da velocidade é $v_y = 180$ m/s, determine os módulos da velocidade e da aceleração do foguete quando este atinge a altitude de 80 m.

***12.80.** A menina sempre lança os brinquedos do ponto $A$, a um ângulo de 30°. Determine o tempo necessário entre dois lançamentos consecutivos para que os brinquedos atinjam as extremidades da piscina no mesmo instante. Com que velocidade ela deve lançar cada brinquedo?



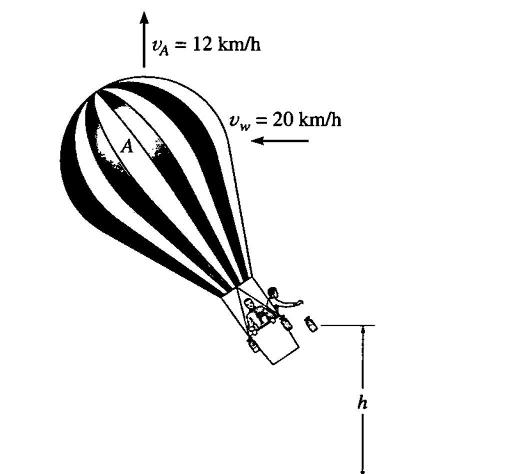

**Problema 12.79**




**Problema 12.80**

**12.81.** O bocal de uma mangueira de jardim despeja água a uma taxa de 15 m/s. Se o bocal é mantido no nível do solo e inclinado de 30° em relação à horizontal, determine a altura máxima alcançada pela água e a distância horizontal entre o bocal e o ponto no solo onde a água o atinge.

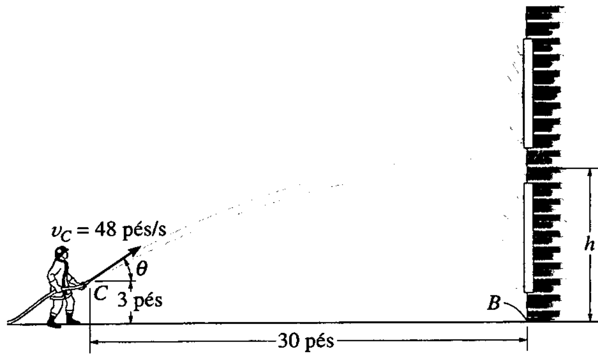
**12.82.** Um balão $A$ sobe a uma taxa $v_A = 12$ km/h enquanto é conduzido horizontalmente por um vento a uma velocidade de módulo $v_w = 20$ km/h. Se um saco de areia que serve de lastro é abandonado do balão a uma altura $h = 50$ m, determine o tempo necessário para o lastro atingir o solo. Suponha que o saco foi solto com a mesma velocidade do balão. Com que velocidade ele atinge o solo?




**Problema 12.82**

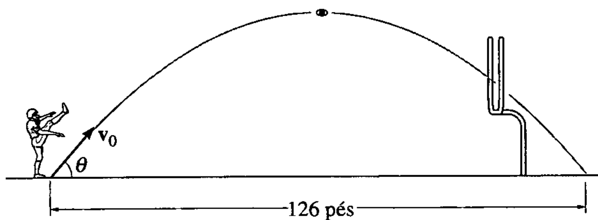
**12.83.** Determine na parede a altura máxima que pode ser atingida pela água proveniente da mangueira sustentada pelo bombeiro. A velocidade da água na saída do bocal tem módulo $v_C$ = 48 pés/s.

■***12.84.** Determine o menor valor do ângulo de inclinação $\theta$ da mangueira para que a água atinja a base da parede em $B$. O módulo da velocidade da água no bocal da mangueira é $v_C$ = 48 pés/s.



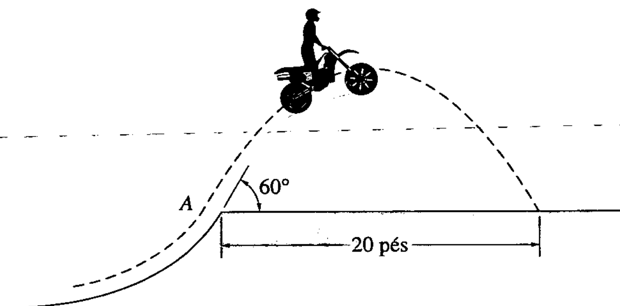

**Problemas 12.83/84**

**12.85.** Uma bola alcançou 126 pés 3,6 segundos após ter sido chutada. Calcule o módulo e a inclinação $\theta$ da velocidade inicial da bola.



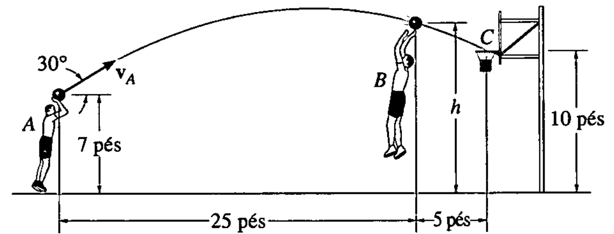

**Problema 12.85**

**12.86.** Em uma competição esportiva, uma moto saltou da pista em $A$, a um ângulo de 60°. Se o ponto de aterrissagem dista de 20 pés do ponto $A$, determine aproximadamente o módulo da velocidade com que a motocicleta deixou o solo. Despreze as dimensões da moto.




**Problema 12.86**

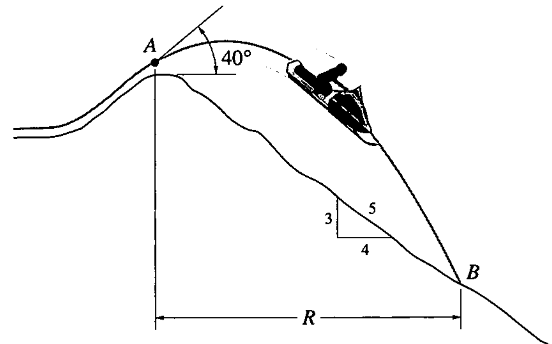
**12.87.** Algumas medidas de um lance em uma partida de basquete gravada em videoteipe estão indicadas na figura. O jogador $B$ quase interceptou a bola que foi encestada. Desprezando o tamanho da bola, determine o módulo $v_A$ da velocidade inicial e a altura $h$ da bola quando ela passa pelo jogador $B$.




**Problema 12.87**

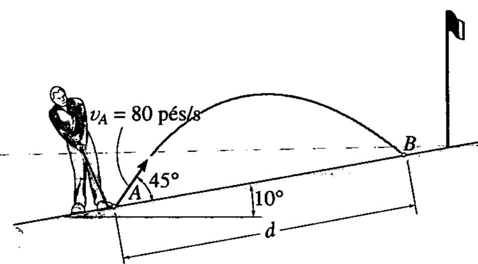
***12.88.** O *snowmobile* deixa o ponto $A$ a uma velocidade de 10 m/s. Determine o tempo de vôo de $A$ até $B$ e o alcance $R$ da trajetória.

**12.89.** O *snowmobile* deixa o ponto $A$ a uma velocidade de 10 m/s. Determine a velocidade com que ele atinge $B$ e a sua aceleração máxima na trajetória $AB$.



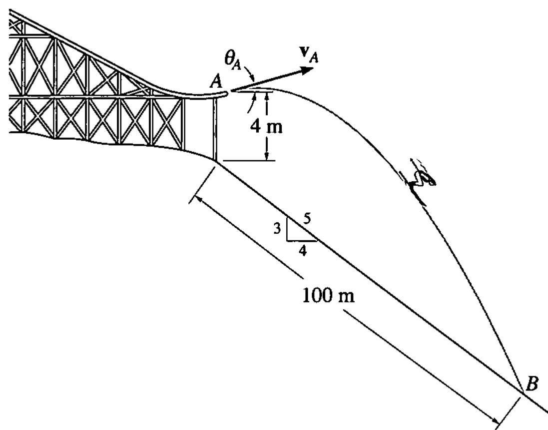

**Problemas 12.88/89**

**12.90.** Uma bola de golfe parte com uma velocidade de 80 pés/s, como mostrado na figura. Determine a distância $d$ entre os pontos $A$ e $B$.



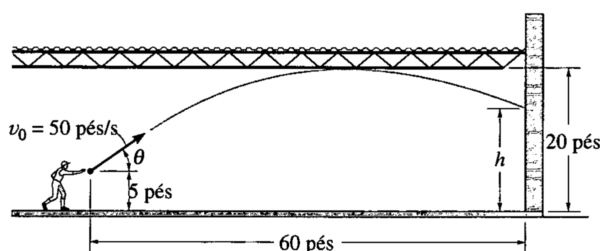

**Problema 12.90**

**12.91.** O esquiador deixa a rampa em $A$ a um ângulo $\theta_A$ = 25° em relação à horizontal. Se ele atinge o solo em $B$, determine o módulo $v_A$ de sua velocidade inicial e o tempo de vôo $t_{AB}$.




Problema 12.91

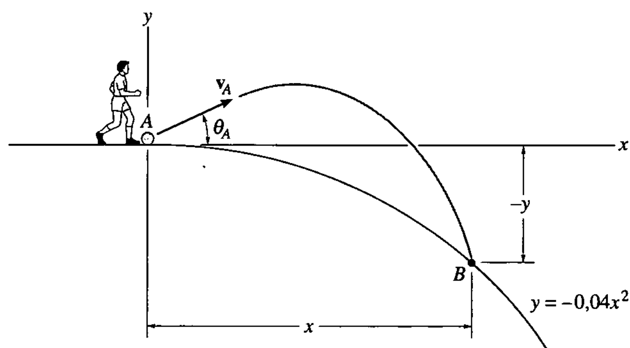
***12.92.** O homem que está a 60 pés da parede lança uma bola a uma velocidade de módulo $v_0 = 50$ pés/s. Determine o ângulo de lançamento $\theta$ necessário para que a bola atinja a parede o mais alto possível. Qual é a altura máxima $h$?




Problema 12.92

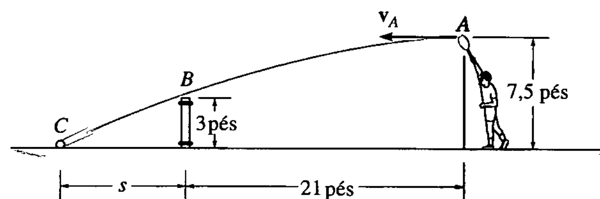
**12.93.** A bola chutada em $A$ parte com velocidade de módulo $v_A = 80$ pés/s formando um ângulo $\theta_A = 30°$. Determine o ponto $(x, -y)$ onde ela atinge o solo. Suponha que o solo tem a forma de uma parábola, como indicado na figura.

**12.94.** A bola chutada em $A$ parte formando um ângulo $\theta_A = 30°$ com a horizontal. Se ela atinge o solo no ponto $B$ de coordenadas $x = 15$ pés e $y = -9$ pés, determine os módulos da velocidade em $A$ e em $B$.



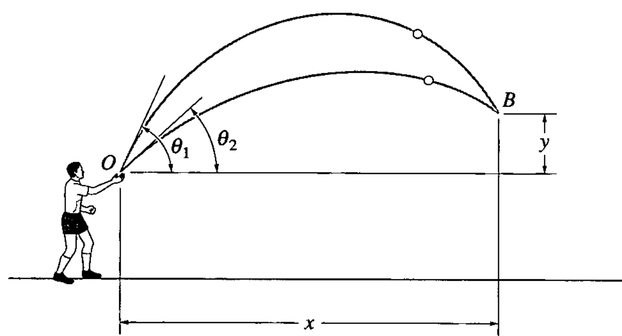

Problemas 12.93/94

**12.95.** Determine a velocidade horizontal com que a bola parte em $A$, sabendo-se que ela passa rente à rede. Calcule também a distância $s$ do ponto $C$ até a rede.



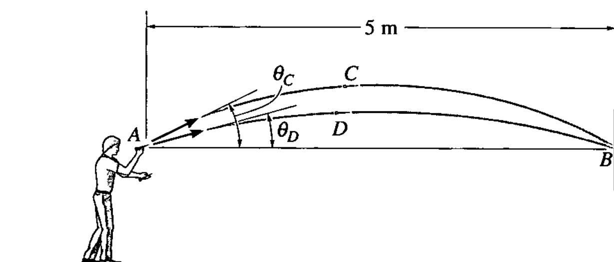

Problema 12.95

***12.96.** Um menino atira de $O$ uma bola com velocidade de módulo $v_O$ e formando um ângulo $\theta_1$ com a horizontal. Em seguida, ele atira outra bola com velocidade de mesmo módulo a um ângulo $\theta_2 < \theta_1$ com a vertical. Determine o tempo necessário entre os arremessos para que as bolas colidam em pleno ar.



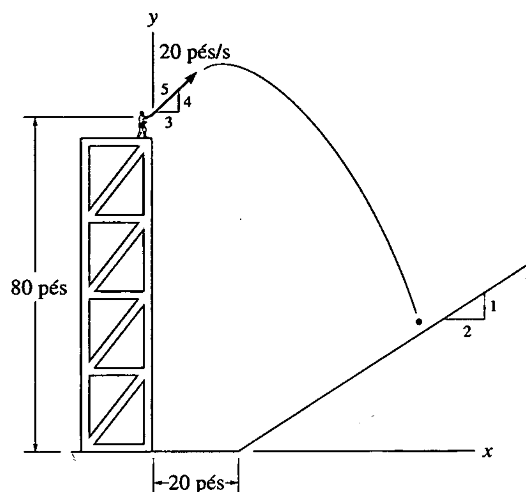

Problema 12.96

**12.97.** O homem deseja lançar do ponto $A$ dois dardos de modo que eles atinjam *simultaneamente* o alvo. Os dardos são lançados com velocidade de módulo 10 m/s. Determine os ângulos $\theta_C$ e $\theta_D$ e o tempo entre os lançamentos. Observe que o primeiro dardo deve ser lançado com um ângulo $\theta_C$ ($> \theta_D$).



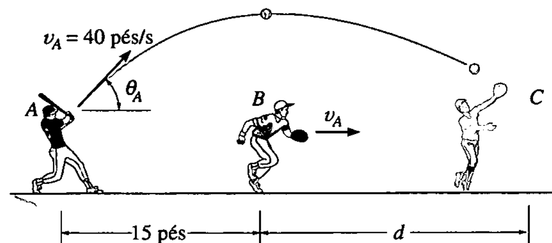

Problema 12.97

**12.98.** A bola é atirada da torre com uma velocidade de 20 pés/s, como mostrado na figura. Determine as coordenadas $x$ e $y$ do ponto onde a bola atinge a ladeira. Determine também o módulo da velocidade com que a bola chega ao solo.

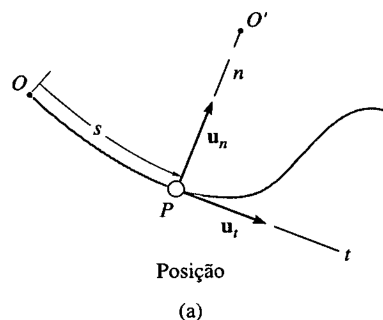



Problema 12.98

**12.99.** O jogador de beisebol $A$ rebate a bola comunicando-lhe velocidade de módulo $v_A$ = 40 pés/s e com um ângulo $\theta_A$ = 60° com a horizontal. Ao passar sobre o jogador $B$, a bola inicia o seu movimento de descida. Determine a velocidade constante do jogador $B$ e a distância $d$ necessária para que ele apanhe a bola à mesma altura do ponto de partida em $A$.

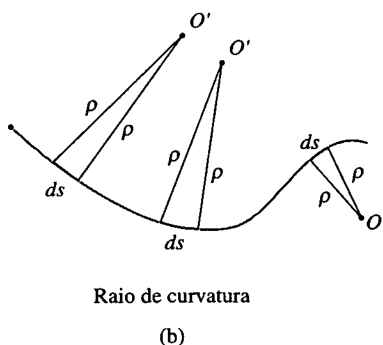



Problema 12.99



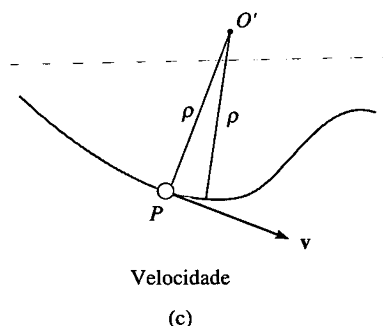

Posição

(a)




Raio de curvatura

(b)




Velocidade

(c)

**Figura 12.24**

## 12.7 MOVIMENTO CURVILÍNEO: COMPONENTES NORMAL E TANGENCIAL

Quando a trajetória de um ponto material é *conhecida*, torna-se conveniente, em muitos casos, descrever o movimento usando um sistema de eixos $n$ e $t$ com *origem no ponto material* e ajustados, a todo instante, nas direções normal e tangencial à trajetória, respectivamente.

***Movimento Plano.*** Consideremos o ponto material $P$, mostrado na Figura 12.24*a*, movendo-se ao longo de uma curva fixa num plano. Em cada instante sua posição é determinada pela distância $s$ de $P$ a $O$ medida ao longo da curva. Consideremos agora um sistema de coordenadas cuja origem *coincide* em cada instante com o ponto material $P$. O eixo $t$ é *tangente* à curva em $P$ e é orientado positivamente no *sentido de crescimento* de $s$. Identifiquemos a direção e o sentido desse eixo pelo vetor unitário $\mathbf{u}_t$. A escolha única para o *eixo normal* $n$ é feita notando-se que geometricamente a curva é constituída por uma série de arcos elementares *ds* (Figura 12.24*b*). Cada segmento *ds* é formado a partir do arco de uma circunferência associada que tem raio de *curvatura* $\rho$ e *centro de curvatura* $O'$. O eixo normal $n$ é perpendicular ao eixo $t$ e é *orientado* de $P$ para o centro de curvatura $O'$ (Figura 12.24*a*). Esse sentido positivo, que *sempre* indicará o lado côncavo da curva, será identificado pelo vetor unitário $\mathbf{u}_n$. O plano que contém os eixos normal e tangencial é denominado *plano osculador* e, neste caso de movimento plano, coincide com o plano do movimento.[5]

***Velocidade.*** Uma vez que o ponto material está em movimento, $s$ é uma função do tempo. Como indicado na Seção 12.4, a velocidade do ponto material é *sempre tangente à trajetória* (Figura 12.24*c*), e seu *módulo* é dado pela derivada temporal da função de posição $s = s(t)$ (Equação 12.8). Logo:

$$\boxed{\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t} \qquad (12.15)$$

[5] O plano osculador também pode ser definido como o plano que tem o maior contato com a curva num dado ponto. É a posição limite de um plano que contacta o ponto considerado e o elemento de arco *ds*. Como observado acima, o plano osculador coincide com o plano da própria curva, o que não acontece no caso geral de uma curva tridimensional, em que cada ponto da curva tem o seu plano osculador.

onde

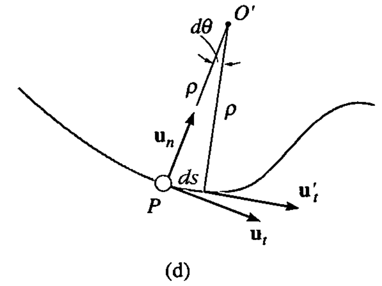
$$\boxed{v = \dot{s}} \qquad (12.16)$$

***Aceleração.*** A aceleração de um ponto material é a taxa de variação temporal da velocidade. Logo:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t \qquad (12.17)$$

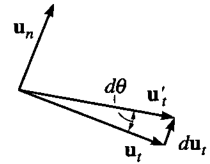
Para determinarmos a derivada temporal $\dot{\mathbf{u}}_t$, observemos que, conforme o ponto material se move ao longo do arco $ds$ no intervalo de tempo elementar $dt$, $\mathbf{u}_t$ *preserva seu módulo*, que como sabemos vale um; todavia, sua *direção* muda, e o vetor se torna $\mathbf{u}'_t$ (Figura 12.24*d*). Pode-se escrever (Figura 12.24*e*) $\mathbf{u}'_t = \mathbf{u}_t + d\mathbf{u}_t$. Assim, $d\mathbf{u}_t$ se estende da ponta de $\mathbf{u}_t$ até à de $\mathbf{u}'_t$, coincidindo com um arco elementar de raio $u_t = 1$. Logo, $d\mathbf{u}_t$ tem *módulo* $du_t = (1)\ d\theta$, e sua *direção* e *sentido* são os de $\mathbf{u}_n$. Conseqüentemente, $d\mathbf{u}_t = d\theta\ \mathbf{u}_n$, e, portanto, a derivada temporal se torna $\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n$. Uma vez que $ds = \rho\ d\theta$ (Figura 12.24*d*), então $\dot{\theta} = \dot{s}/\rho$ e, portanto,

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{u}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{u}_n$$



(d)

Substituindo-se esse resultado na Equação 12.17, **a** pode ser escrita como a soma de seus dois componentes:



(e)

$$\boxed{\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n} \qquad (12.18)$$

onde

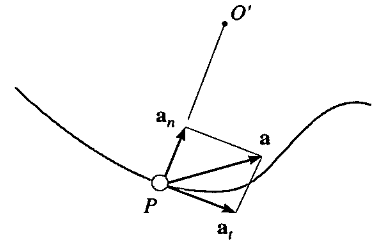
$$\boxed{a_t = \dot{v}} \quad \text{ou} \quad \boxed{a_t ds = v\ dv} \qquad (12.19)$$

e

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}} \qquad (12.20)$$

Desses dois componentes mutuamente perpendiculares (Figura 12.24*f*), resulta para o *módulo* da aceleração o valor

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \qquad (12.21)$$



Aceleração

(f)

**Figura 12.24**

Para resumir esses conceitos, consideremos os seguintes casos especiais.

1. Se o ponto se move ao longo de uma linha reta, então $\rho \rightarrow \infty$ e, da Equação 12.20, $a_n = 0$, donde $a = a_t = \dot{v}$. Logo podemos concluir que *o componente tangencial da aceleração representa a taxa temporal de variação da velocidade escalar.*
2. Se o ponto se move ao logo de uma curva, com velocidade escalar constante, $a_t = \dot{v} = 0$ e $a = a_n = v^2/\rho$. Assim, o *componente normal da aceleração representa a taxa temporal de variação da direção da velocidade.*

A partir dessas interpretações, concluímos que um ponto material que se move ao longo de uma trajetória curvilínea terá acelerações orientadas como indicado na Figura 12.25.

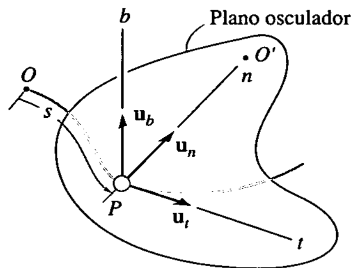



Figura 12.26

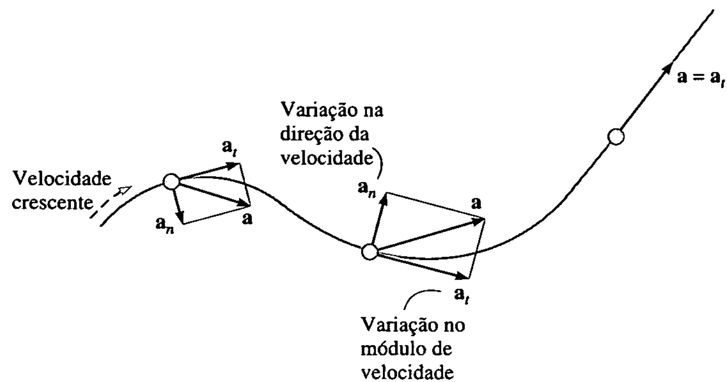
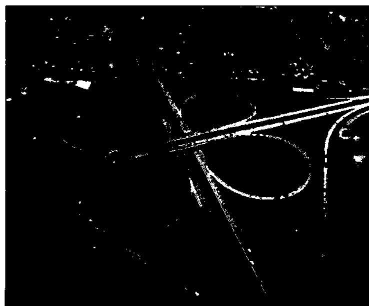



Figura 12.25



*Um motorista dirigindo num trevo experimenta uma aceleração normal devido à mudança de direção da velocidade. O componente tangencial da aceleração ocorre quando o movimento do carro se torna mais rápido e ou mais lento.*

***Movimento Tridimensional.*** Se o ponto se move ao longo de uma curva espacial (Figura 12.26), então num dado instante o eixo $t$ é determinado univocamente; todavia, um número infinito de retas pode ser traçado em $P$, perpendicularmente a esse eixo tangente. Como no caso do movimento plano, consideraremos o eixo normal $n$ orientado positivamente de $P$ para o centro de curvatura $O'$. Esse eixo é denominado *normal principal* à curva em $P$. Com os eixos $n$ e $t$ assim definidos, as equações 12.15 a 12.21 podem ser usadas para se determinar $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}$. Uma vez que $\mathbf{u}_t$ e $\mathbf{u}_n$ são sempre mutuamente perpendiculares e contidos no plano osculador, para o movimento espacial utiliza-se um terceiro vetor unitário, $\mathbf{u}_b$, que define o eixo binormal $b$ perpendicular aos vetores $\mathbf{u}_t$ e $\mathbf{u}_n$ (Figura 12.26). Podemos usar o produto vetorial para estabelecer a direção e o sentido de $\mathbf{u}_b$, definindo esse vetor como $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$ (Figura 12.26). É conveniente lembrar que $\mathbf{u}_n$ é sempre voltado para o lado côncavo da curva.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

### *Sistema de Coordenadas*

- Se *conhecemos* a trajetória, podemos estabelecer um sistema de eixos coordenados $n$ e $t$ com origem *sempre coincidente* com o ponto material que se move.
- O eixo tangente $t$ tem o sentido do movimento e o eixo normal $n$ é sempre voltado para o centro de curvatura da trajetória. Os eixos $n$ e $t$ são particularmente vantajosos no estudo da velocidade e da aceleração de um ponto material, porque os componentes $n$ e $t$ da aceleração são expressos pelas equações 12.19 e 12.20, respectivamente.

### *Velocidade*

- A *velocidade* do ponto material é sempre tangente à trajetória.
- O módulo da velocidade é obtido pela derivada em relação ao tempo da função de posição $s$.

$$v = \dot{s}$$

### *Aceleração Tangencial*

- O componente tangencial da aceleração é o resultado da taxa temporal de variação do módulo da velocidade. Esse componente terá o sentido do vetor velocidade se o módulo de $\mathbf{v}$ estiver aumentando e terá o sentido oposto, caso o módulo de $\mathbf{v}$ esteja decrescendo.
- As relações entre $a_t$, $v$ e $t$ são as mesmas do movimento retilíneo:

$$a_t = \dot{v} \quad a_t\,ds = v\,dv$$

**PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (CONTINUAÇÃO)**

Se $a_t$ é constante, $a_t = (a_t)_c$, as equações anteriores, quando integradas, resultam em

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(a_t)_c t^2$$

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$

$$v^2 = v_0^2 + 2(a_t)_c(s - s_0)$$

*Aceleração Normal*

- O componente normal da aceleração é o resultado da taxa temporal de variação que ocorre na direção da velocidade do ponto material. Esse componente é *sempre* voltado para o centro de curvatura da trajetória, isto é, no sentido positivo do eixo $n$.
- O módulo desse componente é determinado por

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

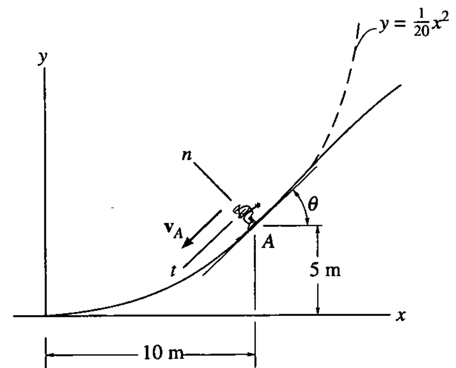
- Se a trajetória é expressa como $y = f(x)$, o raio de curvatura $\rho$ em qualquer ponto da trajetória é determinado pela equação

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

A dedução desse resultado pode ser encontrada em qualquer livro-texto de cálculo padrão.

## EXEMPLO 12.14

Quando o esquiador alcança o ponto $A$ de sua trajetória parabólica (Figura 12.27*a*), ele tem uma velocidade escalar de 6 m/s que está aumentando à taxa de 2 m/s². Determine a direção de sua velocidade e a aceleração **a** (módulo, direção e sentido) no instante considerado. Despreze o tamanho do esquiador.




(a)

**Figura 12.27**

### SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** A origem $A$, tomada no esquiador, bem como as direções e os sentidos dos eixos $n$ e $t$, estão mostrados na Figura 12.27*a*.

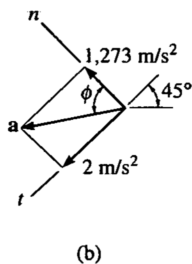
***Velocidade.*** Por definição, a velocidade é sempre tangente à trajetória. Uma vez que $y = \frac{1}{20}x^2$, $dy/dx = \frac{1}{10}x$ e, então, $dy/dx|_{x=10} = 1$. Logo, em $A$, **v** forma com o eixo $x$ um ângulo $\theta = \text{tg}^{-1}\,1 = 45°$ (Figura 12.27). Portanto,

$$v_A = 6 \text{ m/s} \qquad 45°\measuredangle\, v_A$$

***Resposta***

***Aceleração.*** A aceleração é determinada por $\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + (v^2/\rho)\mathbf{u}_n$. Todavia, é necessário primeiro determinar o raio de curvatura da trajetória em $A$ (10 m, 5 m). Uma vez que $d^2y/dx^2 = \frac{1}{10}$, então

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \left.\frac{[1 + (\frac{1}{10}x)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{10}|}\right|_{x=10\text{ m}} = 28{,}28 \text{ m}$$



(b)

**Figura 12.27**

A aceleração se torna

$$\mathbf{a}_A = \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n$$
$$= 2\mathbf{u}_t + \frac{(6 \text{ m/s})^2}{28{,}28 \text{ m}}\mathbf{u}_n$$
$$= \{2\mathbf{u}_t + 1{,}273\mathbf{u}_n\} \text{ m/s}^2$$

Como mostrado na Figura 12.27*b*,

$$a = \sqrt{(2)^2 + (1{,}273)^2} = 2{,}37 \text{ m/s}^2$$
$$\phi = \text{tg}^{-1}\frac{2}{1{,}273} = 57{,}5°$$

Assim, 57,5° − 45° = 12,5°, de modo que

$$a = 2{,}37 \text{ m/s}^2 \quad {}_{12{,}5°}\nearrow_{\mathbf{a}_A}$$ ***Resposta***

*Observação*: Usando coordenadas *n, t*, fomos capazes de resolver rapidamente o problema, pois os componentes *n* e *t* respondem pelas variações *separadas* do módulo e da direção de **v**.

## EXEMPLO 12.15

Um carro de corrida parte do repouso e percorre uma pista circular horizontal de raio de 300 pés (Figura 12.28). Se a sua velocidade escalar aumenta a uma taxa constante de 7 pés/s², determine o tempo necessário para ele alcançar uma aceleração de 8 pés/s². Qual é a sua velocidade escalar nesse instante?

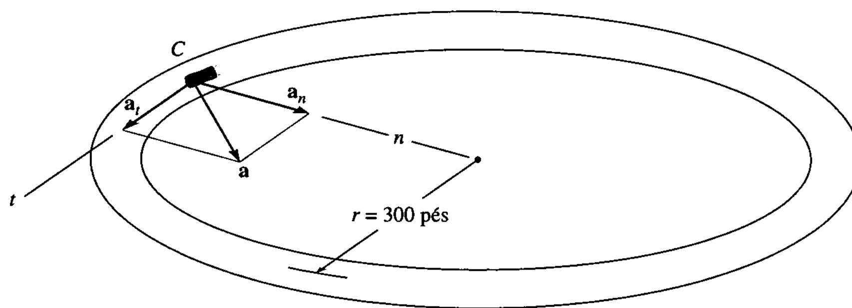



**Figura 12.28**

### SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Os eixos *n* e *t* têm origem no carro. O eixo *t* tem o sentido do movimento e o eixo *n* é voltado para o centro da trajetória circular de raio $r = 300$ pés. Esse sistema de coordenadas foi escolhido pelo fato de a trajetória ser conhecida.

***Aceleração.*** O módulo da aceleração pode ser relacionado aos seus componentes usando-se $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. Aqui $a_t = 7$ pés/s². Como $a_n = v^2/\rho$, a velocidade como função do tempo é

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v = 0 + 7t$$

Logo:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0{,}163t^2 \text{ pés/s}^2$$

O tempo necessário para o carro alcançar uma aceleração de 8 pés/s$^2$ é, portanto,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$8 = \sqrt{(7)^2 + (0{,}163t^2)^2}$$

Resolvendo para o valor positivo de $t$, obtemos

$$0{,}163t^2 = \sqrt{(8)^2 - (7)^2}$$
$$t = 4{,}87 \text{ s}$$ ***Resposta***

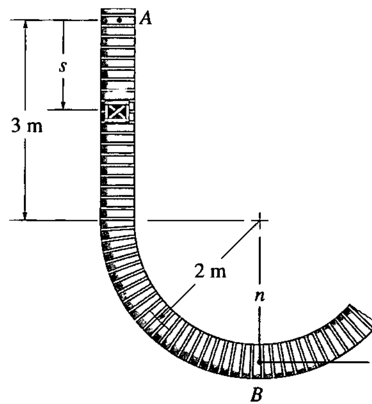
***Velocidade.*** A velocidade escalar no instante $t = 4{,}87$ s é

$$v = 7t = 7(4{,}87) = 34{,}1 \text{ pés/s}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 12.16

A Figura 12.29*a* mostra caixas que se movem por meio de um transportador industrial. Uma caixa (Figura 12.29*b*) parte do repouso em $A$ e sua velocidade escalar aumenta a uma taxa $a_t = (0{,}2t)$ m/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine o módulo de sua aceleração quando ela chega ao ponto $B$.


(a)



(b)

**Figura 12.29**

***Sistema de Coordenadas.*** A posição da caixa em qualquer instante é definida a partir de $A$, usando-se a coordenada de posição $s$ (Figura 12.29*b*). A aceleração deve ser determinada em $B$, logo a origem dos eixos $n$ e $t$ é tomada nesse ponto.

***Aceleração.*** Para se determinarem os componentes da aceleração $a_t = \dot{v}$ e $a_n = v^2/\rho$, primeiramente é necessário expressar $v$ e $\dot{v}$ em termos do tempo, para que possam ser calculadas em $B$. Como $v_A = 0$ quando $t = 0$, então

$$a_t = \dot{v} = 0{,}2t \quad (1)$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0{,}2t\,dt$$

$$v = 0{,}1t^2 \quad (2)$$

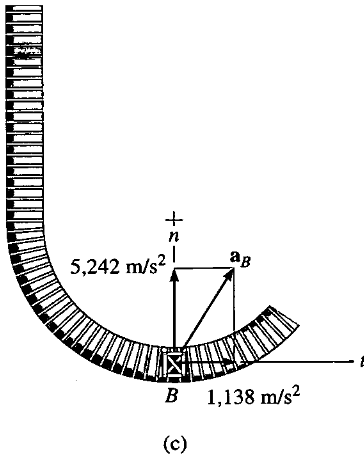
O tempo necessário para a caixa atingir $B$ pode ser determinado observando-se que a posição de $B$ é $s_B = 3 + 2\pi(2)/4 = 6{,}142$ m (Figura 12.29*b*). Como $s_A = 0$ quando $t = 0$, temos

$$v = \frac{ds}{dt} = 0{,}1t^2$$

$$\int_0^{6{,}142} ds = \int_0^{t_B} 0{,}1t^2\,dt$$

$$6{,}142 = 0{,}0333t_B^3$$

$$t_B = 5{,}690 \text{ s}$$




(c)

**Figura 12.29**

Substituindo esse tempo nas equações 1 e 2, temos

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0{,}2(5{,}690) = 1{,}138 \text{ m/s}^2$$

$$v_B = 0{,}1(5{,}69)^2 = 3{,}238 \text{ m/s}$$

Em $B$, $\rho_B = 2$ m, donde

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3{,}238 \text{ m/s})^2}{2 \text{ m}} = 5{,}242 \text{ m/s}^2$$

O módulo de $\mathbf{a}_B$ (Figura 12.29*c*) é, portanto,

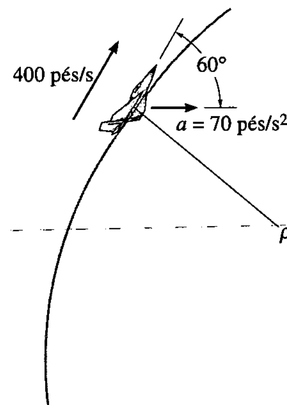
$$a_B = \sqrt{(1{,}138)^2 + (5{,}242)^2} = 5{,}36 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

## PROBLEMAS

***12.100.** Um carro faz uma curva circular de 50 m de raio, aumentando sua velocidade a uma taxa constante de 8 m/s². Se num dado instante sua velocidade é de 16 m/s, determine o módulo da sua aceleração nesse instante.

**12.101.** Um carro se move ao longo de uma pista circular de 150 pés de raio de modo que sua velocidade varia no tempo de acordo com $v = 3\,(t + t^2)$ pés/s no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 4$ s. Determine o módulo de sua aceleração quando $t = 3$ s. Que distância ela percorreu até esse instante?

**12.102.** Num dado instante, um avião a jato tem uma velocidade de 400 pés/s e uma aceleração de 70 pés/s² orientada como se mostra na figura. Determine a taxa de aumento da velocidade do avião e o raio de curvatura $\rho$ de sua trajetória.



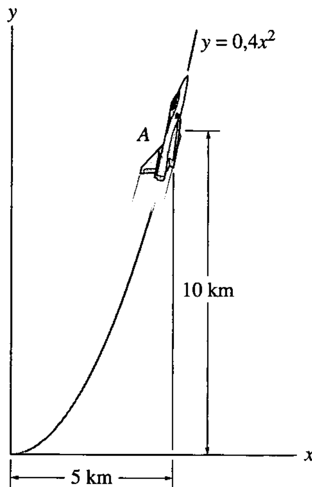

**Problema 12.102**

**12.103.** Um bote desloca-se numa curva circular de 100 pés de raio. Sua velocidade no instante $t = 0$ é de 15 pés/s e está aumentando a uma taxa dada por $\dot{v} = (0{,}8t)$ pés/s$^2$, onde $t$ é expresso em segundos. Determine o módulo de sua aceleração no instante $t = 5$ s.

***12.104.** Um bote está se deslocando numa trajetória circular de 20 m de raio. Determine o módulo da aceleração do bote quando sua velocidade escalar é $v = 5$ m/s e está aumentando a uma taxa de $\dot{v} = 2$ m/s$^2$.

**■12.105.** Partindo do repouso, um ciclista desloca-se numa pista circular ($\rho = 10$ m) a uma velocidade escalar $v = (0{,}09t^2 + 0{,}1\,t)$ m/s, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do ciclista no instante em que ele completa um percurso $s = 3$ m.

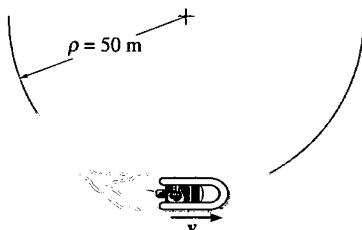
**12.106.** O avião a jato desloca-se na trajetória parabólica mostrada na figura. Quando ele passa pelo ponto $A$, sua velocidade é de 200 m/s e está crescendo a uma taxa de 0,8 m/s$^2$. Determine o módulo da aceleração do jato no ponto $A$.




**Problema 12.106**

**12.107.** Partindo do repouso, um bote segue uma trajetória circular, $\rho = 50$ m, a uma velocidade de módulo $v = (0{,}8t)$ m/s, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do bote no instante em que ele completa um percurso de 20 m.

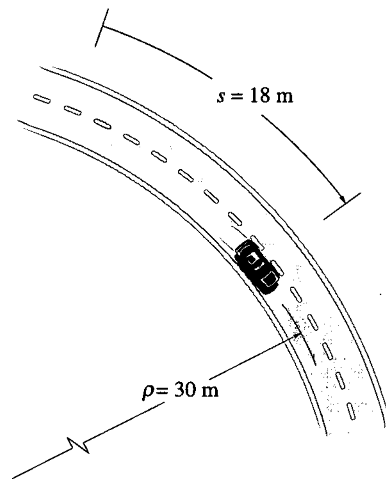
***12.108.** Partindo do repouso, um bote segue uma trajetória circular ($\rho = 50$ m) a uma velocidade escalar $v = (0{,}2t^2)$ m/s, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do bote no instante $t = 3$ s.




**Problemas 12.107/108**

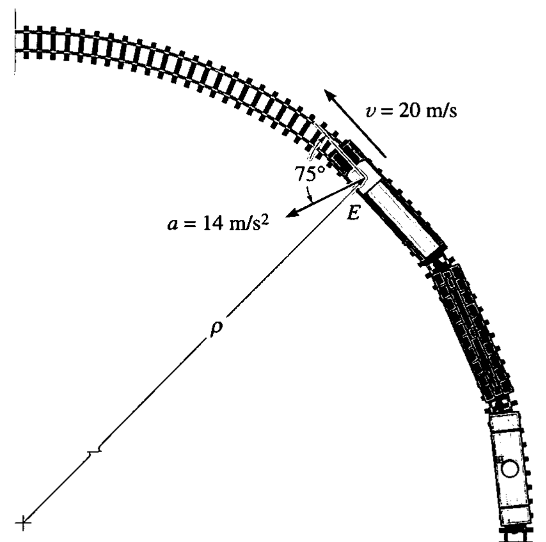
**12.109.** Um carro se move ao longo de uma pista circular de 250 pés de raio, a uma velocidade dada por $v = 3\,(t + t^2)$ pés/s, no intervalo de tempo $0 \leq t \leq 2$ s. Determine o módulo da sua aceleração quando $t = 2$ s. Que distância ele percorreu até esse instante?

**■*12.110.** O carro faz uma curva aumentado sua velocidade à taxa $\dot{v} = (0{,}5e^t)$ m/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos de sua velocidade e aceleração ao fim de um deslocamento $s = 18$ m. O carro partiu do repouso. Despreze o tamanho do carro.




**Problema 12.110**

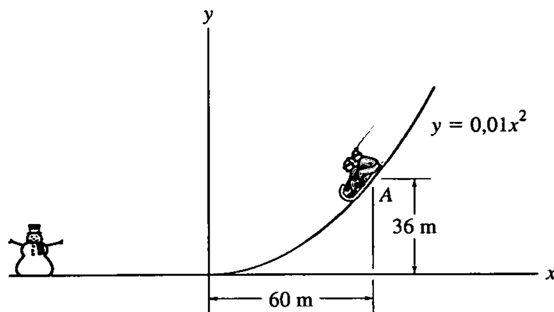
**12.111.** Num dado instante, a locomotiva em $E$ tem uma velocidade de 20 m/s e uma aceleração de 14 m/s$^2$ orientada como indicado na figura. Determine a taxa de aumento da velocidade do trem nesse instante e o raio de curvatura da trajetória.




**Problema 12.111**

***12.112.** Um trenó desliza ao longo de uma curva que pode ser aproximada pela parábola $y = 0{,}01x^2$. Determine o

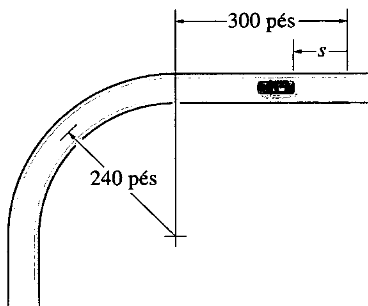
módulo de sua aceleração quando ele atinge o ponto $A$, onde a sua velocidade é de 10 m/s e está aumentando a uma taxa de 3 m/s$^2$.




**Problema 12.112**

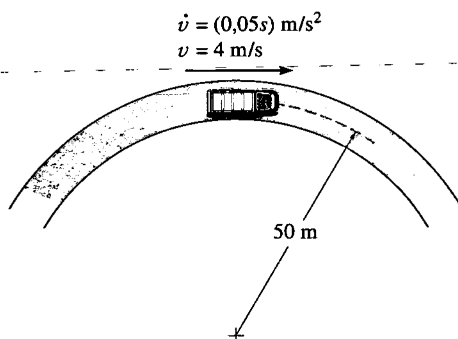
**12.113.** A velocidade de um automóvel, inicialmente em repouso em $s = 0$, varia de acordo com $\dot{v} = (0{,}05t^2)$ pés/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do carro quando $t = 18$ s.

**12.114.** A velocidade de um automóvel, inicialmente em repouso em $s = 0$, varia de acordo com $\dot{v} = (0{,}05t^2)$ pés/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do carro em $s = 550$ pés.



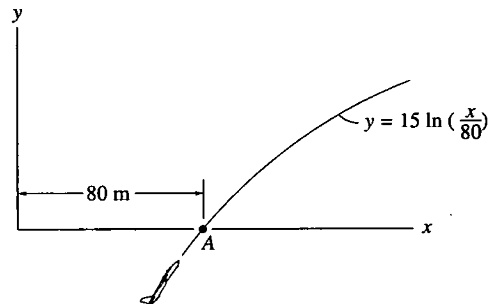

**Problemas 12.113/114**

**12.115.** Um caminhão desloca-se numa trajetória circular de 50 m de raio a uma velocidade de 4 m/s. Num pequeno trecho a partir de $s = 0$, sua velocidade aumenta à taxa $\dot{v} = (0{,}05s)$ m/s$^2$, onde $s$ é medido em metros. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do caminhão quando $s = 10$ m.



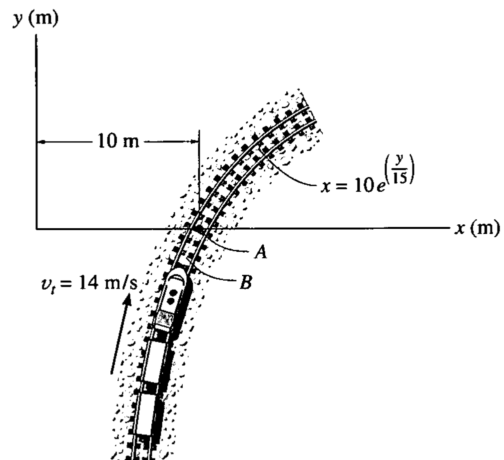

**Problema 12.115**

***12.116.** Um avião a jato desloca-se com velocidade de módulo constante igual a 110 m/s, ao longo da trajetória mostrada na figura. Determine o módulo da sua aceleração quando ele atinge o ponto $A$ ($y = 0$).



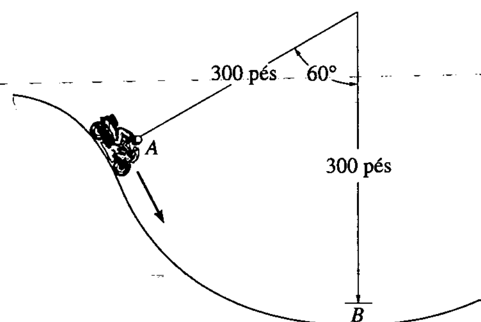

**Problema 12.116**

**12.117.** Um trem está viajando a uma velocidade escalar constante de 14 m/s. Determine o módulo da aceleração da frente $B$ do trem no instante em que ele atinge o ponto $A$ ($y = 0$).




**Problema 12.117**

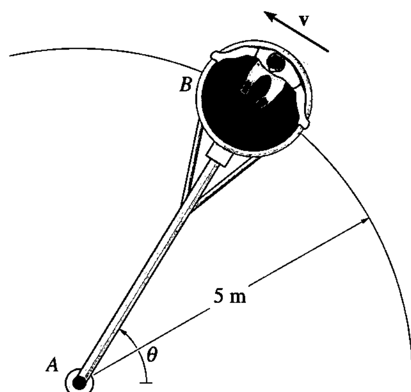
**12.118.** Uma motocicleta inicia a partir do repouso em $A$ um movimento circular ao longo da pista vertical. Sua velocidade aumenta à taxa $\dot{v} = (0{,}3t)$ pés/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração da moto quando ela passa por $B$.




**Problema 12.118**

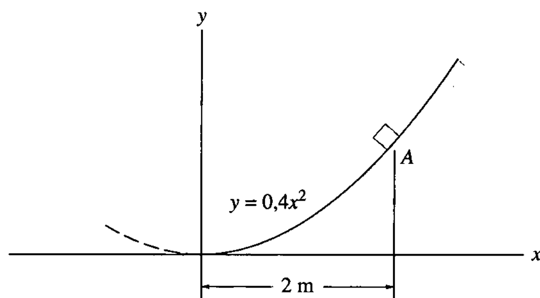
■**12.119.** O movimento da gôndola $B$ é tal que sua velocidade aumenta à taxa $\dot{v}_B = (0{,}5e^t)$ m/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Se a gôndola parte do repouso quando $\theta = 0°$, determine os módulos de sua velocidade e aceleração quando o braço $AB$ passa pela posição $\theta = 30°$. Despreze as dimensões da gôndola.

***12.120.** O movimento da gôndola $B$ é tal que sua velocidade aumenta à taxa $\dot{v}_B = (0{,}5e^t)$ m/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Se a gôndola parte do repouso quando $\theta = 0°$, determine os módulos de sua velocidade e aceleração para $t = 2$ s. Que ângulo foi descrito? Despreze as dimensões da gôndola.




**Problemas 12.119/120**

**12.121.** A caixa de dimensões desprezíveis desliza ao longo da trajetória curva definida pela parábola $y = 0{,}4x^2$. Quando ela está em $A$ ($x_A = 2$ m, $y_A = 1{,}6$ m), a velocidade é $v_B = 8$ m/s e aumenta de acordo com $dv_B/dt = 4$ m/s$^2$. Determine o módulo da aceleração da caixa nessa posição.

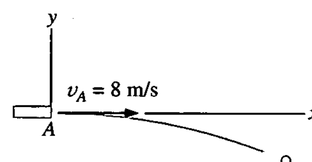



**Problema 12.121**

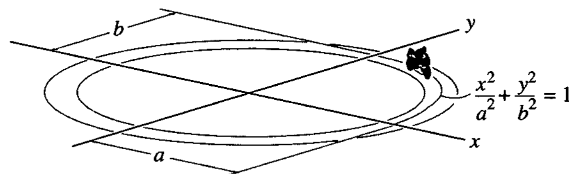
**12.122.** De um tubo ejeta-se horizontalmente uma bola com velocidade de módulo 8 m/s. Obtenha a equação da trajetória da bola, $y = f(x)$ e, então, determine o módulo de sua velocidade e os componentes normal e tangencial da aceleração quando $t = 0{,}25$ s.

**12.123.** O movimento de um ponto material é definido pelas equações $x = (2t + t^2)$ m e $y = (t^2)$ m, onde $t$ é dado em segundos. Determine os componentes normal e tangencial da velocidade e da aceleração do ponto quando $t = 2$ s.

***12.124.** A moto desloca-se numa pista elíptica a uma velocidade de módulo constante $v$. Determine o valor máximo do módulo da aceleração se $a > b$.



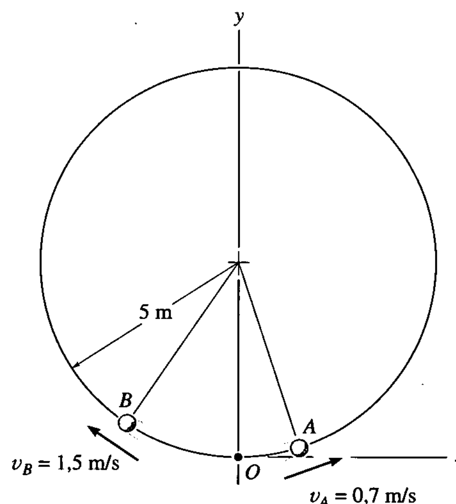

**Problema 12.122**




**Problema 12.124**

**12.125.** Os pontos materiais $A$ e $B$ partem da origem $O$ e deslocam-se em sentidos opostos ao longo da trajetória circular, com velocidades de módulos $v_A = 0{,}7$ m/s e $v_B = 1{,}5$ m/s, respectivamente. Determine em $t = 2$ s, (a) o deslocamento de cada ponto ao longo da trajetória, (b) o vetor de posição de cada ponto e (c) a menor distância entre $A$ e $B$.

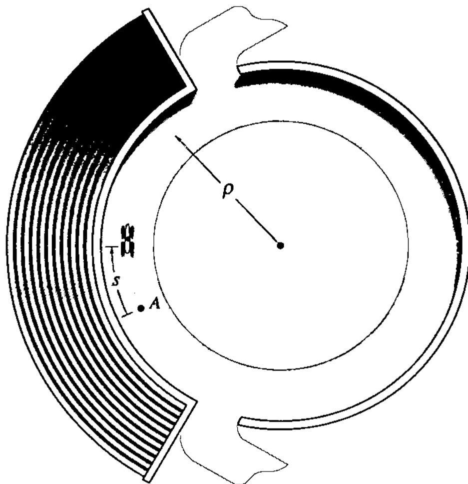
**12.126.** Os pontos materiais $A$ e $B$ partem da origem $O$ e deslocam-se em sentidos opostos ao longo da trajetória circular, com velocidades de módulos $v_A = 0{,}7$ m/s e $v_B = 1{,}5$ m/s, respectivamente. Determine o instante em que eles colidem e o módulo da aceleração de $B$, imediatamente antes da colisão.




**Problemas 12.125/126**

**12.127.** O carro de corrida tem uma velocidade inicial de módulo $v_A = 15$ m/s no ponto $A$. Se ao longo da trajetória a velocidade aumenta à taxa $a_t = (0{,}4s)$ m/s$^2$, onde $s$ é medido

em metros, determine o tempo necessário para o carro percorrer 20 m. Considere que $\rho = 150$ m.

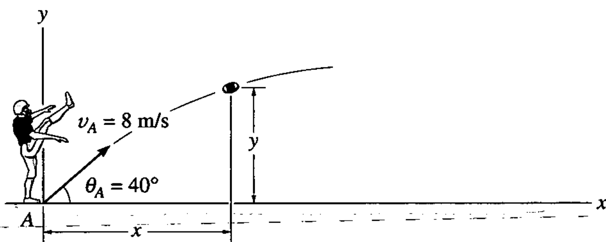



**Problema 12.127**

***12.128.** Um menino que brinca num carrossel localiza-se a uma distância $r = 8$ pés do eixo de rotação. O carrossel está inicialmente em repouso e então é posto para girar de tal modo que a velocidade do menino aumenta a uma taxa de 2 pés/s$^2$. Determine o tempo necessário para que a aceleração da criança se torne igual a 4 pés/s$^2$.

**12.129.** Um ponto material desloca-se ao longo da trajetória $y = a + bx + cx^2$, onde $a, b$ e $c$ são constantes. Se o ponto material tem velocidade de módulo constante $v = v_0$, determine os componentes $x$ e $y$ da velocidade e os componentes normal e tangencial da aceleração em $x = 0$.

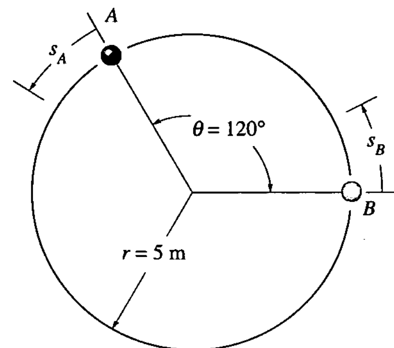
**■12.130.** Uma bola é chutada com uma velocidade inicial de módulo $v_A = 8$ m/s, formando um ângulo $\theta_A = 40°$ em relação à horizontal. Obtenha a equação da trajetória, $y = f(x)$, e, então, determine a velocidade e os componentes normal e tangencial da bola quando $t = 0{,}25$ s.




**Problema 12.130**

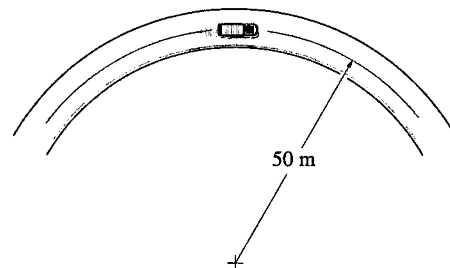
**■12.131.** Os pontos materiais $A$ e $B$ deslocam-se no sentido anti-horário numa trajetória circular, com velocidades de módulos constantes iguais a 8 m/s. Num dado instante, a velocidade de $A$ começa a aumentar de acordo com $\dot{v}_A = (4s_A)$ m/s$^2$, onde $s_A$ é expresso em metros. Determine a distância de $B$ a $A$, medida ao longo da trajetória, no sentido anti-horário, quando $t = 1$ s. Qual é o módulo da aceleração de cada ponto no instante considerado?

***12.132.** Os pontos materiais $A$ e $B$ deslocam-se no sentido anti-horário numa trajetória circular, com velocidades de módulos iguais a 8 m/s. Num dado instante, a velocidade de $B$ passa a aumentar de acordo com $\dot{v}_B = 4$ m/s$^2$, e a de $A$, de acordo com $\dot{v}_A = 0{,}8t$ m/s$^2$. Determine quanto tempo leva para ocorrer uma colisão. Qual é o módulo da aceleração de cada ponto imediatamente antes da colisão?




**Problemas 12.131/132**

**12.133.** O caminhão trafega com uma velocidade de 4 m/s ao longo de um trecho circular da estrada. Por uma pequena distância a partir de $s = 0$, sua velocidade aumenta de acordo com $\dot{v} = (0{,}05s)$ m/s$^2$, onde $s$ é dado em metros. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do caminhão quando ele atinge a posição $s = 10$ m.

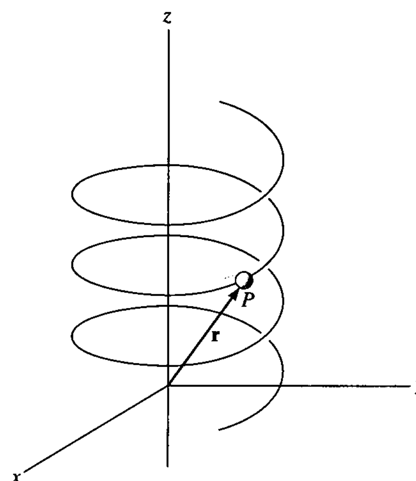



**Problema 12.133**

**■12.134.** Um objeto desloca-se numa trajetória circular de 100 pés de raio, com uma velocidade que varia no tempo de acordo com a expressão $v = 60(1 - e^{-t})$ pés/s, no intervalo $0 \leq t \leq 4$ s. Determine o módulo da sua aceleração quando $t = 2$s. Que distância ele percorreu até o instante $t = 2$ s? Use a regra de Simpson com $n = 50$ para calcular a integral.

**12.135.** Um ponto material $P$ desloca-se numa hélice elíptica tal que seu vetor de posição **r** é definido por $\mathbf{r} = [2\cos(0{,}1t)\mathbf{i} + 1{,}5\,\mathrm{sen}(0{,}1t)\mathbf{j} + (2t)\mathbf{k}]$ m, onde $t$ é dado em segundos e os argumentos das funções trigonométricas, em radianos.

Determine para $t = 8$ s os ângulos diretores coordenados $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$, que o eixo binormal ao plano osculador forma com os eixos cartesianos. Resolva o problema para a velocidade $\mathbf{v}_P$ e a aceleração $\mathbf{a}_P$ do ponto material, em função dos seus componentes cartesianos. O eixo binormal é paralelo a $\mathbf{v}_P \times \mathbf{a}_P$. Por quê?




**Problema 12.135**

## 12.8 MOVIMENTO CURVILÍNEO: COMPONENTES CILÍNDRICOS

Em alguns problemas de engenharia é conveniente expressar a posição de um ponto material em termos de coordenadas cilíndricas, $r$, $\theta$, $z$. Se o problema é restrito ao plano, usam-se as coordenadas polares $r$ e $\theta$.

***Coordenadas Polares.*** Podemos especificar a posição do ponto material $P$ mostrado na Figura 12.30*a* usando a *coordenada radial* $r$, que se estende da origem $O$ ao ponto $P$, e a *coordenada transversal* $\theta$, que é o ângulo, medido no sentido anti-horário, entre uma linha de referência fixa e o eixo $r$. O ângulo é geralmente medido em radianos ou graus (1 rad corresponde a 180°), embora nas equações apresentadas a seguir o ângulo seja expresso em radianos. Os sentidos positivos das coordenadas $r$ e $\theta$ são definidos pelos vetores unitários $\mathbf{u}_r$ e $\mathbf{u}_\theta$, respectivamente. O vetor $\mathbf{u}_r$ (ou o sentido positivo de $r$) aponta no sentido de $O$ para $P$. O vetor $\mathbf{u}_\theta$ (ou o sentido positivo de $\theta$) aponta no sentido de crescimento de $\theta$. Observemos que os dois vetores são perpendiculares entre si.

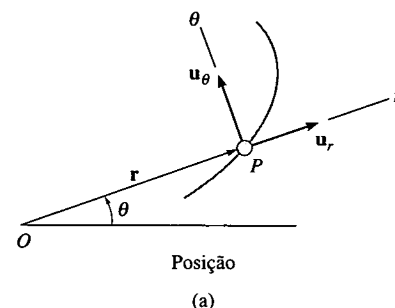



**Figura 12.30**

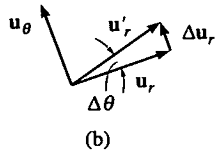
***Posição.*** Em cada instante a posição do ponto (Figura 12.30*a*) é definida pelo vetor de posição

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \tag{12.22}$$

***Velocidade.*** A velocidade instantânea $\mathbf{v}$ é dada pela derivada temporal do vetor de posição $\mathbf{r}$. Usando um ponto para representar derivadas temporais, temos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r$$

Para calcularmos $\dot{\mathbf{u}}_r$, observemos que apenas a direção de $\mathbf{u}_r$ muda em relação ao tempo, visto que por definição seu módulo é sempre igual a um. Logo, durante um tempo $\Delta t$, uma variação $\Delta r$ não provocará uma mudança de $\mathbf{u}_r$; todavia, uma mudança $\Delta\theta$ levará $\mathbf{u}_r$ para $\mathbf{u}'_r$, de modo que podemos escrever $\mathbf{u}'_r = \mathbf{u}_r + \Delta\mathbf{u}_r$ (Figura 12.30*b*), onde $\Delta\mathbf{u}_r$ representa a mudança de $\mathbf{u}_r$ com o tempo.



(b)

Para pequenos ângulos $\Delta\theta$, o vetor $\Delta\mathbf{u}_r$ tem a direção e o sentido de $\mathbf{u}_\theta$ e módulo $\Delta u_r \approx 1\ (\Delta\theta)$. Portanto, $\Delta\mathbf{u}r = \Delta\theta\mathbf{u}_\theta$, e assim

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \tag{12.23}$$

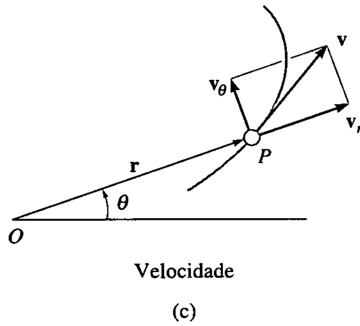
Com a Equação 12.23, a velocidade $\mathbf{v}$, escrita em termos de seus componentes, toma a forma

$$\boxed{\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta} \tag{12.24}$$

onde

$$\boxed{\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned}} \tag{12.25}$$

Esses componentes podem ser vistos graficamente na Figura 12.30*c*. O *componente radial* $\mathbf{v}_r$ é uma medida da taxa de aumento ou decréscimo do comprimento da coordenada radial $r$, isto é, $\dot{r}$; o *componente transversal* $\mathbf{v}_\theta$, por sua vez, pode ser interpretado como a taxa de variação do movimento ao longo de uma circunferência de raio $r$. Em particular, o termo $\dot{\theta} = d\theta/dt$ é denominado *velocidade angular*, pois indica a taxa temporal de variação do ângulo $\theta$. Sua unidade é o rad/s.



Velocidade

(c)

Uma vez que $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_\theta$ são mutuamente perpendiculares, o *módulo* da velocidade é dado por

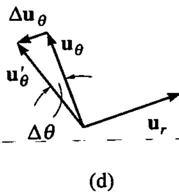
$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} \tag{12.26}$$

e a *direção* de $\mathbf{v}$ é, obviamente, a da tangente à trajetória em $P$ (Figura 12.30*c*).

***Aceleração.*** Derivando a Equação 12.24 em relação ao tempo e usando as equações 12.25, obtemos a aceleração do ponto material:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta$$

Para se calcular a derivada $\dot{\mathbf{u}}_\theta$ é necessário obter a mudança de direção do vetor $\mathbf{u}_\theta$, pois seu módulo é sempre igual a um. Durante o tempo $\Delta t$, uma mudança $\Delta r$ não afetará a direção do vetor; por sua vez, uma mudança $\Delta\theta$ levará $\mathbf{u}_\theta$ para $\mathbf{u}'_\theta$, que pode ser escrito como $\mathbf{u}'_\theta = \mathbf{u}_\theta + \Delta\mathbf{u}_\theta$ (Figura 12.30*d*). Para pequenos ângulos $\Delta\theta$, o vetor $\Delta\mathbf{u}_\theta$ tem direção e sentido de $-\mathbf{u}_r$ e módulo $\Delta u_\theta \approx 1\ (\Delta\theta)$. Portanto, $\Delta\mathbf{u}_\theta = -\Delta\theta\mathbf{u}_r$, e assim



(d)

**Figura 12.30**

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = -\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_r$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r \tag{12.27}$$

Com esse resultado e a Equação 12.23, a aceleração $\mathbf{a}$, escrita em termos de seus componentes, toma a forma

$$\boxed{\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta} \tag{12.28}$$

onde

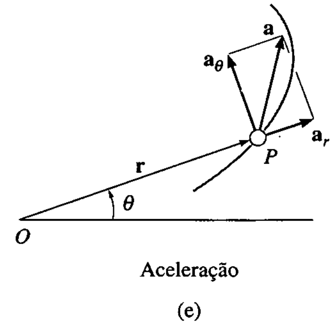
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad (12.29)$$

O termo $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2 = d/dt(d\theta/dt)$ é denominado *aceleração angular*, pois mede, em cada instante, a taxa temporal de variação da velocidade angular. Sua unidade de medida é o rad/s$^2$.

Como $\mathbf{a}_r$ e $\mathbf{a}_\theta$ são sempre mutuamente perpendiculares, o *módulo* da aceleração é dado por

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \qquad (12.30)$$

A *direção* e o *sentido* de **a** são determinados pela adição vetorial de seus dois componentes. Em geral, **a** *não* é tangente à trajetória (Figura 12.30*e*), pois, onde existir curvatura da trajetória haverá mudança na direção da velocidade.




Aceleração

(e)

**Figura 12.30**

***Coordenadas Cilíndricas.*** Se o ponto material $P$ se move ao longo de uma curva espacial, como mostrado na Figura 12.31, então sua posição pode ser especificada pelas três *coordenadas cilíndricas*, $r$, $\theta$, $z$. A coordenada $z$ é idêntica àquela usada para as coordenadas cartesianas. Como o vetor unitário que define sua direção, $\mathbf{u}_z$, é constante, as derivadas temporais desse vetor são nulas, e, portanto, a posição, velocidade e aceleração do ponto material podem ser escritas em termos de suas coordenadas cilíndricas como se segue:

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z$$

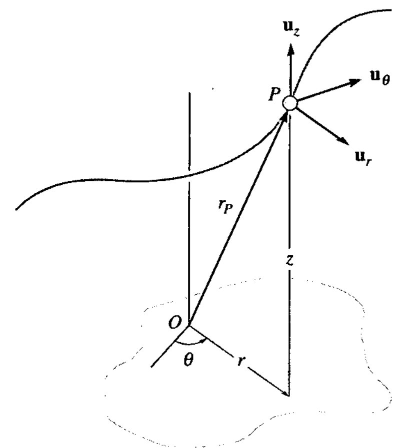



**Figura 12.31**

***Derivadas Temporais.*** As equações cinemáticas exigem que calculemos as derivadas temporais $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ para que possamos calcular os componentes $r$ e $\theta$ de **v** e **a**. Geralmente ocorrem dois tipos de problemas:

1. Se as coordenadas são especificadas como funções do tempo, isto é, se conhecemos as equações paramétricas $r = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$, então as derivadas temporais podem ser obtidas diretamente. Por exemplo, consideremos

$$r = 4t^2 \qquad \theta = (8t^3 + 6)$$
$$\dot{r} = 8t \qquad \dot{\theta} = 24t^2$$
$$\ddot{r} = 8 \qquad \ddot{\theta} = 48t$$

2. Se as funções do tempo não são dadas, então é necessário especificar a trajetória $r = f(\theta)$ e encontrar a *relação* entre as derivadas temporais usando a regra da cadeia do cálculo diferencial. Considere os seguintes exemplos:

$$r = 5\theta^2$$
$$\dot{r} = 10\theta\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 10[(\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta(\ddot{\theta})]$$
$$= 10\dot{\theta}^2 + 10\theta\ddot{\theta}$$

ou

$$r^2 = 6\theta^3$$
$$2r\dot{r} = 18\theta^2\dot{\theta}$$
$$2[(\dot{r})\dot{r} + r(\ddot{r})] = 18[(2\theta\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta^2(\ddot{\theta})]$$
$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} = 9(2\theta\dot{\theta}^2 + \theta^2\ddot{\theta})$$

Se duas das *quatro* derivadas temporais $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ são *conhecidas*, então as outras duas podem ser obtidas das equações para a primeira e a segunda derivadas de $r = f(\theta)$. Veja o Exemplo 12.19. Todavia, em alguns problemas, pode ser que *não* se conheçam duas dessas derivadas; em vez disso, são especificados os módulos da velocidade e da aceleração do ponto material. Se isso ocorre, as equações 12.26 e 12.30 [$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ e $a^2 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2$] podem ser usadas para se obter as relações necessárias entre $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$. Veja o Exemplo 12.20.



*O movimento helicoidal desse menino pode ser descrito usando-se coordenadas cilíndricas. A sua coordenada radial r é constante, a coordenada transversal θ aumenta com o tempo, conforme o menino gira em torno da vertical, enquanto sua altitude z decresce.*

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

### *Sistema de Coordenadas*

- As coordenadas polares são uma escolha adequada para resolver problemas para os quais são fornecidos dados referentes ao movimento angular da coordenada radial $r$. Algumas trajetórias também podem ser convenientemente descritas em termos dessas coordenadas.
- Para se usarem coordenadas polares, a origem é estabelecida num ponto fixo e a linha radial $r$ é orientada dessa origem para o ponto material.
- A coordenada transversal $\theta$ é medida a partir de uma reta fixa de referência para a linha radial.

### *Velocidade e Aceleração*

- Uma vez que $r$ e as quatro derivadas $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ tenham sido calculadas num dado instante, seus valores podem ser substituídos nas equações 12.25 e 12.29 para que os componentes radial e transversal de **v** e **a** sejam calculados.
- É muito importante usar a regra da cadeia do cálculo diferencial se for necessário tomar as derivadas temporais da função $r = f(\theta)$
- Movimentos em três dimensões exigem uma extensão simples do procedimento acima, para isso basta incluir $\dot{z}$ e $\ddot{z}$.

Além dos exemplos apresentados a seguir, outros envolvendo o cálculo de $a_r$ e $a_\theta$ podem ser encontrados nas seções de 'cinemática' dos exemplos 13.10 a 13.12.

## EXEMPLO 12.17

Um brinquedo de um parque de diversões (Figura 12.32*a*) consiste numa cadeira que gira numa trajetória circular horizontal de raio $r$ presa a um braço $OB$ que possui velocidade angular $\dot{\theta}$ e aceleração angular $\ddot{\theta}$. Determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração do passageiro. Despreze o tamanho do passageiro.

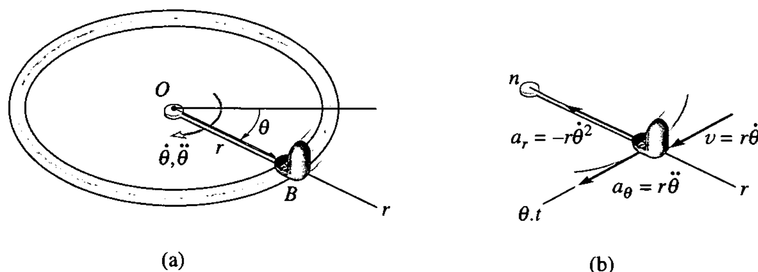



**Figura 12.32**

### SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Como o movimento angular do braço é informado, podemos usar coordenadas polares para a solução do problema (Figura 12.23*a*). Aqui $r$ e $\theta$ não estão relacionados, pois $r$ é o mesmo para todo $\theta$.

***Velocidade e Aceleração.*** As equações 12.25 e 12.29 serão usadas na solução, de modo que é necessário primeiro especificar as derivadas de primeira e segunda ordem de $r$ e $\theta$. Como $r$ é constante, temos

$$r = r \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

Logo:

$$v_r = \dot{r} = 0$$ ***Resposta***

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$ ***Resposta***

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2$$ ***Resposta***

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta}$$ ***Resposta***

A Figura 12.32*b* mostra esses resultados, assim como os eixos $n$, $t$, que neste caso especial de movimento circular são *colineares* com os eixos $r$ e $\theta$, respectivamente. Em particular, observemos que $v = v_\theta = v_t = r\dot{\theta}$. Do mesmo modo,

$$-a_r = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 + r\ddot{\theta}$$

## EXEMPLO 12.18

A haste $OA$ da Figura 12.33$a$ gira num plano horizontal de modo que $\theta = (t^3)$ rad. Ao mesmo tempo, o cursor $B$ desliza de O para $A$, tendo sua coordenada $r$ variando no tempo de acordo com $r = (100t^2)$ mm. Considerando em ambos os casos $t$ expresso em segundos, determine a velocidade e a aceleração do cursor para $t = 1$ s.

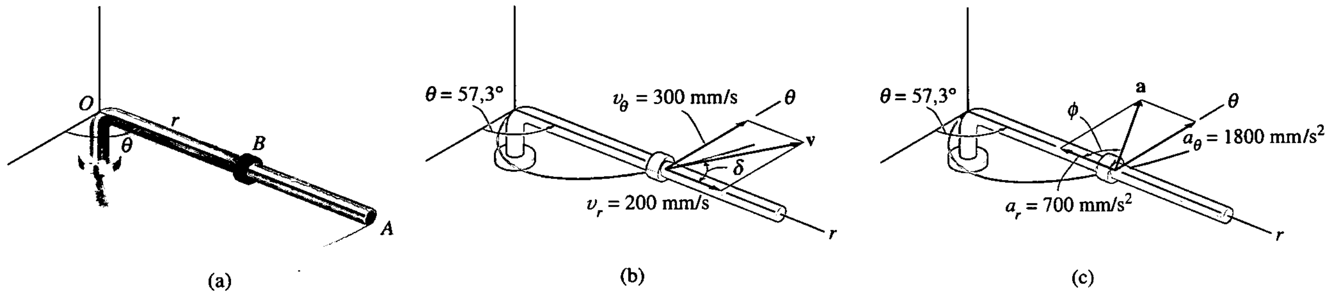



**Figura 12.33**

## SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Como as equações paramétricas da trajetória são conhecidas em termos do tempo, não é necessário relacionar $r$ com $\theta$.

***Velocidade e Aceleração.*** Determinando as derivadas temporais e calculando-as para $t = 1$ s, temos

$$r = 100t^2\Big|_{t=1\,\text{s}} = 100\text{ mm} \quad \theta = t^3\Big|_{t=1\,\text{s}} = 1\text{ rad} = 57{,}3°$$

$$\dot{r} = 200t\Big|_{t=1\,\text{s}} = 200\text{ mm/s} \quad \dot{\theta} = 3t^2\Big|_{t=1\,\text{s}} = 3\text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200\Big|_{t=1\,\text{s}} = 200\text{ mm/s}^2 \quad \ddot{\theta} = 6t\Big|_{t=1\,\text{s}} = 6\text{ rad/s}^2$$

Como mostrado na Figura 12.33$b$,

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta$$

$$= \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\}\text{ mm/s}$$

Logo o módulo de $\mathbf{v}$ é

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361\text{ mm/s}$$ ***Resposta***

$$\delta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56{,}3° \quad \delta + 57{,}3° = 114°$$ ***Resposta***

Como mostrado na Figura 12.33$c$,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

$$= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta$$

$$= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\} \text{ mm/s}^2$$

O módulo de **a** é, portanto,

$$a = \sqrt{(700)^2 + (1800)^2} = 1930 \text{ mm/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68{,}7° \quad (180° - \phi) + 57{,}3° = 169° \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 12.19

O holofote da Figura 12.34*a* joga luz sobre um muro que está a uma distância de 100 m. Determine os módulos da velocidade e da aceleração com que a mancha de luz desloca-se pela face do muro quando $\theta = 45°$. O holofote gira a uma taxa constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s.

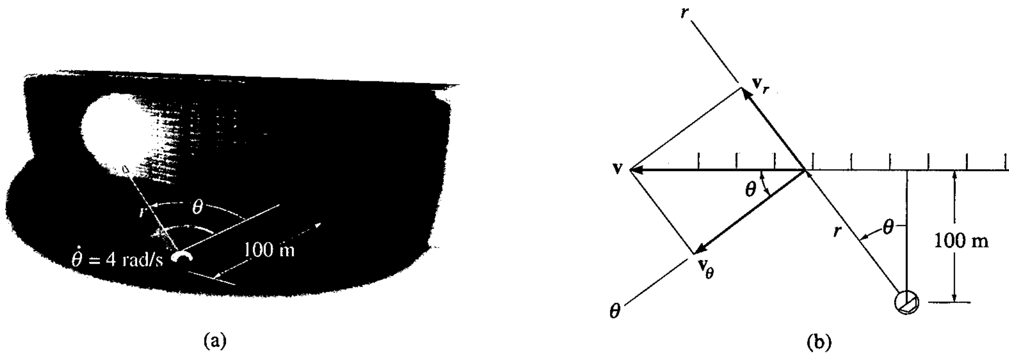



**Figura 12.34**

## SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Como a taxa angular do holofote é conhecida, podemos usar coordenadas polares para resolver este problema. Para encontrarmos as derivadas temporais necessárias relacionemos primeiro $r$ com $\theta$. Da Figura12.34*a*, essa relação é

$$r = 100/\cos\theta = 100 \sec\theta$$

***Velocidade e Aceleração.*** Usando a regra da cadeia e observando que $d(\sec\theta) = \sec\theta \,\text{tg}\,\theta \, d\theta$ e $d(\text{tg}\,\theta) = \sec^2\theta \, d\theta$, temos

$$\dot{r} = 100(\sec\theta \,\text{tg}\,\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = 100(\sec\theta \,\text{tg}\,\theta)\dot{\theta}(\text{tg}\,\theta)\dot{\theta} + 100 \sec\theta(\sec^2\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta})$$

$$+ 100 \sec\theta \,\text{tg}\,\theta(\ddot{\theta})$$

$$= 100 \sec\theta \,\text{tg}^2\theta(\dot{\theta})^2 + 100 \sec^3\theta(\dot{\theta})^2 + 100(\sec\theta \,\text{tg}\,\theta)\ddot{\theta}$$

Uma vez que $\dot{\theta} = 4$ rad/s = constante, então $\ddot{\theta} = 0$; assim, as equações anteriores, quando $\theta = 45^0$, resultam em

$$r = 100 \sec 45° = 141{,}4$$

$$\dot{r} = 400 \sec 45° \operatorname{tg} 45° = 565{,}7$$

$$\ddot{r} = 1.600(\sec 45° \operatorname{tg}^2 45° + \sec^3 45°) = 6.788{,}2$$

Como mostrado na Figura 12.34*b*,

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

$$= 565{,}7\mathbf{u}_r + 141{,}4(4)\mathbf{u}_\theta$$

$$= \{565{,}7\mathbf{u}_r + 565{,}7\mathbf{u}_\theta\} \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565{,}7)^2 + (565{,}7)^2}$$

$$= 800 \text{ m/s}$$

***Resposta***

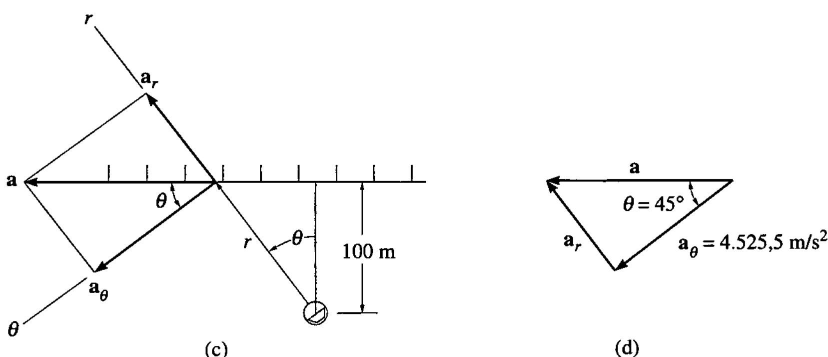



**Figura 12.34**

Como se vê na Figura 12.34*c*,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$

$$= [6788{,}2 - 141{,}4(4)^2]\mathbf{u}_r + [141{,}4(0) + 2(565{,}7)4]\mathbf{u}_\theta$$

$$= \{4525{,}5\mathbf{u}_r + 4525{,}5\mathbf{u}_\theta\} \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525{,}5)^2 + (4525{,}5)^2}$$

$$= 6.400 \text{ m/s}^2$$

***Resposta***

*Observação:* Também é possível obter $a$ sem ter de calcular $\ddot{r}$ (ou $a_r$). Como se pode ver na Figura 12.34*d*, uma vez que $a_\theta = 4.525{,}5$ m/s², então, por solução vetorial, $a = 4.525{,}5/\cos 45° = 6.400$ m/s².

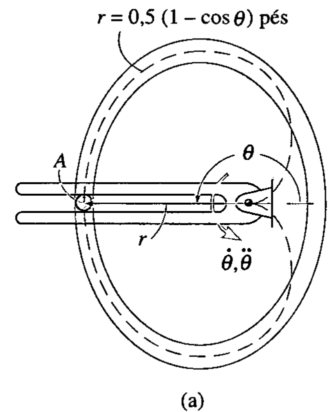
## EXEMPLO 12.20

Em virtude do movimento da haste bifurcada, a bola $A$ da Figura 12.35*a* desloca-se pela fenda, descrevendo uma trajetória que em parte é uma cardióide ($r = 0{,}5\ (1 - \cos\theta)$ pés), onde $\theta$ é dado em radianos. A velocidade da bola é $v = 4$ pés/s e sua aceleração é $a = 30$ pés/s² no instante em que $\theta = 180°$. Determine a velocidade angular $\dot{\theta}$ e a aceleração angular $\ddot{\theta}$ da haste.

### SOLUÇÃO

***Sistema de Coordenadas.*** Essa trajetória bastante incomum é mais bem expressa matematicamente em coordenadas polares — como feito aqui — do

que em coordenadas cartesianas. Mais ainda, como se pede para calcular $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, as coordenadas $r$ e $\theta$ se tornam uma escolha óbvia.




***Velocidade e Aceleração.*** Usando a regra da cadeia, podemos calcular as derivadas temporais de $r$:

$$r = 0{,}5(1 - \cos\theta)$$
$$\dot{r} = 0{,}5(\text{sen}\,\theta)\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 0{,}5(\cos\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 0{,}5(\text{sen}\,\theta)\ddot{\theta}$$

Calculando esses resultados para $\theta = 180°$, temos

$$r = 1 \text{ pé} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = -0{,}5\dot{\theta}^2$$

Como $v = 4$ pés/s, então o uso da Equação 12.26 fornece para $\dot{\theta}$

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$
$$4 = \sqrt{(0)^2 + (1\dot{\theta})^2}$$
$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$$

***Resposta***

De maneira similar, $\ddot{\theta}$ pode ser obtida usando-se a Equação 12.30.

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$
$$30 = \sqrt{[-0{,}5(4)^2 - 1(4)^2]^2 + [1\ddot{\theta} + 2(0)(4)]^2}$$
$$(30)^2 = (-24)^2 + \ddot{\theta}^2$$
$$\ddot{\theta} = 18 \text{ rad/s}^2$$

***Resposta***

Os vetores **v** e **a** estão na Figura 12.35*b*.

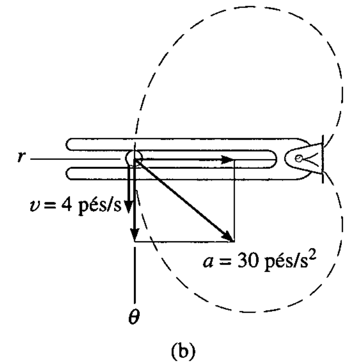



**Figura 12.35**

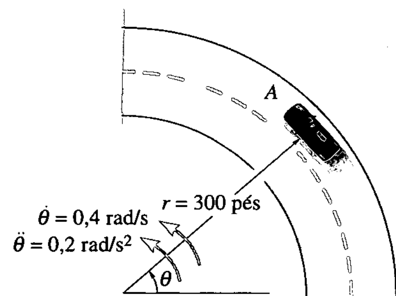
## PROBLEMAS

***12.136.** A taxa temporal de variação da aceleração é muitas vezes usada como um meio de se medir o desconforto de um passageiro. Calcule esse vetor, $\dot{\mathbf{a}}$, em termos de seus componentes cilíndricos, usando a Equação 12.32.

**12.137.** A posição de um ponto material é descrita por meio de coordenadas polares, $r = 4\,(1 + \text{sen}\,t)$ m e $\theta = (2e^{-t})$ rad, onde $t$ é dado em segundos e o argumento da função seno, em radianos. Determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração quando $t = 2$ s.

**12.138.** Um ponto material move-se numa trajetória circular de raio igual a 4 pol. Sua posição como função do tempo é dada por $\theta = \cos 2t$, onde $\theta$ é dado em radianos e $t$, em segundos. Determine o módulo da aceleração do ponto para $\theta = 30°$.

**12.139.** Um carro desloca-se numa curva circular de raio $r = 300$ pés. Num dado instante, sua taxa angular de rotação é $\dot{\theta} = 0{,}4$ rad/s e cresce a uma taxa $\ddot{\theta} = 0{,}2$ rad/s². Determine os módulos da velocidade e da aceleração do carro nesse instante.




**Problemas 12.139**

***12.140.** Um ponto material se desloca numa trajetória tal que $r = (2\cos t)$ pés e $\theta = (t/2)$ rad, onde $t$ é dado em segundos. Trace a trajetória $r = f(\theta)$ e determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração.

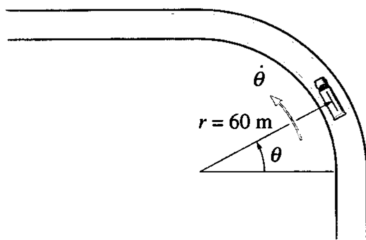
**12.141.** A posição de um ponto material é definida pelas coordenadas polares $r = (2\,\text{sen}\,2\theta)$ m e $\theta = (4t)$ rad, onde $t$ é dado em segundos. Determine os componentes radiais e transversais da velocidade e aceleração para $t = 1$ s.

**12.142.** Um ponto material está se movendo numa trajetória circular de 400 mm de raio. Sua posição como função do tempo é dada por $\theta = (2t^2)$ rad, onde $t$ é dado em segundos. Determine o módulo da aceleração do ponto para $\theta = 30°$. O ponto material saiu do repouso em $\theta = 0°$.

**12.143.** A posição de um ponto material que se move no plano $x$–$y$ é dada por $\mathbf{r} = [2t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}]$ pés, onde $t$ é dado em segundos. Determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração do ponto para $t = 2$ s.

***12.144.** Um caminhão com velocidade escalar constante de 20 m/s trafega numa curva circular horizontal de raio $r$ = 60 m. Determine a taxa angular de rotação $\dot{\theta}$ da linha radial $r$ e o módulo da aceleração do caminhão.

**12.145.** Um caminhão com velocidade escalar constante de 20 m/s trafega numa curva circular horizontal de raio $r$ = 60 m. Se a velocidade escalar do caminhão aumenta a uma taxa de 3 m/s$^2$, determine os componentes radial e transversal de sua aceleração.




**Problemas 12.144/145**

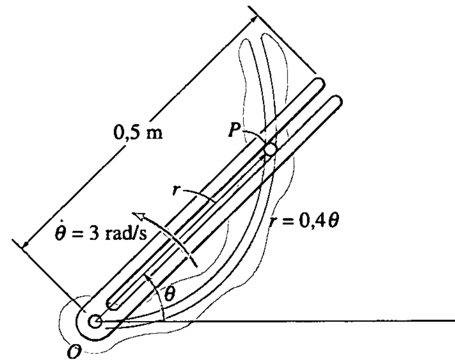
**12.146.** Um ponto material desloca-se numa trajetória circular com 6 polegadas de raio. Sua posição, como função do tempo, é dada por $\theta$ = sen $3t$, onde $\theta$ é dado em radianos, o argumento do seno é dado em graus e $t$, em segundos. Determine a aceleração do ponto em $\theta = 30°$. O ponto parte do repouso em $\theta = 0°$.

**12.147.** Como resultado da velocidade angular constante $\dot{\theta}$ = 3 rad/s, o garfo movimenta o pino $P$ ao longo da espiral $r = (0{,}4\ \theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração do pino no instante em que $\theta = \pi/3$ rad.

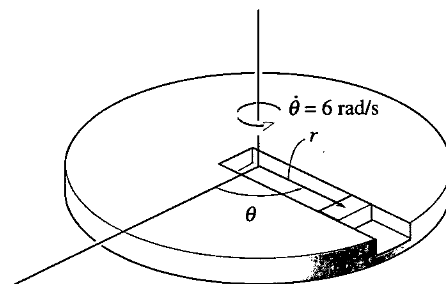
***12.148.** Resolva o Problema 12.147, considerando que o garfo tem uma aceleração angular $\ddot{\theta}$ = 8 rad/s$^2$ quando $\dot{\theta}$ = 3 rad/s e $\theta = \pi/3$ rad.

**12.149.** Como resultado da velocidade angular constante $\dot{\theta}$ = 3 rad/s, o garfo movimenta o pino $P$ ao longo da espiral $r = (0{,}4\ \theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Determine a velocidade e a aceleração do pino no instante em que ele deixa a fenda, isto é, quando $r$ = 0,5 m.

**12.150.** Um pequeno bloco situado na fenda da plataforma se move radialmente para fora com uma velocidade $\dot{r} = (4t)$ m/s, onde $t$ é dado em segundos. A plataforma gira a uma taxa constante de 6 rad/s. Se o bloco parte do repouso no centro, determine os módulos da sua velocidade e aceleração quando $t$ = 1 s.

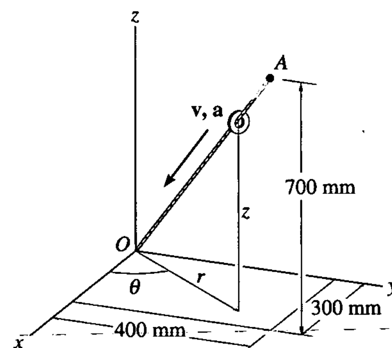



**Problemas 12.147/148/149**



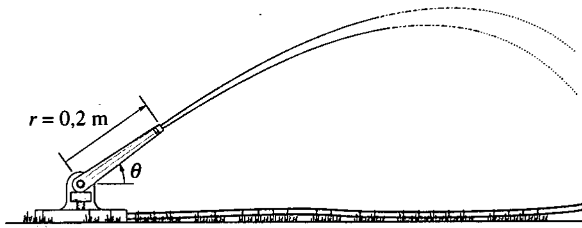

**Problema 12.150**

**12.151.** A pequena arruela escorrega, descendo pelo fio $OA$. Quando ela está no ponto médio de $OA$, sua velocidade é de 200 mm/s e sua aceleração, de 10 mm/s$^2$. Expresse a velocidade e a aceleração da arruela, em termos de seus componentes cilíndricos.



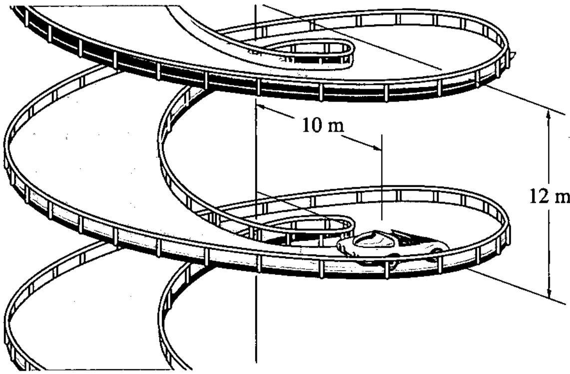

**Problema 12.151**

***12.152.** Num dado instante, o irrigador está girando com uma velocidade angular $\dot{\theta}$ = 2 rad/s e uma aceleração de $\ddot{\theta}$ = 3 rad/s$^2$. A água escoa a uma taxa constante de 3 m/s pelo bocal mantido num plano vertical. Determine os módulos da velocidade e da aceleração de uma partícula de água quando ela deixa o bocal em $r$ = 0,2 m.



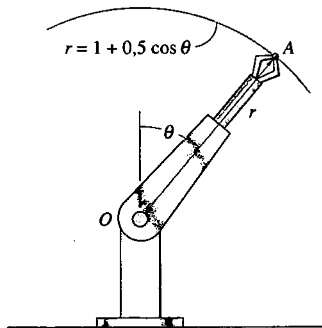

**Problema 12.152**

**12.153.** O automóvel está descendo pela rampa helicoidal de um estacionamento a uma velocidade de 1,5 m/s. Se o passo da rampa é de 12 m, isto é, descem-se 12 m a cada volta completa e $\theta = 2\pi$ rad, determine o módulo da aceleração do carro ($r$ = 10 m). *Dica*: como parte da solução, observe que a tangente à rampa em qualquer ponto forma com a horizontal um ângulo $\phi = \text{tg}^{-1}(12/[2\pi(10)]) = 10{,}81°$. Use esse resultado para determinar os componentes $v_\theta$ e $v_z$ da velocidade, que, por sua vez, serão usados para determinar $\dot{\theta}$ e $\dot{z}$.




**Problema 12.153**

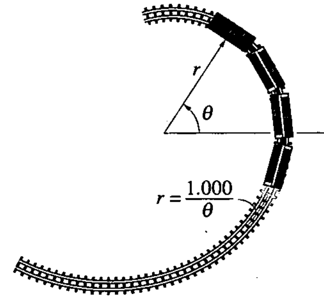
**12.154.** Graças à ação telescópica, a extremidade de um braço de robô industrial descreve a curva de *limaçon* $r = (1 + 0{,}5 \cos\theta)$ m. No instante em que $\theta = \pi/4$, o braço tem uma velocidade angular $\dot{\theta} = 0{,}6$ rad/s e está aumentando a uma taxa $\ddot{\theta} = 0{,}25$ rad/s$^2$. Determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração do objeto $A$, preso pela garra, no instante considerado.




**Problema 12.154**

**12.155.** O trem percorre um trecho de estrada que tem a forma de uma espiral, de raio $r = (1.000/\theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Se o trem se desloca a uma velocidade constante de 20 m/s, determine os componentes radial e transversal de sua velocidade para $\theta = (9\pi/4)$ rad.

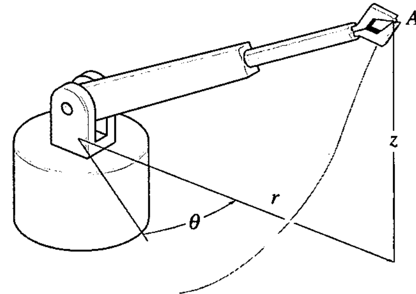
***12.156.** O trem percorre um trecho de estrada que tem a forma de uma espiral, de raio $r = (1.000/\theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Se a velocidade angular é constante ($\dot{\theta} = 0{,}2$ rad/s), determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração do trem quando $\theta = (9\pi/4)$ rad.




**Problemas 12.155/156**

**12.157.** O braço do robô tem um comprimento fixo de modo que $r$ = 3 pés. Sua garra $A$ se move ao longo da curva $z$ = (3 sen $4\theta$) pés, onde $\theta$ é dado em radianos. Se $\theta = (0{,}5t)$ rad, onde $t$ é dado em segundos, determine os módulos da velocidade e da aceleração da garra quando $t$ = 3 s.

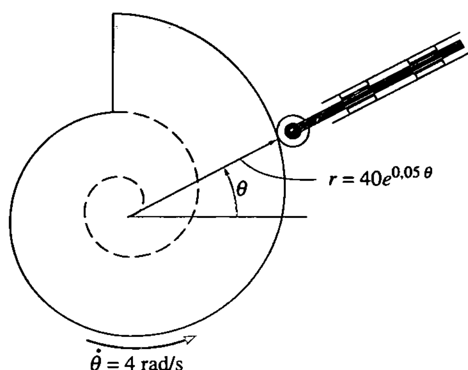
**12.158.** Durante um pequeno intervalo de tempo, o braço do robô se estende a uma taxa constante tal que $\dot{r} = 1{,}5$ pés/s quando $r$ = 3 pés, $z = (4t^2)$ pés e $\theta = 0{,}5t$ rad, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração da garra $A$ para $t$ = 3 s.




**Problemas 12.157/158**

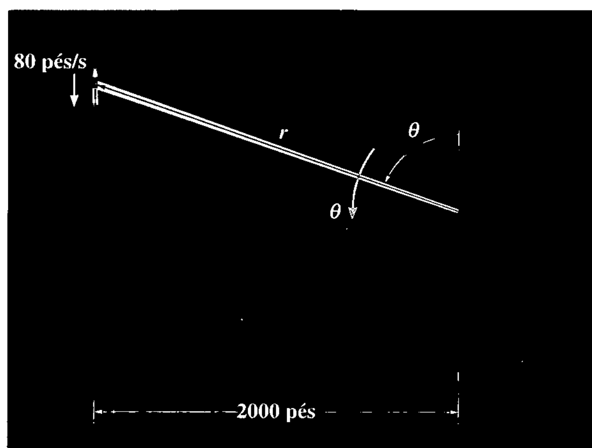
**12.159.** Uma parte da superfície da came pode ser representada pela espiral logarítmica $r = (40e^{0{,}05\theta})$ mm, onde $\theta$ é dado em radianos. Se a came gira com velocidade angular constante $\dot{\theta}$ = 4 rad/s, determine os módulos da velocidade e da aceleração do seguidor no instante em que $\theta$ = 30°.

***12.160.** Resolva o Problema 12.159, considerando que a came tem aceleração angular $\ddot{\theta}$ = 2 rad/s$^2$, quando sua velocidade angular é $\dot{\theta}$ = 4 rad/s e a sua coordenada angular é $\theta$ = 30°.




**Problemas 12.159/160**

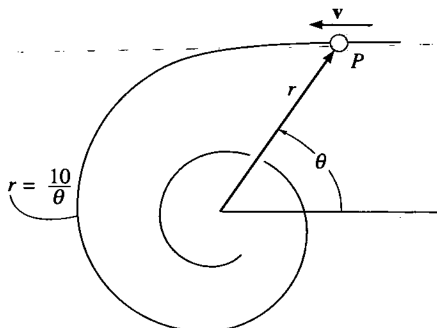
**12.161.** O holofote de um barco ancorado a 2.000 pés da praia ilumina um carro que se desloca numa estrada retilínea a uma velocidade escalar constante de 80 pés/s. Determine a velocidade angular do holofote quando o automóvel está a uma distância $r$ = 3.000 pés do barco.




**Problema 12.161**

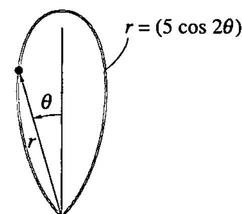
**12.162.** O carro do Problema 12.161 está sendo acelerado a uma taxa de 15 pés/s$^2$ no instante em que $r$ = 3.000 pés. Determine a correspondente aceleração angular do holofote.

**12.163.** O ponto material $P$ se desloca ao longo da trajetória em espiral $r = (10/\theta)$ pés, onde $\theta$ é expresso em radianos. Se o ponto se mantém a uma velocidade escalar constante de 20 pés/s, determine os módulos de $v_r$ e $v_\theta$ como funções de $\theta$. Calcule também esses módulos para $\theta$ = 1 rad.



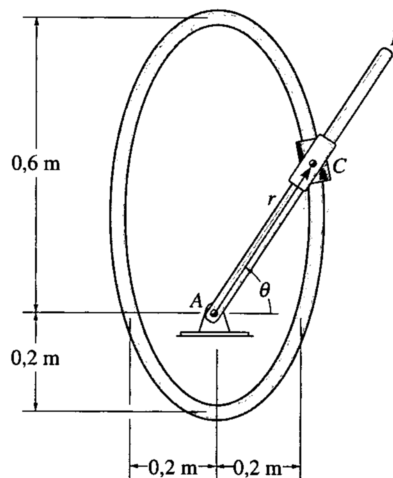

**Problema 12.163**

***12.164.** Um ponto material se desloca numa porção de um 'trevo de quatro folhas' definida pela equação $r = (5 \cos 2\theta)$ m. Considerando que a velocidade da reta coordenada radial é $\dot{\theta} = (3t^2)$ rad/s, onde $t$ é dado em segundos, determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração do ponto no instante em que $\theta = 30°$. Considere que $\theta = 0$ quando $t = 0$.



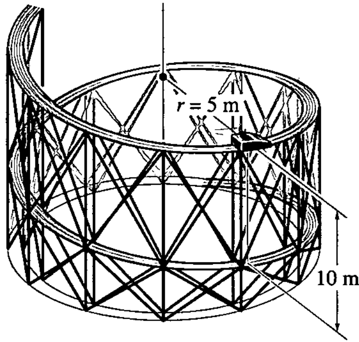

**Problema 12.164**

■**12.165.** A junta dupla $C$ é articulada de modo que um colar desliza sobre uma barra fixa, enquanto o outro desliza sobre uma barra girante $AB$. A velocidade angular de $AB$ é dada por $\dot{\theta} = (e^{0,5t^2})$ rad/s, onde $t$ é dado em segundos, e a trajetória definida pela barra fixa é $r = |0{,}4 \operatorname{sen} \theta + 0{,}2|$ m. Determine os componentes radiais e transversais da velocidade e da aceleração da junta quando $t$ = 1 s. Em $t = 0$, $\theta = 0$. Use a regra de Simpson para determinar $\theta$ para $t$ = 1 s.



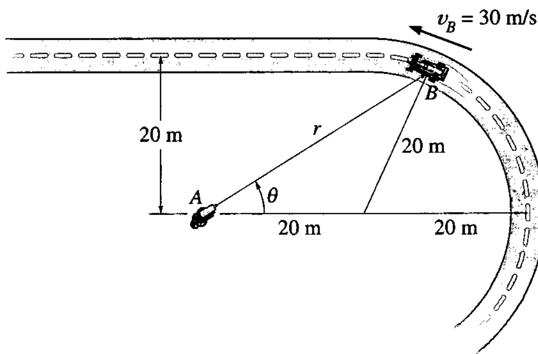

**Problema 12.165**

**12.166.** O carrinho desce a rampa helicoidal com uma velocidade escalar de 6 m/s. Se ele desce uma altura de 10 m para cada volta completa ($\theta = 2\theta$), determine o módulo de sua aceleração *Dica:* como parte da solução, observe que, em qualquer ponto, a tangente à rampa forma um ângulo $\phi = \text{tg}^{-1}(10/[2\pi(5)]) = 17{,}66°$ com a horizontal. Use essa informação para determinar os componentes $v_z$ e $v_\theta$ da velocidade, que, por sua vez, serão utilizados para determinar $\dot{\theta}$ e $\dot{z}$.



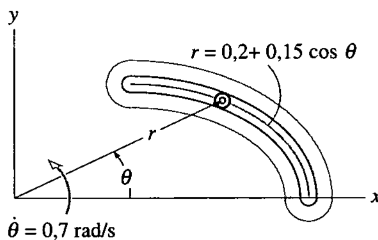

Problema 12.166

**12.167.** Uma câmara situada em $A$ segue o movimento do carro de corrida $B$, que está se deslocando no trecho curvo da pista a uma velocidade de 30 m/s. Determine a taxa $\dot{\theta}$ com que a câmara gira para se manter direcionada para o carro no instante em que $\theta = 30°$.



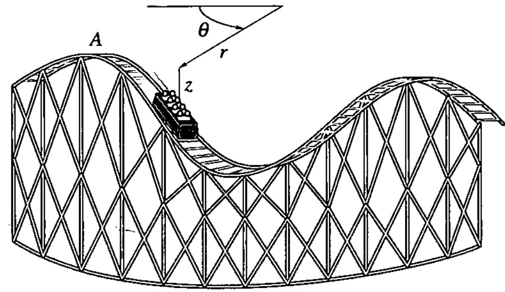

Problema 12.167

***12.168.** O pino segue a trajetória descrita pela equação $r = (0{,}2 + 0{,}15 \cos \theta)$ m. No instante em que $\theta = 30°$, a velocidade e a aceleração angulares são $\dot{\theta} = 0{,}70$ rad/s e $\ddot{\theta} = 0{,}5$ rad/s$^2$, respectivamente. Considerando que o tamanho do pino é desprezível, determine os módulos de sua velocidade e aceleração nesse instante.



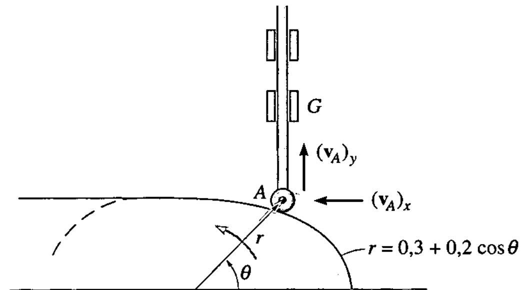

Problema 12.168

**12.169.** Durante um pequeno intervalo de tempo, a posição do carrinho é definida pelas equações $r = 25$ m, $\theta = (0{,}3t)$ rad e $z = (-8 \cos \theta)$ m, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do carrinho quando $t = 4$ s.



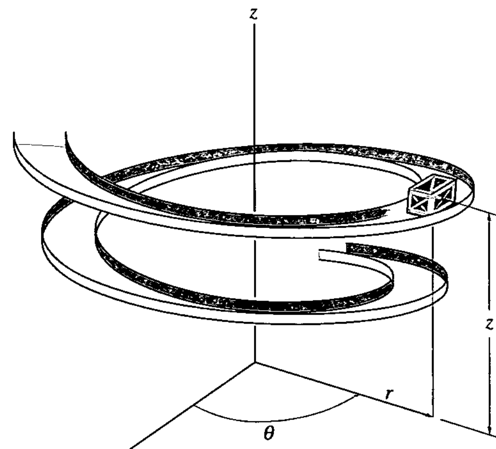

Problema 12.169

**12.170.** O maquinismo de uma máquina foi construído de modo que o rolete $A$, de tamanho desprezível, segue a superfície da came descrita pela equação $r = (0{,}3 + 0{,}2 \cos \theta)$ m. Se $\dot{\theta} = 0{,}50$ rad/s e $\ddot{\theta} = 0$, determine os módulos da velocidade e da aceleração do rolete no instante em que $\theta = 30°$. Calcule também os componentes $(\mathbf{v}_A)_x$ e $(\mathbf{v}_A)_y$ da velocidade do rolete nesse mesmo instante. A barra na qual o rolete se prende permanece vertical e pode subir e descer com o auxílio de guias que se transladam horizontalmente para a esquerda.




Problema 12.170

**12.171.** O engradado desliza sobre uma rampa helicoidal de modo que suas coordenadas $r$ e $z$ são definidas, respectivamente, por $r = (0{,}5z)$ pés e $z = (100 - 0{,}1t^2)$ pés, onde $t$ é dado em segundos. Se a taxa de rotação em torno do eixo $z$ é $\dot{\theta} = 0{,}04\pi t$ rad/s, determine os módulos da velocidade e da aceleração do engradado no instante em que $z = 10$ pés.




Problema 12.171

## 12.9 ANÁLISE DE MOVIMENTOS ABSOLUTOS DEPENDENTES

Em alguns tipos de problemas o movimento de um ponto material *depende* do movimento correspondente de outro ponto material. Essa dependência geralmente ocorre quando os pontos estão interligados por cordas ou cabos flexíveis e inextensíveis que passam por roldanas. Por exemplo, o movimento do bloco $A$ descendo o plano inclinado (Figura 12.36) gera o movimento de subida do bloco $B$ no outro plano inclinado. Podemos equacionar este problema, começando por especificar as posições por meio das *coordenadas de posição* $s_A$ e $s_B$. Observemos que cada um dos eixos coordenados é estabelecido (1) a partir de um ponto *fixo*, $O$, ou de uma linha de referência *fixa*, (2) com a direção e o sentido do movimento do respectivo bloco. Sendo $l_T$ o comprimento total da corda, então, as coordenadas de posição estão inter-relacionadas pela equação

$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T \tag{12.31}$$

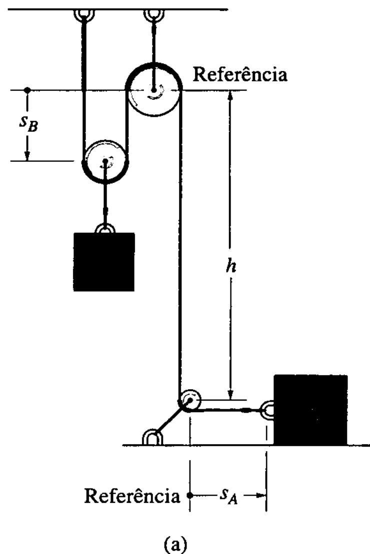



**Figura 12.37**

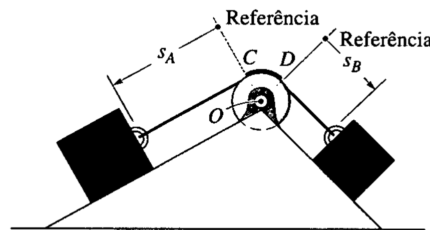



**Figura 12.36**

onde $l_{CD}$ é o comprimento da corda que passa sobre o arco $CD$ da polia. Calculando a derivada temporal da equação acima e observando que (a) $l_T$ e $l_{CD}$ *permanecem constantes* e (b) $s_A$ e $s_B$ medem os comprimentos dos trechos variáveis da corda, temos

$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad v_B = -v_A$$

O sinal negativo indica que quando a velocidade do bloco $A$ é para baixo, isto é, no sentido em que $s_A$ aumenta, a velocidade correspondente de $B$ é para cima, isto é, no sentido em que $s_B$ decresce.

Derivando ambos os membros da equação anterior que relaciona as velocidades, obtemos a relação correspondente entre as acelerações:

$$a_B = -a_A$$



*O movimento do bloco nesta torre de petróleo depende do movimento do cabo conectado ao guincho que o opera. É importante sabermos relacionar esses movimentos para determinarmos a potência necessária para o guincho e a força no cabo provocada por movimentos acelerados.*

A Figura 12.37*a* mostra um exemplo mais complexo de movimento dependente de dois blocos. Neste caso, a posição do bloco $A$ é especificada por $s_A$ e a posição da *extremidade superior* da corda que prende $B$ é definida por $s_B$. Os eixos coordenados foram escolhidos (1) tomando-se pontos ou linhas de referência *fixos*, (2) adotando-se as direções dos movimentos dos respectivos blocos e (3) considerando-se sentidos positivos para a direita ($s_A$) e para baixo ($s_B$). Durante o movimento, os comprimentos dos trechos da corda que estão em contato com as roldanas *permanecem constantes*. Se $l$ representa o comprimento total da corda menos os comprimentos desses trechos, então as coordenadas de posição podem ser relacionadas pela equação

$$2s_B + h + s_A = l \tag{12.32}$$

Como $l$ e $h$ são constantes durante o movimento, derivações sucessivas da equação anterior nos fornecem

$$2v_B = -v_A \qquad 2a_B = -a_A$$

Logo, quando $B$ desce ($+s_B$), $A$ se desloca para a esquerda ($-s_A$) duas vezes mais rápido.

Este exemplo também pode ser resolvido definindo-se a posição do bloco $B$ a partir do centro da polia inferior (ponto fixo), como se mostra na Figura 12.37*b*. Neste caso,

$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

Donde, por derivações sucessivas,

$$2v_B = v_A \quad 2a_B = a_A$$

Neste caso os sinais são os mesmos. Por quê?

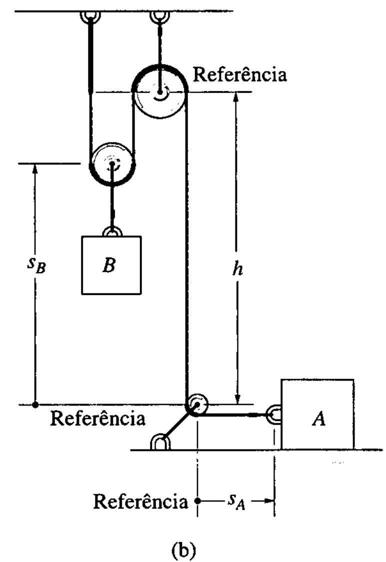



**Figura 12.37**

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

O método que relaciona os movimentos dependentes de dois pontos materiais pode ser realizado usando-se escalares algébricos ou coordenadas de posição, desde que cada ponto material tenha movimento retilíneo. Nesse caso, as direções se mantêm constantes, e portanto, somente os módulos e os sentidos das velocidades e acelerações podem se alterar. Adota-se o seguinte procedimento.

***Equação das Coordenadas de Posição***

- Estabeleça coordenadas de posição que têm suas origens em pontos *fixos* ou linhas de referência *fixas*.
- *Não é necessário* que a *origem* seja a *mesma* para ambos os eixos, mas é *importante* que cada eixo tenha a *direção do movimento* do respectivo ponto material.
- Usando geometria ou trigonometria, relacione as coordenadas com o comprimento total da corda, $l_T$, ou com a porção $l$ da corda que *exclui* os trechos cujos comprimentos não mudam conforme os pontos materiais se movem — como os trechos em contato com as polias.
- Se um problema envolve um *sistema* de duas ou mais cordas em contato com polias, então a posição de um ponto de uma corda deve ser relacionada com a de um ponto de outra corda usando-se o procedimento que acabamos de descrever. Equações separadas devem ser escritas para um comprimento fixo de cada corda do sistema e as posições dos dois pontos materiais são então relacionados por essas equações (veja os exemplos 12.22 e 12.23).

***Derivadas Temporais***

- Duas derivações temporais sucessivas das equações para as coordenadas de posição fornecem as equações para a velocidade e para aceleração que relacionam os movimentos dos dois pontos materiais.
- Os sinais dos termos nessas equações deverão ser consistentes com aqueles especificados como sentidos positivos e negativos das coordenadas de posição.

## EXEMPLO 12.21

Determine a velocidade do bloco $A$ na Figura 12.38, supondo que o bloco $B$ sobe com velocidade de 6 pés/s.

## SOLUÇÃO

***Equação para as Coordenadas de Posição.*** Existe *apenas uma corda* com trechos de comprimentos variáveis. Usaremos coordenadas de posição $s_A$ e $s_B$, cada uma delas medida a partir de um ponto fixo ($C$ ou $D$), num eixo tomado

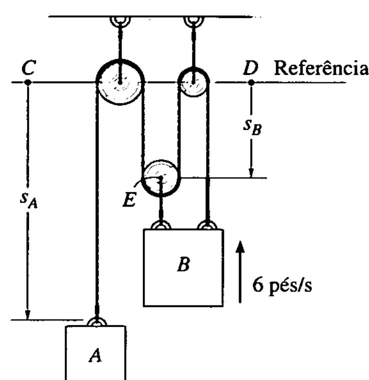



Figura 12.38

ao longo da *trajetória* do respectivo bloco. Mediremos, em particular, $s_B$ de $D$ até $E$, pois o movimento de $B$ é o *mesmo* de $E$.

Os trechos da corda que estão em contato com as roldanas permanecem com seus comprimentos inalterados, portanto podem ser desconsiderados na análise. O comprimento restante, $l$, que também é constante, relaciona-se com as coordenadas $s_A$ e $s_B$ pela equação

$$s_A + 3s_B = l$$

***Derivada Temporal.*** Derivando a equação acima, em relação ao tempo, temos

$$v_A + 3v_B = 0$$

Assim, quando $v_B = -6$ pés (para cima),

$$v_A = 18 \text{ pés/s} \downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## EXEMPLO 12.22

Determine a velocidade do bloco $A$ da Figura 12.39, supondo que o bloco $B$ tem uma velocidade de 6 pés/s para cima.

Figura 12.39

## SOLUÇÃO

***Equação para as Coordenadas de Posição.*** As posições dos blocos $A$ e $B$ são definidas pelas coordenadas $s_A$ e $s_B$. Uma vez que o sistema envolve *duas* cordas, é necessário usar uma terceira coordenada, $s_C$, para se relacionar $s_A$ com $s_B$. Em outras palavras, o comprimento de uma das cordas pode ser expresso em termos de $s_A$ e $s_C$ e o da outra corda, em termos de $s_B$ e $s_C$.

Os trechos da corda que estão em contato com as roldanas não serão levados em conta na análise. Por quê? Para os comprimentos restantes, digamos $l_1$ e $l_2$, temos

$$s_A + 2s_C = l_1 \qquad s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

Eliminando $s_C$, obtemos uma equação relacionando as posições dos dois blocos, isto é,

$$s_A + 4s_B = 2l_2 + l_1$$

***Derivada Temporal.*** A derivada temporal dessa equação nos fornece

$$v_A + 4v_B = 0$$

de modo que, quando $v_B = -6$ pés/s (para cima),

$$v_A = +24 \text{ pés/s} = 24 \text{ pés/s} \downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## EXEMPLO 12.23

Determine a velocidade com que o bloco $B$ da Figura 12.40 sobe, supondo que a extremidade $A$ da corda é puxada com uma velocidade de 2 m/s.

## SOLUÇÃO

***Equação para as Coordenadas de Posição.*** A posição do ponto $A$ é definida por $s_A$ e a de $B$, por $s_B$, pois o ponto $E$ na polia tem o *mesmo movimento* de $B$. Ambas as coordenadas são medidas a partir de uma linha de referência horizontal que passa pelo pino *fixo* na polia $D$. Uma vez que o sistema contém *duas* cordas, as coordenadas $s_A$ e $s_B$ não podem ser relacionadas diretamente. Estabelecendo uma terceira coordenada, $s_C$, podemos expressar o comprimento de uma das cordas em termos de $s_B$ e $s_C$, e o comprimento da outra corda, em termos de $s_A$, $s_B$ e $s_C$.

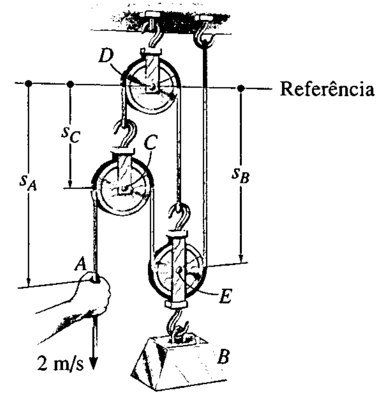



Figura 12.40

Excluindo-se os trechos que estão em contato com as roldanas da Figura 12.40, os comprimentos restantes que não variam, $l_1$ e $l_2$ (juntamente com o comprimento do gancho), podem ser expressos como

$$s_C + s_B = l_1$$

$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_2$$

Eliminando $s_C$, temos

$$s_A + 4s_B = l_2 + 2l_1$$

Essa equação relaciona a posição $s_B$ do bloco $B$ com o a posição $s_A$ do ponto $A$.

***Derivada Temporal.*** A derivada temporal da equação anterior nos fornece

$$v_A + 4v_B = 0$$

donde, quando $v_A = 2$ m/s (para baixo),

$$v_B = -0{,}5 \text{ m/s} = 0{,}5 \text{ m/s} \uparrow$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 12.24

Um homem localizado em $A$ iça um cofre caminhando para a direita com velocidade constante de 0,5 m/s (Figura 12.41). Determine a velocidade e a aceleração do cofre quando ele atinge a altura de 10 m no ponto $E$. A corda tem 30 m de comprimento e passa por uma pequena polia em $D$.

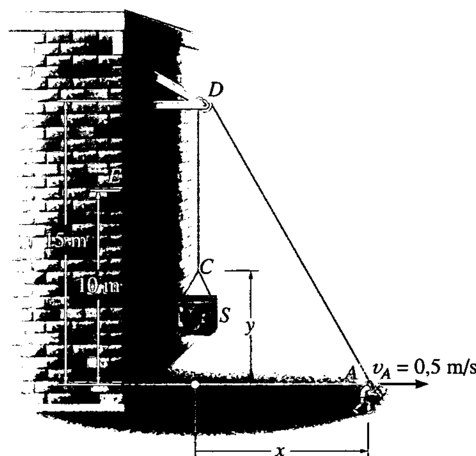



Figura 12.41

## SOLUÇÃO

***Equação para as Coordenadas de Posição.*** Este problema difere dos anteriores porque o trecho *DA* da corda varia não só em módulo, como também em direção. As extremidades da corda, que definem as posições de *S* e *A*, são especificadas pelas coordenadas *x* e *y* medidas a partir de um ponto fixo e tomadas sobre *eixos ao longo das trajetórias* das extremidades da corda.

As coordenadas *x* e *y* podem ser relacionadas, pois a corda tem um comprimento fixo $l = 30$ m, que em todo instante é igual ao comprimento de *DA* somado ao de *CD*. Usando o teorema de Pitágoras para determinar $l_{DA}$, temos $l_{DA} = \sqrt{(15)^2 + x^2}$; também $l_{CD} = 15 - y$. Logo:

$$l = l_{DA} + l_{CD}$$

$$30 = \sqrt{(15)^2 + x^2} + (15 - y)$$

$$y = \sqrt{225 + x^2} - 15 \qquad (1)$$

***Derivadas Temporais.*** Derivando em relação ao tempo e usando a regra da cadeia, com $v_S = dy/dt$ e $v_A = dx/dt$, obtemos

$$v_S = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{225 + x^2}}v_A \qquad (2)$$

O valor de *x* para $y = 10$ m pode ser obtido da Equação 1, resultando em $x = 20$ m. Logo, da Equação 2, com $v_A = 0{,}5$ m/s,

$$v_S = \frac{20}{\sqrt{225 + (20)^2}}(0{,}5) = 0{,}4 \text{ m/s} = 400 \text{ mm/s}\uparrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A aceleração é determinada tomando-se a derivada temporal da Equação 2. Visto que $v_A$ é constante, $a_A = dv_A/dt$, temos

$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}}\right]xv_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]x\frac{dv_A}{dt} = \frac{225v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

Com $x = 20$ m e $v_A = 0{,}5$ m/s, a aceleração resulta em

$$a_S = \frac{225(0{,}5 \text{ m/s})^2}{[225 + (20 \text{ m})^2]^{3/2}} = 0{,}00360 \text{ m/s}^2 = 3{,}60 \text{ mm/s}^2\uparrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observemos que a velocidade constante de *A* causa uma aceleração em *C*, pois $\mathbf{v}_A$ causa uma variação de comprimento e direção no trecho *DA*.

## 12.10 ANÁLISE DO MOVIMENTO RELATIVO DE DOIS PONTOS MATERIAIS USANDO-SE REFERENCIAIS EM TRANSLAÇÃO

Ao longo deste capítulo, utilizou-se um único referencial fixo para se determinar o movimento absoluto de um ponto material. Existem muitas situações, entretanto, em que a trajetória do ponto é complexa, de modo que pode ser

conveniente analisar o movimento por partes, utilizando-se dois ou mais sistemas de referência. Por exemplo, o movimento de uma ponta da hélice de um avião em vôo pode ser descrito mais facilmente se em primeiro lugar observarmos o movimento do avião em relação um referencial fixo e, então, superpormos (vetorialmente) a ele o movimento circular da ponta da hélice medido num referencial ligado ao avião. Qualquer tipo de coordenadas — cartesianas, cilíndricas etc. — pode ser utilizado na descrição desses movimentos distintos.

Nesta seção, consideraremos em nossas análises apenas *referenciais em translação*. O uso de referenciais em rotação na análise de movimentos relativos de pontos materiais será considerado nas seções 16.8 e 20.4.

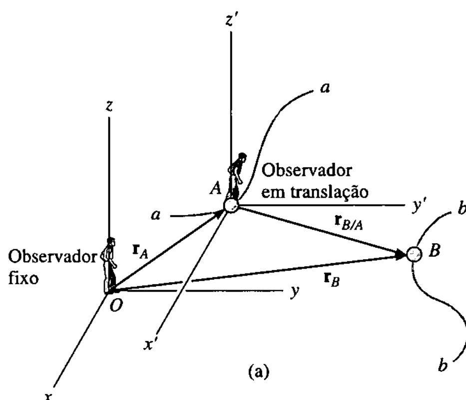



**Figura 12.42**

***Posição.*** Considere dois pontos materiais, $A$ e $B$, que se movem ao longo de trajetórias arbitrárias *aa* e *bb*, respectivamente (Figura 12.42*a*). A *posição absoluta* de cada ponto material, $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$, é medida em relação à origem comum $O$ do sistema de referência *fixo* $x, y, z$. A origem de um segundo sistema de referência $x', y', z'$ é ligada ao ponto material $A$ e, portanto, se move com ele. Aos eixos desse referencial *permite-se somente movimento de translação em* relação ao sistema fixo. A 'posição de $B$ em relação a $A$' é indicada pelo *vetor de posição relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$. Por adição vetorial, os três vetores de posição mostrados na Figura 12.42*a* podem ser relacionados pela equação[6]

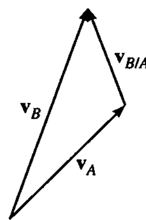
$$\boxed{\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}} \qquad (12.33)$$

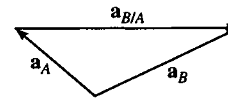
***Velocidade.*** Derivando Equação 12.33, obtemos a equação a seguir, que relaciona as velocidades dos pontos materiais:

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}} \qquad (12.34)$$

onde $\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt$ e $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$ são as *velocidades absolutas*, pois são observadas do referencial fixo; a *velocidade relativa* $\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$, por sua vez, é observada do referencial em translação. É importante observar que devido à translação dos eixos $x', y', z'$, a direção dos *componentes* de $\mathbf{r}_{B/A}$ *não* se alterará, de modo que a derivada temporal de cada um desses componentes deverá levar em conta somente o módulo do componente vetorial. A Equação 12.34 demonstra, portanto, que a velocidade de $B$ é igual à soma vetorial da velocidade de $A$ com a velocidade de '$B$ em relação a $A$', medida pelo *observador fixo no referencial em translação* $x', y', z'$ (Figura 12.42*b*).

[6] Um modo simples de se lembrar como escrever essa equação, e outras semelhantes, é observar o 'cancelamento' do índice inferior $A$ entre os dois termos, isto é, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$.




(b) (c)

**Figura 12.42**

*Para evitarem uma colisão, os pilotos desses aviões a jato voando muito próximos devem se manter atentos às suas posições e velocidades relativas durante todo o tempo.*

***Aceleração.*** A derivada temporal da Equação 12.34 fornece uma relação vetorial semelhante entre as *acelerações absoluta* e *relativa* dos pontos materiais $A$ e $B$.

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}} \qquad (12.35)$$

Na Equação 12.35, $\mathbf{a}_{B/A}$ é a aceleração de $B$ vista pelo observador localizado em $A$ e em translação com o sistema de referência $x'$, $y'$, $z'$. A adição vetorial pode ser vista na Figura 12.42*c*.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

- Ao se aplicar a equação da posição relativa, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$, é necessário especificar inicialmente as localizações dos sistemas fixo, $x, y, z$, e em translação, $x', y', z'$.
- Normalmente, a origem $A$ do sistema em translação se localiza num ponto de *posição conhecida*, $\mathbf{r}_A$ (Figura 12.42*a*).
- Uma representação gráfica da adição vetorial $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ pode ser mostrada esquematicamente; tanto as quantidades conhecidas quanto as desconhecidas devem ser indicadas no esquema.
- Como a adição vetorial forma um triângulo, pode haver no máximo *duas incógnitas*, representadas pelos módulos e/ou direções das quantidades vetoriais.
- Essas incógnitas podem ser encontradas usando-se trigonometria (lei dos senos, lei dos cossenos), ou por decomposição dos vetores em seus componentes cartesianos, gerando-se assim um sistema de equações algébricas.
- Às equações para o movimento relativo, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ e $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, aplica-se o mesmo procedimento explicado acima, exceto pelo fato de que neste caso não é necessário especificar a origem $O$ do sistema fixo $x, y$, z (Figuras 12.42*b* e 12.42*c*).

## EXEMPLO 12.25

Um trem, viajando a uma velocidade de 60 mi/h, cruza uma rodovia, como mostrado na Figura 12.43a. Se o automóvel $A$ trafega a 45 mi/h, determine o vetor velocidade (módulo, direção e sentido) do trem *em relação* ao automóvel.

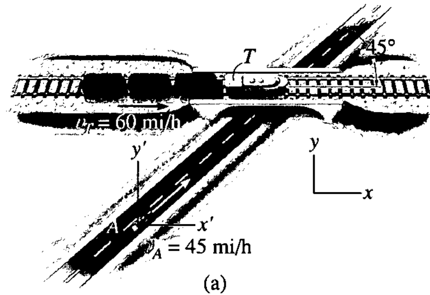
### SOLUÇÃO I

***Análise Vetorial.*** A velocidade relativa $\mathbf{v}_{T/A}$, medida em relação aos eixos $x', y'$ ligados ao automóvel (Figura 12.43*a*), pode ser calculada usando-se $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$. Como $\mathbf{v}_T$ e $\mathbf{v}_A$ são vetores conhecidos, as incógnitas são os componentes $x$ e $y$ de $\mathbf{v}_{T/A}$. Usando os eixos $x, y$ mostrados na Figura 12.43*a* e análise vetorial cartesiana, temos

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$60\mathbf{i} = (45 \cos 45° \,\mathbf{i} + 45 \,\text{sen}\, 45° \,\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28{,}2\mathbf{i} - 31{,}8\mathbf{j}\} \text{ mi/h}$$ ***Resposta***




O módulo de $\mathbf{v}_{T/A}$ é, portanto,

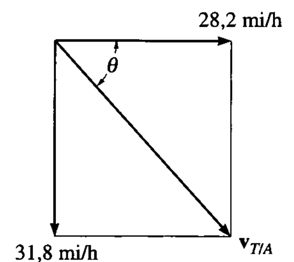
$$v_{T/A} = \sqrt{(28{,}2)^2 + (-31{,}8)^2} = 42{,}5 \text{ mi/h}$$ ***Resposta***

Da direção e do sentido de cada componente (Figura 12.43*b*), determina-se a orientação de $\mathbf{v}_{T/A}$ em relação ao eixo $x$:

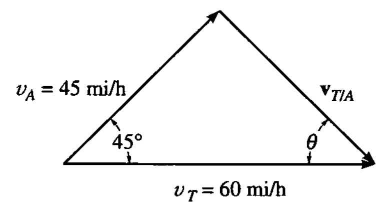
$$\text{tg}\,\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31{,}8}{28{,}2}$$

$$\theta = 48{,}5°$$ ***Resposta***

Observemos que a adição vetorial mostrada na Figura 12.43*b* indica o sentido correto de $\mathbf{v}_{T/A}$. A figura antecipa a resposta e pode ser usada para a sua verificação.




(b)




(c)

**Figura 12.43**

## SOLUÇÃO II

***Análise Escalar.*** Os componentes desconhecidos de $\mathbf{v}_{T/A}$ também podem ser determinados por meio da aplicação de uma análise escalar. Supomos, então, que esses componentes orientam-se nos sentidos $+x$ e $+y$. Assim,

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\begin{bmatrix} 60 \text{ mi/h} \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \text{ mi/h} \\ \measuredangle^{45°} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_x \\ \rightarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (v_{T/A})_y \\ \uparrow \end{bmatrix}$$

Decompondo cada vetor nas direções $x$ e $y$, temos

$(\overset{+}{\rightarrow})$ $$60 = 45 \cos 45° + (v_{T/A})_x + 0$$

$(+\uparrow)$ $$0 = 45 \,\text{sen}\, 45° + 0 + (v_{T/A})_y$$

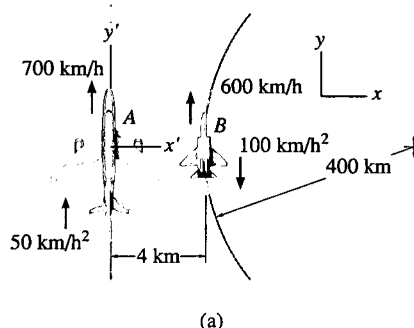
Resolvendo o sistema algébrico, chegamos aos resultados já obtidos:

$$(v_{T/A})_x = 28{,}2 \text{ mi/h} = 28{,}2 \text{ mi/h} \rightarrow$$

$$(v_{T/A})_y = -31{,}8 \text{ mi/h} = 31{,}8 \text{ mi/h} \downarrow$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 12.26

O avião $A$ mostrado na Figura 12.44*a* está voando numa trajetória retilínea, enquanto o avião $B$ está voando numa trajetória circular de raio de curvatura $\rho_B = 400$ km. Determine a velocidade e a aceleração de $B$ medidas pelo piloto do avião $A$.



(a)

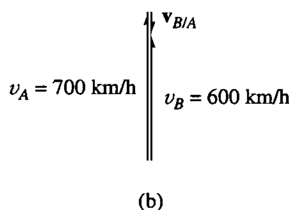
### SOLUÇÃO

***Velocidade.*** Os eixos $x$, $y$ localizam-se num ponto fixo arbitrariamente escolhido. Como devemos determinar o movimento de $B$ em relação a $A$, o sistema de *referência em translação* $x'$, $y'$ deve ser fixado neste último (Figura 12.44*a*). Uma vez que nas posições mostradas na Figura 12.44*a* os aviões têm velocidades paralelas, vamos aplicar a equação para a velocidade relativa na forma escalar:

$$(+\uparrow) \qquad v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$600 = 700 + v_{B/A}$$

$$v_{B/A} = -100 \text{ km/h} = 100 \text{ km/h} \downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

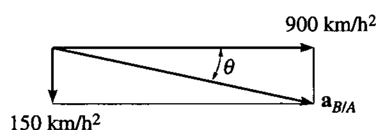


(b)

A adição vetorial pode ser vista na Figura 12.44*b*.

***Aceleração.*** Por estar voando numa *trajetória curva*, o avião $B$ tem aceleração com componentes tangencial e normal. Da Equação 12.20, o módulo do componente normal é

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600 \text{ km/h})^2}{400 \text{ km}} = 900 \text{ km/h}^2$$



(c)

**Figura 12.44**

Aplicando a equação para a aceleração relativa, temos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$900\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 50\mathbf{j} + \mathbf{a}_{B/A}$$

Assim:

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{900\mathbf{i} - 150\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$$

Da Figura 12.44*c*, o módulo, a direção e o sentido da $\mathbf{a}_{B/A}$ são, portanto,

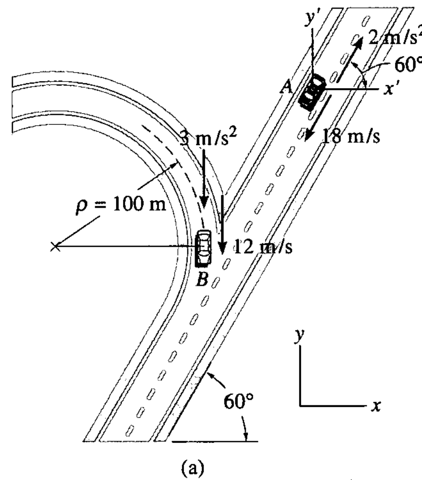
$$a_{B/A} = 912 \text{ km/h}^2 \quad \theta = \text{tg}^{-1}\frac{150}{900} = 9{,}46° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observemos que foi possível resolver este problema usando-se um referencial em translação, pois o piloto do avião $A$ está 'se transladando'. A descrição

do movimento do avião $A$ pelo piloto do avião $B$ implica o uso de um referencial em *rotação*. (Isso supõe, naturalmente, que o piloto está fixo no referencial girante e, portanto, não vira seus olhos para seguir o movimento de $A$.) A análise desse caso foi feita no Exemplo 16.21.

## EXEMPLO 12.27

Num dado instante, os carros $A$ e $B$ (Figura 12.45*a*) deslocam-se com velocidades de 18 m/s e 12 m/s, respectivamente. Nesse mesmo instante, $A$ está desacelerando a uma taxa de 2 m/s$^2$ e $B$ está acelerando a uma taxa de 3 m/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração de $B$ em relação a $A$.



(a)

### SOLUÇÃO

***Velocidade.*** Os eixos $x$, $y$ são estabelecidos num ponto qualquer do solo e os eixos $x'$, $y'$ são ligados ao carro $A$. Por quê? A velocidade relativa é determinada pela aplicação de $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$. Quais são as incógnitas? Usando uma análise vetorial cartesiana, temos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$-12\mathbf{j} = (-18 \cos 60°\mathbf{i} - 18 \operatorname{sen} 60°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_{B/A} = \{9\mathbf{i} + 3{,}588\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

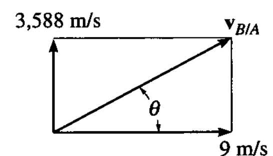
Logo:

$$v_{B/A} = \sqrt{(9)^2 + (3{,}588)^2} = 9{,}69 \text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observando que $\mathbf{v}_{B/A}$ tem componentes $+\mathbf{i}$ e $+\mathbf{j}$ (Figura 12.45*b*), obtemos sua direção e sentido:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{3{,}588}{9}$$

$$\theta = 21{,}7° \measuredangle \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



(b)

**Figura 12.45**

***Aceleração.*** A aceleração do carro $B$ tem componentes tangencial e normal. Por quê? O módulo do componente normal é

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}} = 1{,}440 \text{ m/s}^2$$

Aplicando a equação para a aceleração relativa, temos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$(-1{,}440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = (2 \cos 60°\mathbf{i} + 2 \text{ sen } 60°\mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{-2{,}440\mathbf{i} - 4{,}732\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

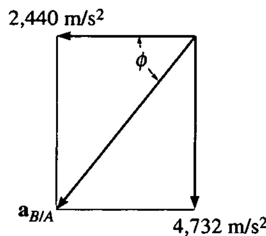



**Figura 12.45**

A aceleração $\mathbf{a}_{B/A}$ tem componentes $-\mathbf{i}$ e $-\mathbf{j}$. Logo, pela Figura 12.45c,

$$a_{B/A} = \sqrt{(2{,}440)^2 + (4{,}732)^2} = 5{,}32 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

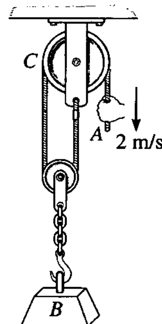
$$\text{tg } \phi = \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4{,}732}{2{,}440}$$

$$\phi = 62{,}7° \qquad \textit{Resposta}$$

É possível obter a aceleração relativa $\mathbf{a}_{A/B}$ usando-se esse método? Veja o comentário feito no fim do Exemplo 12.26.

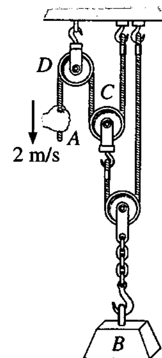
## PROBLEMAS

***12.172.** Se a extremidade do cabo em $A$ é puxada para baixo com velocidade de 2 m/s, determine a velocidade com que o bloco $B$ sobe.




**Problema 12.172**

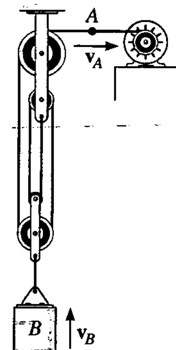
**12.173.** Se a extremidade do cabo em $A$ é puxada para baixo com velocidade de 2 m/s, determine a velocidade com que o bloco $B$ sobe.




**Problema 12.173**

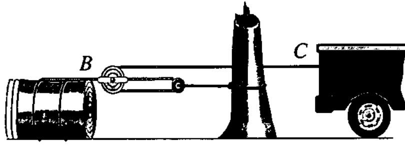
**12.174.** Determine a velocidade constante com que o cabo deve ser tracionado em $A$ pelo motor para que a carga em $B$ suba 15 pés em 5 segundos.

**12.175.** Determine o tempo necessário para que uma carga $B$ inicialmente em repouso atinja uma velocidade de 8m/s. Suponha que o cabo é tracionado pelo motor com uma aceleração de 0,2 m/s².



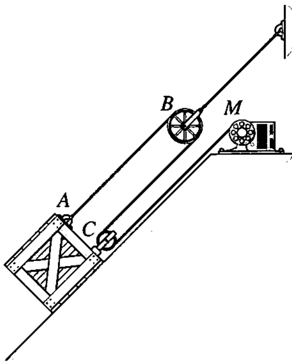

**Problemas 12.174/175**

***12.176.** Determine o deslocamento da tora, considerando que a caminhonete puxa a extremidade *C* do cabo 4 pés para a direita.



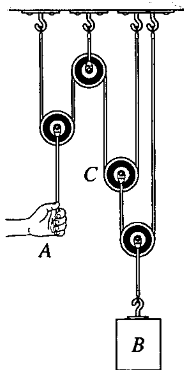

**Problema 12.176**

**12.177.** O engradado está sendo elevado por meio do sistema de cabos, polias e motor, como mostrado na figura. Determine a velocidade com que o cabo deve ser enrolado na polia do motor para que o engradado suba pelo plano inclinado com uma velocidade constante de 4 pés/s.




**Problema 12.177**

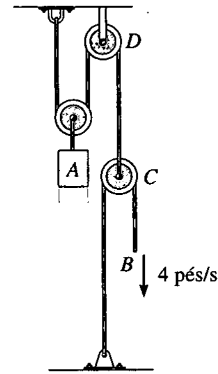
**12.178.** Determine o deslocamento do bloco *B* quando a extremidade *A* do cabo é puxada 4 pés para baixo.



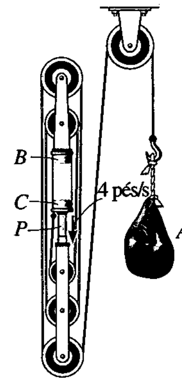

**Problema 12.178**

**12.179.** Num dado instante, a extremidade *B* do cabo desce a uma velocidade de 4 pés/s e sofre uma desaceleração de 2 pés/s$^2$. Calcule a velocidade e a aceleração do bloco *A* nesse instante.

***12.180.** O arranjo de polias foi projetado para elevar materiais. Se *BC permanece fixo* enquanto o pistão *P* é empurrado para baixo com velocidade de 4 pés/s, determine a velocidade da carga em *A*.



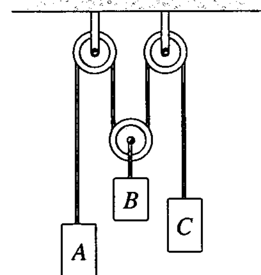

**Problema 12.179**




**Problema 12.180**

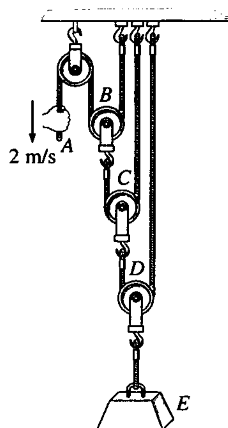
**12.181.** O bloco *A* desce com uma velocidade de 4 pés/s, enquanto *C* sobe com uma velocidade de 2 pés/s. Determine a velocidade do bloco *B*.

**12.182.** O bloco *A* desce com uma velocidade de 6 pés/s, enquanto *C* sobe com uma velocidade de 2 pés/s. Determine a velocidade do bloco *B* relativa ao bloco *C*.



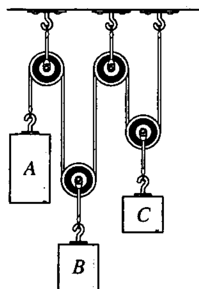

**Problema 12.181/182**

**12.183.** Se a extremidade *A* do cabo é puxada para baixo com uma velocidade de 2 m/s, determine a velocidade com que *E* sobe.



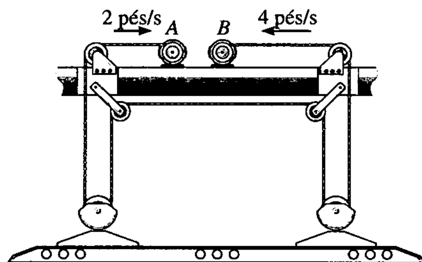

Problema 12.183

*12.184. O bloco $A$ do sistema de polias está se movimentando para baixo com uma velocidade de 4 pés/s, enquanto $C$ está subindo com uma velocidade de 2 pés/s. Determine a velocidade $B$.




Problema 12.184

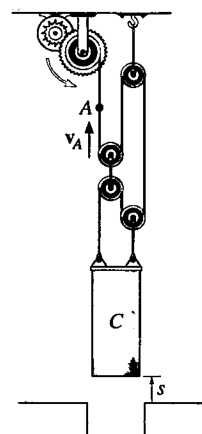
12.185. O guindaste mostrado na figura é usado para elevar a carga. Se os motores em $A$ e $B$ puxam o cabo com velocidades de 2 pés/s e 4 pés/s, respectivamente, determine a velocidade da carga.



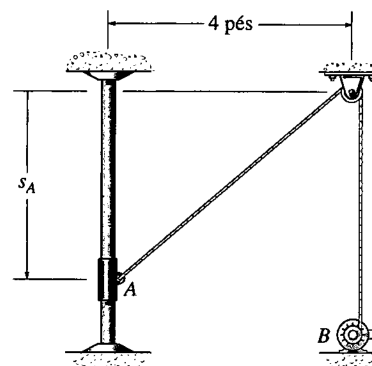

Problema 12.185

12.186. O cilindro $C$ está sendo levantado por meio do cabo e do sistema de polias, como mostrado na figura. Se o ponto $A$ do cabo está sendo puxado para o tambor com uma velocidade de 2 m/s, determine a velocidade do cilindro.

12.187. O movimento do colar $A$ é controlado pelo motor $B$ de forma que quando o colar está em $s_A = 3$ pés, sua velocidade para cima é de 2 pés/s e está diminuindo a uma taxa de 1 pé/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração do cabo nesse instante.

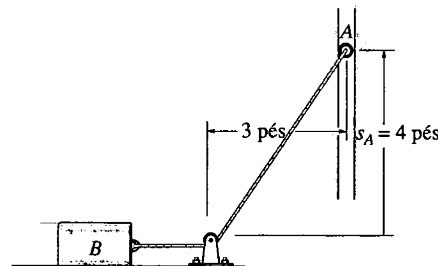



Problema 12.186



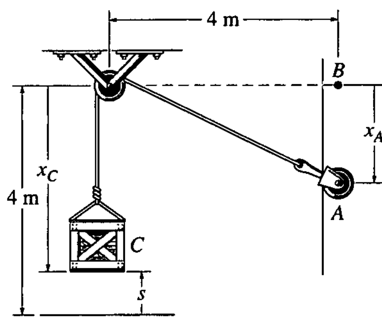

Problema 12.187

*12.188. Num dado instante, quando a posição do rolete $A$ que se move para cima é $s_A = 4$ pés, sua velocidade e sua aceleração valem 3 pés/s e 4 pés/s$^2$, respectivamente. Determine a velocidade e a aceleração do bloco $B$ nesse instante.



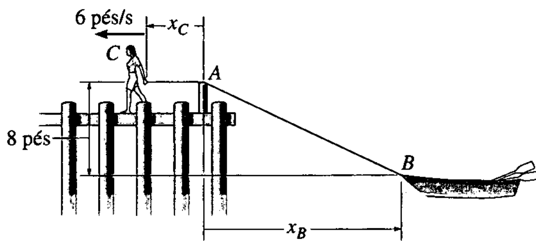

Problema 12.188

12.189. Eleva-se o caixote $C$ pelo movimento do rolete $A$ que se desloca para baixo com uma velocidade constante $v_A = 2$ m/s. Determine a velocidade e a aceleração do caixote no instante em que $s = 1$ m. Quando o rolete estava em $B$, o caixote estava em repouso no solo. Despreze o tamanho da polia. *Dica*: relacione as coordenadas $x_C$ e $x_A$ usando a geometria do problema e, então, calcule a primeira e a segunda derivadas temporais da expressão que você obteve.



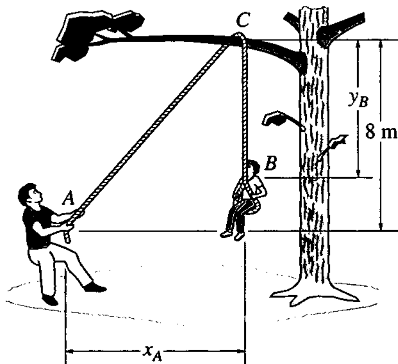

**Problema 12.189**

**12.190.** A menina situada em $C$ puxa a corda *horizontalmente* a uma velocidade constante de 6 pés/s. Determine a velocidade escalar do bote no instante em que o trecho $AB$ da corda tem 50 pés.



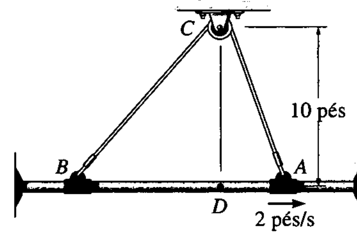

**Problema 12.190**

**12.191.** Movendo-se para trás, o homem ergue o menino em direção ao galho $C$. O homem parte do repouso em $x_A = 0$ e se move com uma aceleração constante $a_A = 0{,}2$ m/s$^2$. Determine a velocidade do menino no instante em que $y_B = 4$ m. Despreze a espessura do galho. Quando $x_A = 0$, $y_B = 8$ m, de modo que $A$ e $B$ coincidem, isto é, a corda tem 16 m de comprimento.



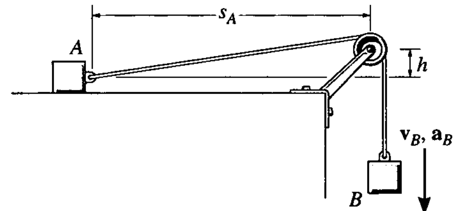

**Problema 12.191**

***12.192.** Os colares $A$ e $B$ estão ligados por uma corda que passa por uma polia em $C$. Quando $A$ está em $D$, $B$ está a 24 pés à esquerda de $D$. Se $A$ se move a uma velocidade constante de 2 m/s para a direita, determine a velocidade de $B$ quando $A$ está a 4 pés à direita de $D$.



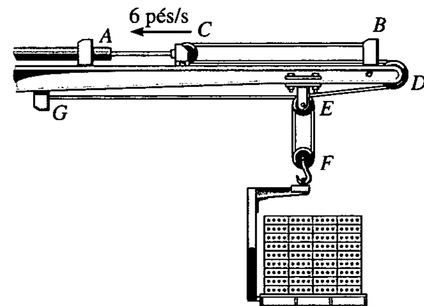

**Problema 12.192**

**12.193.** Se o bloco $B$ está se movendo para baixo com uma velocidade $v_B$ e uma aceleração $a_B$, determine a velocidade e a aceleração de $A$ em termos dos parâmetros mostrados na figura.



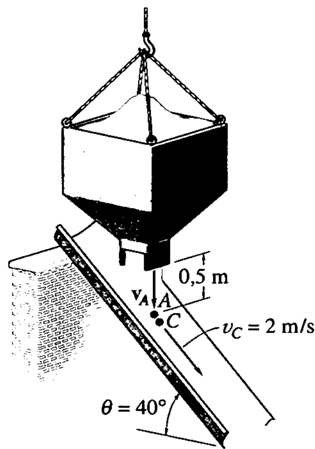

**Problema 12.193**

**12.194.** O pistão em $A$ gera o movimento vertical da carga. Determine a distância que o pistão ou a polia em $C$ deve se mover para a esquerda de modo a erguer a carga de 2 pés. O cabo, preso em $B$, passa pela polia em $C$, então em $D$, $E$, $F$, novamente em torno de $E$ e finalmente é preso em $G$.



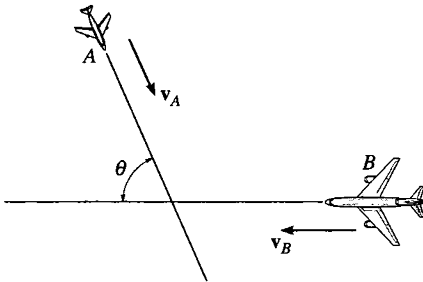

**Problema 12.194**

**12.195.** Areia inicialmente em repouso é despejada e cai verticalmente 0,5 m sobre uma calha. Se a areia desliza pela calha com velocidade de 2 m/s, determine a velocidade relativa da areia que chega a $A$ em relação à areia que escorrega pela calha. O ângulo de inclinação da calha é de 40° em relação à horizontal.




**Problema 12.195**

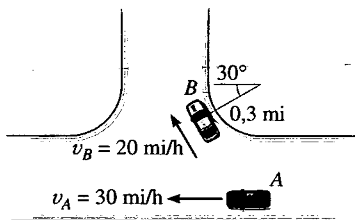
***12.196.** Dois aviões, $A$ e $B$, voam à mesma altitude. Suas velocidades são $v_A = 600$ km/h e $v_B = 500$ km/h, respectivamente, e seus cursos retilíneos formam um ângulo $\theta = 75°$. Determine a velocidade de $B$ em relação à aeronave $A$.




**Problema 12.196**

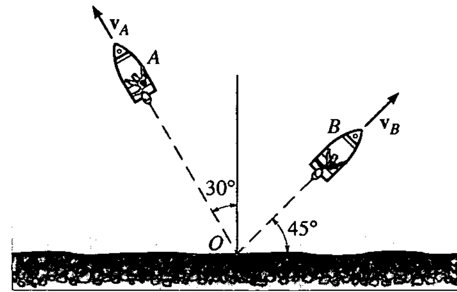
**12.197.** Num dado instante, os carros $A$ e $B$ trafegam a velocidades de 30 mi/h e 20 mi/h, respectivamente. Se $B$ tem sua velocidade aumentada a uma taxa de 1.200 mi/h$^2$, enquanto $A$ se mantém com velocidade constante, determine a velocidade e a aceleração de $B$ em relação a $A$, nesse instante.

**12.198.** Num dado instante, os carros $A$ e $B$ trafegam a velocidades de 30 mi/h e 20 mi/h, respectivamente. Se $A$ está aumentado a sua velocidade a uma taxa de 400 mi/h$^2$ e $B$ está diminuindo a sua a uma taxa de 800 mi/h$^2$, determine a velocidade e a aceleração de $B$ em relação a $A$ nesse instante.



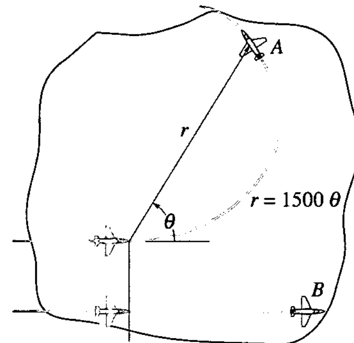

**Problemas 12.197/198**

**12.199.** Dois botes deixam a praia simultaneamente e se deslocam segundo as direções mostradas na figura. Se $v_A = 20$ pés/s e $v_B = 15$ pés, determine a velocidade de $A$ em relação ao bote $B$. Quanto tempo após a partida a distância entre os botes se torna igual a 800 pés?



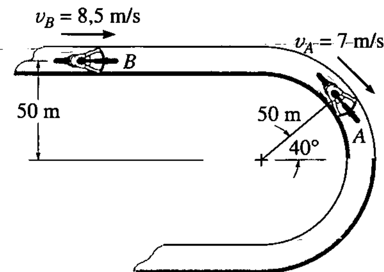

**Problema 12.199**

***12.200.** Dois aviões, $A$ e $B$, estão voando lado a lado a uma velocidade constante de 900 km/h. Mantendo essa velocidade escalar, o avião $A$ começa a percorrer sua trajetória em espiral $r = (1.550\theta)$ km, onde $\theta$ é dado em radianos. O avião $B$, por sua vez, continua seu curso retilíneo. Determine a velocidade do avião $A$ em relação ao avião B quando $r = 750$ km.



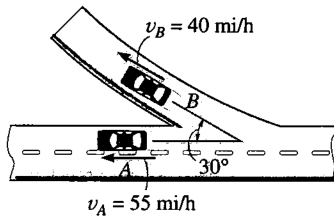

**Problema 12.200**

**12.201.** Num dado instante, o ciclista $A$ trafega a 7 m/s no trecho curvo da pista, aumentando sua velocidade a uma taxa de 0,5 m/s$^2$. O ciclista $B$, trafegando no trecho retilíneo a 8,5 m/s, aumenta sua velocidade a uma taxa de 0,7 m/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração de $A$ em relação a $B$ nesse instante.



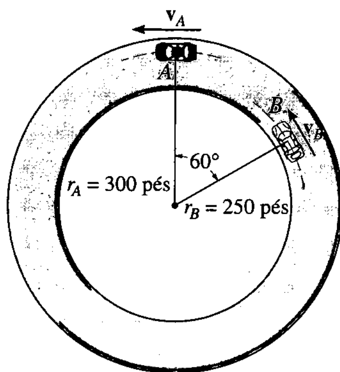

**Problema 12.201**

**12.202.** Num dado instante, os carros $A$ e $B$ estão trafegando a 55 mi/h e 40 mi/h, respectivamente. O carro $B$ está aumentando sua velocidade a uma taxa de 1.200 mi/h$^2$, enquanto $A$ mantém sua velocidade constante. Determine a velocidade e a aceleração de $B$ em relação a $A$. A trajetória de $B$ tem um raio de curvatura de 0,5 mi.



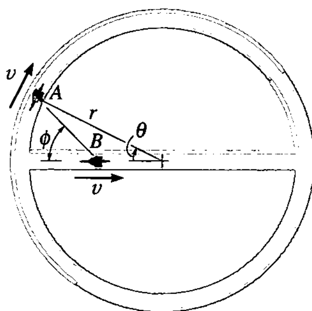

**Problema 12.202**

**12.203.** Os carros $A$ e $B$ se movem numa pista circular. Num dado instante, $A$ tem uma velocidade de 90 pés/s e está acelerando a uma taxa de 15 pés/s$^2$, enquanto $B$, a 105 pés/s, está diminuindo sua velocidade a uma taxa de 25 pés/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração de $A$ em relação a $B$ nesse instante.



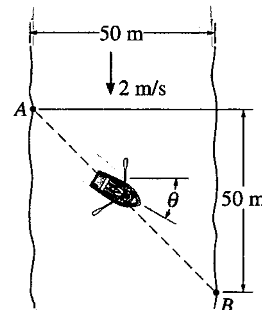

**Problema 12.203**

***10-204.** Os ciclistas $A$ e $B$ trafegam à mesma velocidade constante $v$. Determine a velocidade escalar de $A$ em relação a $B$, supondo que $A$ trafega ao longo da trajetória circular e $B$, ao logo do diâmetro da circunferência.



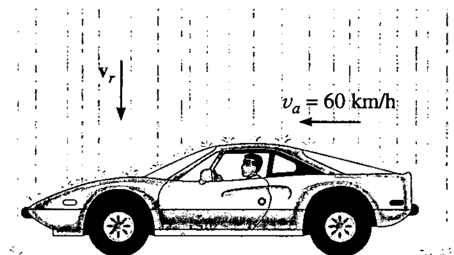

**Problema 12.204**

**12.205.** O remador pode conduzir o bote a 5 m/s em água parada. Ele deseja cruzar o rio de 50 m de largura para atingir o ponto $B$, 50 m rio abaixo. Se as águas do rio escoam com velocidade de 2 m/s, determine a velocidade do bote e o tempo necessário para que ele faça a travessia.



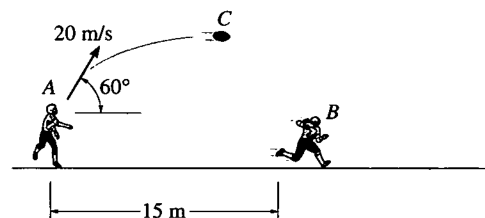

**Problema 12.205**

**12.206.** Um passageiro num automóvel a 60 km/h observa que as gotas de chuva formam um ângulo de 30° com a horizontal. Calcule a velocidade constante $\mathbf{v}_r$ da chuva supondo que ela cai verticalmente.



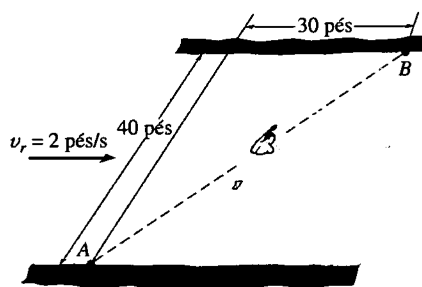

**Problema 12.206**

**12.207.** Num dado instante, o jogador $A$ lança uma bola $C$ com velocidade de 20 m/s na direção mostrada na figura. Determine a velocidade constante que o jogador $B$ deve ter para que ele possa apanhar a bola à mesma altura a que ela foi arremessada. Calcule também a velocidade e a aceleração da bola em relação ao jogador $B$ no instante em que este a apanha. O jogador $B$ está a 15 m de $A$ no momento do arremesso.




**Problema 12.207**

***12.208.** Um homem pode nadar a 4 m/s em água parada. Ele deseja atravessar o rio de 40 pés de largura para atingir o ponto $B$ 30 pés a jusante. Se o rio 'corre' a uma velocidade de 2 pés/s, determine a velocidade do nadador e o tempo de travessia. *Observação*: O homem na água não deve se direcionar diretamente para o ponto $B$. Por quê?

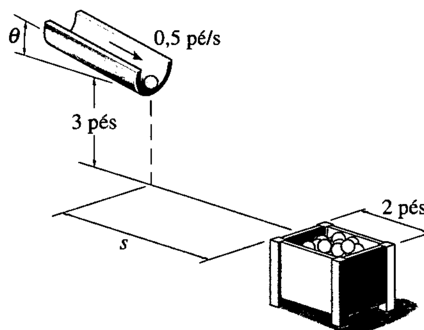



**Problema 12.208**

# ESTUDO DE PROJETOS

## 12.1P Projeto de um Dispositivo Classificador de Bolas de Gude

De uma calha de produção saem bolinhas a uma velocidade de 0,5 pé/s. Determine o intervalo de valores de ângulo $0 \leq \theta \leq 30°$ para uma determinada posição $s$ da caixa relativamente à extremidade da calha. Faça um esquema do dispositivo que mostre a trajetória das bolinhas.



## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Cinemática do Movimento Retilíneo.*** O movimento retilíneo se refere a um movimento ao longo de uma reta. Uma coordenada de posição $s$ especifica a localização do ponto material sobre a reta, e o deslocamento $\Delta s$, a mudança de posição.

  A velocidade média é um vetor definido como o deslocamento dividido pelo intervalo de tempo.

$$\mathbf{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

  Essa definição é diferente da definição de velocidade média de percurso, que é um escalar positivo definido como a distância total percorrida dividida pelo tempo decorrido.

$$(v_{\text{perc}})_{\text{méd}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

  O tempo, a posição, a velocidade instantânea e a aceleração instantânea relacionam-se de acordo com a equações diferenciais

$$v = ds/dt \qquad a = dv/dt \qquad a\,ds = v\,dv$$

  Se a aceleração é constante, então a integração dessas equações nos fornece

$$v = v_0 + a_c t$$

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

- ***Soluções Gráficas.*** Se o movimento é irregular, então ele pode ser descrito por um gráfico. Se um desses gráficos é conhecido, os outros podem ser obtidos usando-se as relações diferenciais $v = ds/dt$, $a = dv/dt$ ou $a\,ds = v\,dv$. Por exemplo, se o gráfico $v$–$t$ for conhecido, então os valores do gráfico $s$–$t$ serão determinados por $\Delta s = \int v\,dt$ = incrementos de área sob o gráfico $v$–$t$. Os valores do gráfico $a$–$t$ são determinados por $a = dv/dt$ = inclinação do gráfico $v$-$t$.
- ***Movimento Curvilíneo, x, y, z.*** Para este caso, o movimento é decomposto em movimentos retilíneos ao longo dos eixos $x,y,z$. Usamos a equação da trajetória para relacionar esses movimentos ao longo dos eixos.
- ***Movimento de Projéteis.*** Um projétil em vôo livre segue uma trajetória parabólica, com uma velocidade constante na direção horizontal e uma aceleração constante $g$ = 9,81 m/s$^2$ ou 32,2 pés/s$^2$, na direção vertical. Quaisquer duas das três equações para aceleração constante aplicam-se na direção vertical; na direção horizontal aplica-se somente $x = x_0 + (v_0)_x t$.
- ***Movimento Curvilíneo, n, t.*** Se usam-se eixos normal e tangencial para a análise, então $\mathbf{v}$ tem sempre a direção e sentido do eixo positivo $t$. A aceleração tem dois componentes. O componente tangencial, $\mathbf{a}_t$, responde pela mudança da velocidade escalar (módulo da velocidade); uma diminuição da velocidade escalar corresponde a $\mathbf{a}_t$ no sentido negativo do eixo $t$, e um aumento da velocidade escalar corresponde a $\mathbf{a}_t$ no sentido positivo do eixo $t$. O componente normal, $\mathbf{a}_n$, responde pela mudança na direção da velocidade e está sempre no sentido positivo do eixo $n$.
- ***Movimento Curvilíneo, r, θ, z.*** Se a trajetória de um ponto material se expressa em coordenadas polares, os componentes de sua velocidade e aceleração são dados por

$$v_r = \dot{r} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

  Para se aplicarem essas equações é necessário determinar $r$, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\theta$, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ no instante considerado. Se a trajetória $r = f(\theta)$ for dada, então a regra da cadeia do cálculo diferencial deve ser usada para que as derivadas

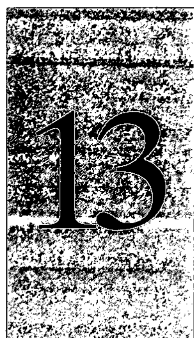
## REVISÃO DO CAPÍTULO (CONTINUAÇÃO)

temporais sejam obtidas. Uma vez substituídos os dados nas equações, os sinais algébricos dos resultados indicarão os sentidos dos componentes da velocidade e da aceleração ao longo de cada eixo.

- ***Movimentos Absolutos Dependentes.*** Os movimentos dependentes de dois blocos suspensos por cabos e polia podem ser relacionados pela geometria do sistema. Iniciemos a análise pelo estabelecimento de uma coordenada de posição para cada bloco, medida a partir de uma origem fixada num eixo orientado ao longo da linha de movimento do respectivo bloco. Usando geometria e/ou trigonometria, estabelecemos uma equação que relaciona as coordenadas com o comprimento do cabo. A primeira derivada da equação para as coordenadas fornece uma relação entre as velocidades dos blocos e a segunda derivada, uma relação entre suas acelerações.
- ***Análise do Movimento Relativo Usando-se Referenciais em Translação.*** Se dois pontos materiais, $A$ e $B$, têm movimentos independentes, então esses movimentos podem ser relacionados com seu movimento relativo. Usando-se um conjunto de eixos ligados a um dos pontos, digamos, $A$, as equações para a velocidade e a aceleração são

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

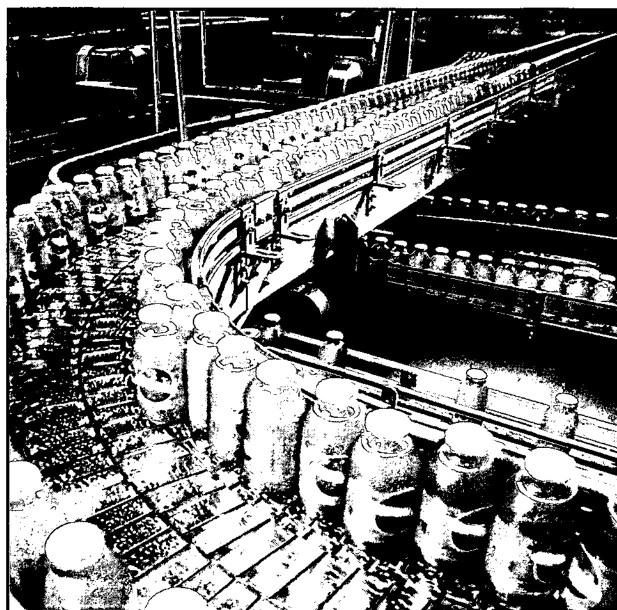
Para movimento plano, cada uma dessas equações produz duas equações escalares, uma na direção $x$ e a outra na direção $y$ (com os vetores expressos na forma cartesiana $x$, $y$).



# Dinâmica de um Ponto Material: Força e Aceleração

## Objetivos do Capítulo

- Enunciar as leis de Newton para o movimento e para a atração gravitacional. Definir massa e peso.
- Analisar o movimento acelerado de um ponto material usando a equação de movimento com diferentes sistemas de coordenadas.
- Investigar o movimento sob força central e aplicá-lo em problemas de mecânica espacial.



*O projeto de transportadores para uma unidade de engarrafamento exige o conhecimento das forças que agem nas garrafas e a capacidade de prever seus movimentos.*

## 13.1 Leis de Newton para o Movimento

Muitas das noções primitivas sobre a dinâmica foram afastadas após 1590, quando Galileu realizou estudos experimentais dos movimentos de pêndulos e corpos em queda. As conclusões obtidas de seus experimentos forneceram alguma compreensão dos efeitos das forças agentes nos corpos em movimento. Entretanto, somente com Isaac Newton, em 1687, passou-se a conhecer as leis gerais do movimento de um corpo submetido a forças. Nesse ano, pela primeira vez, Newton formulou as três leis fundamentais da dinâmica. Ligeiramente reformuladas, as três leis de Newton podem ser assim expressas:

*Primeira Lei: Um ponto material permanecerá em repouso ou em movimento retilíneo com velocidade constante, se nenhuma força agir sobre ele.*

*Segunda Lei: Um ponto material submetido a uma força* **F** *experimenta uma aceleração* **a** *de mesma direção e sentido de* **F**, *com módulo proporcional à intensidade F da força.*[1]

*Terceira Lei: As forças mútuas de ação e reação entre dois pontos materiais têm a mesma intensidade, a mesma reta de ação e sentidos opostos.*

A primeira e a terceira lei foram extensivamente usadas no desenvolvimento do conceitos da estática. Embora essas duas leis também sejam

[1] Posto de outra forma, a intensidade da força é proporcional à taxa temporal de variação da quantidade de movimento. Veja a nota de rodapé 3, na página seguinte.

consideradas na dinâmica, a segunda lei de Newton é a base de quase todo esse estudo, uma vez que ela relaciona o movimento acelerado de um ponto material às forças nele agentes.

Medidas de força e aceleração podem ser efetuadas no laboratório, de modo que, de acordo com a segunda lei, se uma força **F** conhecida é aplicada a um ponto material, a aceleração **a** do ponto pode ser medida. Uma vez que força e aceleração são diretamente proporcionais, a constante de proporcionalidade, $m$, pode ser determinada, considerando-se a razão $m = F/a$.[2] O escalar positivo $m$ é denominado massa do ponto material. Sendo constante durante qualquer aceleração, $m$ fornece uma medida quantitativa da resistência do ponto material a mudanças em sua velocidade.

Se a massa do ponto material é $m$, a segunda lei de Newton pode ser escrita na seguinte forma matemática:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Essa equação, conhecida como *equação de movimento*, é uma das mais importantes formulações da mecânica.[3] Como foi dito anteriormente, sua validade baseia-se somente em *evidência experimental*. Em 1905, todavia, Albert Einstein desenvolveu a teoria da relatividade e impôs limitações ao uso da segunda lei de Newton para a descrição do movimento geral de um ponto material. Por meio de experimentos, provou-se que o *tempo* não é uma quantidade absoluta, como supôs Newton; como resultado, a equação de movimento falha ao predizer o comportamento exato de um ponto material, especialmente quando sua velocidade aproxima-se da velocidade da luz (0,3 Gm/s). Desenvolvimentos da teoria quântica feitos por Erwin Schrödinger e outros indicam ainda que conclusões obtidas pelo uso da segunda lei de Newton não são válidas quando os corpos têm as dimensões de átomos e se movem próximos uns dos outros. Para a maioria dos casos em engenharia, entretanto, esses limites de velocidade e tamanho não são relevantes, de modo que seus efeitos não serão considerados neste livro.

***Lei de Newton para a Atração Gravitacional.*** Pouco tempo depois de formular suas três leis do movimento, Newton formulou a lei que governa a atração mútua entre dois pontos materiais. Essa lei pode ser expressa matematicamente como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{13.1}$$

onde

$F$ = intensidade da força de atração entre os pontos materiais
$G$ = constante da gravitação universal; de acordo com evidências experimentais, $G = 66{,}73\ (10^{-12})\ \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
$m_1, m_2$ = massa de cada um dos pontos materiais
$r$ = distância entre os pontos materiais

Quaisquer dois pontos materiais ou corpos (quando se leva em conta suas dimensões) exercem mutuamente forças gravitacionais. No caso de um corpo localizado na superfície terrestre (ou em suas proximidades), todavia, a única força gravitacional de intensidade considerável é a que existe entre a Terra e

[2] Observemos que as unidades de força no Sistema Internacional (SI) e massa no sistema FPS são deduzidas com base nesta equação: $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ e $\text{slug} = \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pé}$ (veja a Seção 1.3 do livro *Estática: Mecânica para Engenharia 1*). Se, todavia, as unidades de força, massa, comprimento e tempo fossem escolhidas arbitrariamente, então seria necessário escrever $F = kma$, onde $k$ (uma constante adimensional) deveria ser determinada experimentalmente para preservar a igualdade.

[3] Uma vez que $m$ é constante, também podemos escrever $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$, onde $m\mathbf{v}$ é a quantidade de movimento do ponto material.

o corpo. Essa força é denominada 'peso' e, para nossos objetivos, será a única força gravitacional considerada.

***Massa e Peso.*** *Massa* é uma propriedade da matéria pela qual podemos comparar a resposta de um corpo com aquela de outro. Como indicado anteriormente, essa propriedade se manifesta como a atração gravitacional entre dois corpos e fornece um medida quantitativa da resistência da matéria a mudanças em sua velocidade. É uma *quantidade absoluta*, pois a medida da massa pode ser feita em qualquer lugar. O peso de um corpo, por outro lado, *não é uma quantidade absoluta*, pois é medido num campo gravitacional, e, portanto, seu módulo depende do lugar onde se realiza a medição. Da Equação 13.1, podemos desenvolver uma expressão geral para determinar o peso $W$ de um ponto material de massa $m_1 = m$. Sejam $m_2$ a massa da Terra e $r$ a distância entre o centro da Terra e o ponto material. Então, se $g = Gm_2/r^2$, temos

$$W = mg$$

Por comparação com $F = ma$, chamamos $g$ de aceleração da gravidade. Para muitos problemas em engenharia $g$ é medido num ponto ao nível do mar e a uma latitude de 45°, considerado 'local-padrão'.

A massa e o peso de um corpo são medidos de maneira diferente nos sistemas de unidades SI e FPS, e o método para definir essas unidades deve ser completamente entendido.

***Sistema de Unidades SI.*** No sistema SI a massa de um corpo é especificada em quilogramas e seu peso deve ser calculado usando-se a equação de movimento $F = ma$. Logo, se um corpo tem massa $m$ (kg) e está localizado num ponto onde a aceleração da gravidade é $g$ (m/s$^2$), então seu peso é expresso em *newtons* como $W = mg$ (N) (Figura 13.1*a*). Em particular, se um corpo está num ponto que é um 'local-padrão', a aceleração da gravidade é $g = 9{,}80665$ m/s$^2$. Nos cálculos será utilizado o valor $g = 9{,}81$ m/s$^2$, de modo que

$$\boxed{W = mg \text{ (N)} \qquad (g = 9{,}81 \text{ m/s}^2)} \qquad (13.2)$$

Portanto, um corpo de massa 1 kg pesa 9,81 N, um corpo de 2 kg pesa 19,62 N e assim por diante.

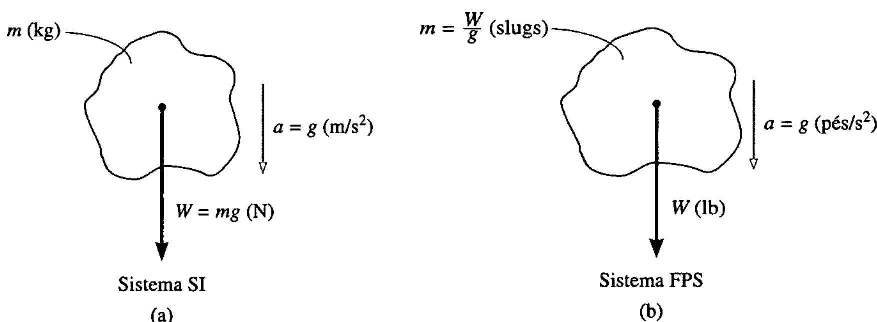



**Figura 13.1**

***Sistema de Unidades FPS.*** No sistema FPS, o peso do corpo é especificado em libras e a massa deve ser calculada com a equação de movimento $F = ma$. Logo, se um corpo tem peso $W$ (lb) e se localiza num ponto onde a aceleração da gravidade é $g$ (pés/s$^2$), então a massa é expressa em *slugs* como $m = W/g$ (slug) (Figura 13.1*b*). Uma vez que a aceleração da gravidade num 'local-

padrão' é aproximadamente 32,2 pés/s² (= 9,81 m/s²), a massa do corpo medida em slugs é

$$\boxed{m = \frac{W}{g}\text{(slugs)} \quad (g = 32{,}2 \text{ pés/s}^2)} \tag{13.3}$$

Portanto, um corpo que pesa 32,2 lb tem massa de 1 slug, um corpo que pesa 64,4 lb tem massa de 2 slugs e assim por diante.

## 13.2 A Equação de Movimento

Quando mais do que uma força age num ponto material, a força resultante é determinada pela soma vetorial de todas as forças; isto é, $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$. Para esse caso mais geral, a equação de movimento pode ser escrita como

$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \tag{13.4}$$

Para ilustrarmos a aplicação dessa equação, consideremos o ponto material $P$ mostrado na Figura 13.2*a*, que tem massa $m$ e está submetido à ação das forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$. Podemos representar graficamente as duas forças traçando o *diagrama de corpo livre* para o ponto material (Figura 13.2*b*). Uma vez que a *resultante* dessas duas forças *produz* o vetor $m\mathbf{a}$, seu módulo, direção e sentido podem ser representados graficamente no *diagrama dinâmico* (Figura 13.2*c*).[4] O sinal de igualdade entre os diagramas simboliza a equivalência *gráfica* entre o diagrama de corpo livre e o diagrama dinâmico, isto é, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.[5] Em particular, observemos que, se $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$, então a aceleração também é zero, de modo que o ponto $P$ permanecerá em repouso ou movendo-se numa trajetória retilínea com *velocidade constante*. Essas são as condições de *equilíbrio*.

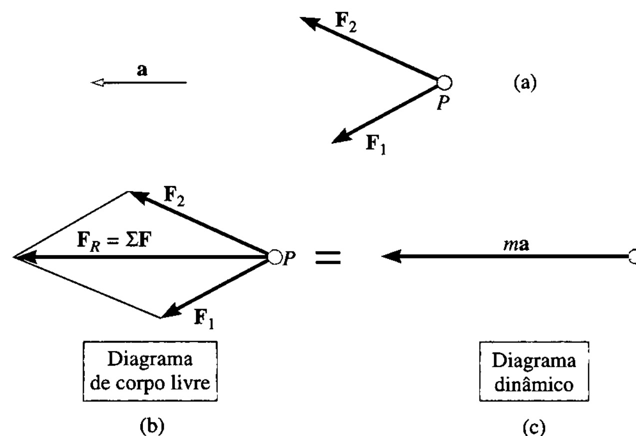



**Figura 13.2**

***Referencial Inercial.*** Sempre que se aplicar a equação de movimento, será necessário que as medidas de aceleração sejam realizadas num *referencial newtoniano* ou *referencial inercial* (também denominado *sistema de referência inercial*). Esse tipo de referencial *não gira*; ele *é fixo* ou *se translada com velo-*

[4] Lembremos que o diagrama de corpo livre considera o ponto material 'livre' de sua vizinhança e mostra todas as forças que agem nele. O diagrama dinâmico refere-se ao movimento do ponto causado pelas forças.

[5] A equação de movimento também pode ser escrita como $\Sigma\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$. O vetor $-m\mathbf{a}$ é denominado *vetor força inercial*. Se for tratado como um 'vetor força', então o equilíbrio criado será denominado *equilíbrio dinâmico*. Esse método de aplicação é conhecido como *princípio de D'Alembert*, em homenagem ao matemático francês Jean le Rond D'Alembert.

*cidade constante (aceleração nula).* Essa definição assegura que a aceleração do ponto material medida por observadores em dois referenciais inerciais diferentes será sempre a *mesma*. Por exemplo, consideremos o ponto material $P$ que se move com uma aceleração absoluta $\mathbf{a}_P$ numa trajetória retilínea, como mostrado na Figura 13.3. Se o observador estiver *fixo* no referencial inercial $x$, $y$, a aceleração $\mathbf{a}_P$ será medida por ele independentemente do módulo, direção e sentido da velocidade $\mathbf{v}_O$ do referencial. Por outro lado, se o observador estiver *fixo* no referencial não inercial $x'$, $y'$ (Figura 13.3), ele não medirá a aceleração $\mathbf{a}_P$ do ponto material. Se, em vez disso, o referencial *tiver uma aceleração* $\mathbf{a}_{O'}$, o ponto parecerá ter aceleração $\mathbf{a}_{P/O'} = \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_{O'}$. Além disso, se o referencial estiver *girando*, como indicado na figura, o ponto parecerá se mover ao longo de uma *trajetória curva* e parecerá ter outros componentes de aceleração (veja a Seção 16.8). Nessas circunstâncias, a aceleração medida não poderá ser usada na segunda lei de Newton para se determinarem as forças que agem no ponto material.

Quando se está estudando movimentos de foguetes e satélites, é justificável considerar os referenciais em relação às estrelas, enquanto problemas de dinâmica de movimentos na superfície terrestre ou próximos a ela podem ser resolvidos usando-se um referencial inercial suposto fixo na Terra. Embora a Terra gire em torno de seu eixo e se desloque ao redor do Sol, as acelerações criadas por esses movimentos são relativamente pequenas e podem ser desprezadas na maioria dos cálculos.

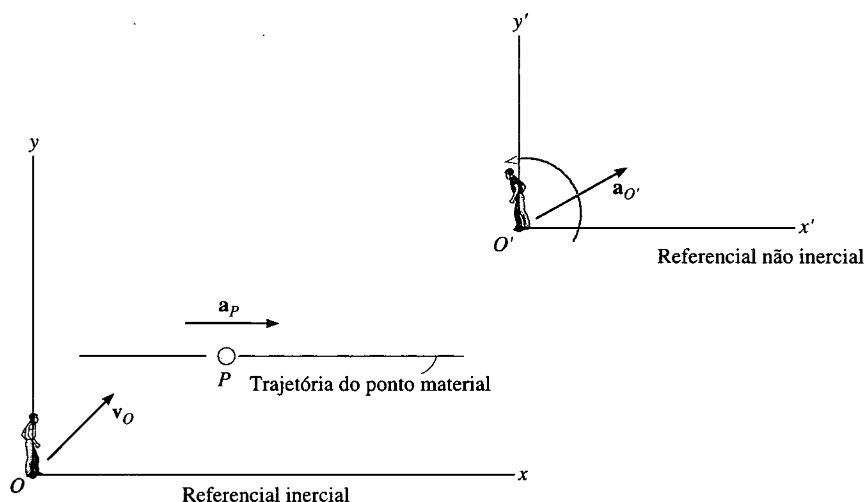
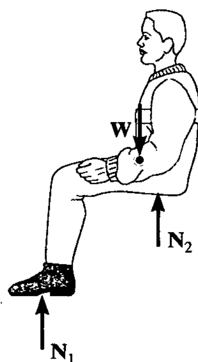



**Figura 13.3**






Em repouso ou com velocidade constante

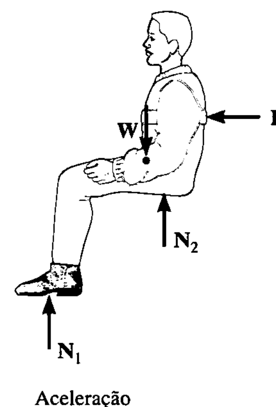
**Figura 1**

*Todos nós conhecemos as sensações experimentadas quando estamos sentados num carro sujeito a uma aceleração. Freqüentemente, as pessoas interpretam essa sensação como causada por uma 'força' que atua sobre elas e tende a empurrá-las contra seus assentos; entretanto, essa sensação pode ser interpretada como devida à sua inércia ou resistência de sua massa a uma variação de velocidade.*

*Consideremos o passageiro mostrado na Figura 1, que está preso ao assento de um dispositivo de teste de altas acelerações. Estando o dispositivo em repouso ou com velocidade constante, nenhuma força atuará sobre as costas do passageiro, como mostrado no diagrama de corpo livre.*

*Quando a propulsão do foguete causa uma aceleração no dispositivo, o assento exerce uma força **F** sobre o passageiro, que é empurrado para a frente (Figura 2). Observemos pela foto que a inércia de sua cabeça resiste a essa mudança de movimento (aceleração), assim ela se move para trás contra o encosto e sua face, que não é rígida, se deforma.*



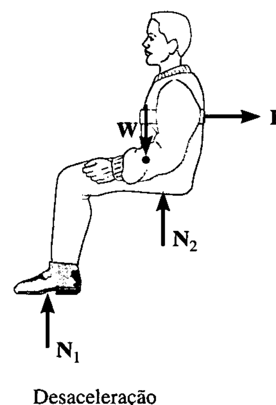


Aceleração

**Figura 2**

*Sob desaceleração (Figura 3) a força **F'** do cinto de segurança tende a parar o passageiro puxando-o, e, assim, sua cabeça perde contato com o encosto e sua face se deforma para a frente, devido à sua inércia ou tendência a continuar seu movimento para a frente. Nenhuma força o está puxando para a frente, embora essa seja a sensação experimentada.*





Desaceleração

**Figura 3**

## 13.3 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO PARA UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS

A equação de movimento será agora estendida para um sistema de $n$ pontos materiais que ocupam uma dada região do espaço, como indicado na Figura 13.4*a*. Em particular, não há restrições quanto à forma de ligação dos pontos materiais. Como resultado, a análise a seguir será igualmente aplicada ao movimento de um sistema sólido, líquido ou gasoso. Num dado instante, o $i$-ésimo ponto material, de massa $m_i$, está submetido a um sistema de forças internas e a uma força externa resultante. A *força interna resultante*, representada simbolicamente por $\mathbf{f}_i$, é determinada pelas forças que os outros pontos materiais do sistema exercem sobre o $i$-ésimo ponto. Normalmente, essas forças se desenvolvem por contato direto, embora a soma se estenda por todos os $n - 1$ pontos do sistema. A *força externa resultante* $\mathbf{F}_i$ representa, por exemplo, o efeito de forças gravitacionais, elétricas, magnéticas ou de contato entre o $i$-ésimo ponto material e os corpos ou pontos materiais adjacentes *não* incluídos no sistema.

Os diagramas de corpo livre e dinâmico para o $i$-ésimo ponto podem ser vistos na Figura 13.14*b*. Aplicando a equação de movimento para o ponto material temos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \qquad \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i\mathbf{a}_i$$

Quando aplicamos a equação de movimento a cada um dos outros pontos do sistema, obtemos equações semelhantes. Somando *vetorialmente* todas essas equações, obtemos

$$\Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{f}_i = \Sigma m_i\mathbf{a}_i$$

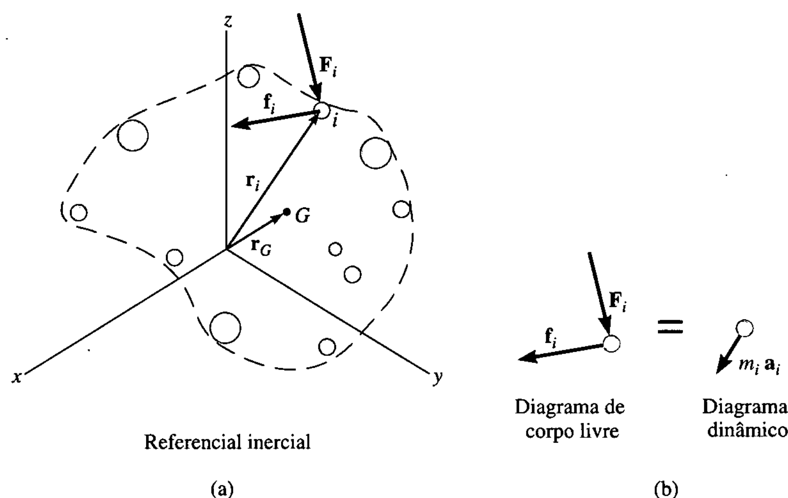



**Figura 13.4**

A soma das forças internas se anula, pois as forças internas entre dois pontos materiais são sempre *opostas*, isto é, têm sempre o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos e, portanto, se cancelam no somatório. Conseqüentemente, resta apenas a soma das forças externas, de modo que a equação de movimento para o sistema de pontos se torna

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i \tag{13.5}$$

Se $\mathbf{r}_G$ é um vetor de posição que localiza o *centro de massa G* dos pontos materiais (Figura 13.4*a*), então, pela definição de centro de massa, $m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$, onde $m = \Sigma m_i$ é a massa total do sistema. Derivando duas vezes essa equação em relação ao tempo e supondo que não haja massa entrando ou saindo do sistema, temos

$$m\mathbf{a}_G = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$

Substituindo esse resultado na Equação 13.5, temos

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \tag{13.6}$$

Logo, a soma das forças externas que agem no sistema é igual à massa total dos pontos materiais multiplicada pela aceleração de seu centro de massa. A Equação 13.6 pode ser interpretada como a equação de movimento de um ponto material de massa $m$ submetido a forças de resultante $\Sigma \mathbf{F}$.

## PONTOS IMPORTANTES

- A equação de movimento baseia-se em evidências experimentais e é válida somente quando aplicada em relação a um referencial inercial.
- A equação de movimento estabelece que uma *força* causa uma aceleração.
- Um referencial inercial não gira; ele apenas tem movimento de translação com velocidade constante ou está em repouso.
- Massa é uma propriedade da matéria que fornece uma medida quantitativa de sua resistência a mudanças de velocidade. É uma quantidade absoluta.
- Peso é uma força causada pela gravidade terrestre; não é absoluto; em vez disso, depende da altitude e latitude da massa em relação à superfície terrestre.

## 13.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO: COORDENADAS CARTESIANAS

Quando um ponto material está se movendo em relação a um sistema de referência inercial $x, y, z$, as forças agentes e a aceleração podem ser expressas em termos de seus componentes cartesianos **i**, **j**, **k** (Figura 13.5). Aplicando a equação de movimento, temos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

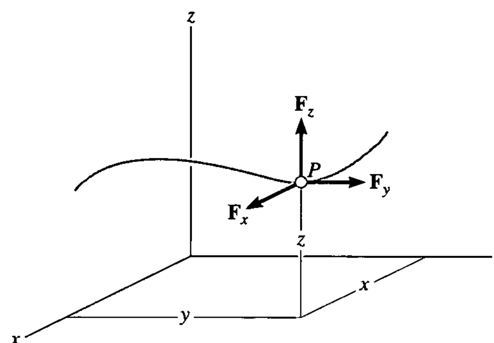



**Figura 13.5**

Para que essa equação seja satisfeita, os componentes **i**, **j**, **k** no primeiro membro devem ser iguais aos seus termos correspondentes no segundo membro. Conseqüentemente, podemos escrever as equações escalares

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_x &= ma_x \\ \Sigma F_y &= ma_y \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned}} \qquad (13.7)$$

Em particular, se o ponto material tem movimento restrito ao plano $x$–$y$, então as duas primeiras equações são usadas para especificar o movimento.

### PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Usam-se as equações de movimento nos problemas que exigem uma relação entre as forças agindo num ponto material e a aceleração que elas causam.

***Diagrama de Corpo Livre***

- Selecione um referencial inercial. Muito freqüentemente, escolhem-se sistemas cartesianos $x$, $y$, $z$ para se analisarem problemas para os quais o ponto material tem *movimento retilíneo*.
- Estabelecido o sistema de coordenadas, desenhe o diagrama de corpo livre. O traçado do diagrama de corpo livre *é muito importante* por fornecer uma representação gráfica que leva em conta *todas as forças* ($\Sigma\mathbf{F}$) agindo no ponto material e, portanto, torna possível expressá-las em componentes $x$, $y$, $z$.
- A direção e o sentido da aceleração **a** do ponto também devem ser estabelecidos. Se os sentidos de seus componentes são desconhecidos, suponha por conveniência matemática que *todos* estejam orientados no *sentido positivo* dos eixos.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (CONTINUAÇÃO)

- A aceleração pode ser representada como o vetor $m\mathbf{a}$ no diagrama dinâmico.[6]
- Identifique as incógnitas no problema.

*Equações de Movimento*

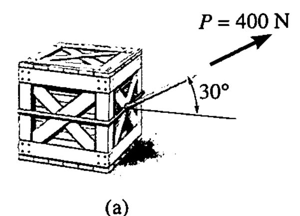
- Se as forças podem ser decompostas diretamente no diagrama de corpo livre, aplique as equações de movimento na forma escalar para cada componente.
- Se a geometria do problema parece ser complicada, o que geralmente ocorre em três dimensões, pode-se utilizar análise vetorial cartesiana na solução do problema.
- *Atrito.* Se um ponto material em movimento tem contato com uma superfície áspera, pode ser necessário usar a *equação de atrito*, que relaciona o coeficiente de atrito cinético $\mu_c$ com as intensidades da força de atrito $\mathbf{F}_f$ e da normal $\mathbf{N}$ agindo nas superfícies em contato, isto é, $F_f = \mu_c N$. Lembre-se de que no diagrama de corpo livre $\mathbf{F}_f$ sempre aponta no sentido oposto ao do movimento do ponto relativamente à superfície com a qual ele se atrita. Se o ponto material estiver no limiar do escorregamento, então o coeficiente de atrito estático deverá ser usado.
- *Mola.* Se o ponto está ligado a uma *mola elástica* de massa desprezível, a intensidade $F_s$ da força da mola sobre o ponto relaciona-se com a deformação desta de acordo com a equação $F_s = ks$, onde $k$ é a rigidez da mola, medida como uma força por unidade de comprimento e $s$, a deformação por tração ou compressão, é a diferença entre o comprimento $l$ da mola deformada e seu comprimento $l_0$ quando não deformada, $s = l - l_0$.

*Cinemática*

- Se a velocidade ou a posição do ponto deve ser obtida, é necessário aplicar as equações cinemáticas apropriadas, uma vez determinada a aceleração a partir de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- Se a *aceleração é função do tempo*, use $a = dv/dt$ e $v = ds/dt$, que após integração fornecem a velocidade e a posição do ponto material.
- Se *a aceleração é função da deslocamento*, integre $a\,ds = v\,dv$ para obter a velocidade como função da posição.
- Se a *aceleração é constante*, use $v = v_0 + a_c t$, $s = s_0 + v_0 t + 1/2 a_c t^2$, $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$ para determinar a velocidade ou a posição do ponto.
- Se o problema envolve o movimento dependente de vários pontos, use o método da Seção 12.9 para relacionar suas acelerações.
- Em todos os casos, assegure-se de que os sentidos positivos dos eixos do sistema inercial usados para escrever as equações cinemáticas são os mesmos daqueles usados para escrever as equações de movimento. Caso contrário, a resolução simultânea das equações resultará em erros.
- Se a solução para um componente vetorial fornece um valor escalar negativo, isto indica que o componente tem o sentido oposto daquele que lhe foi arbitrado.

## EXEMPLO 13.1

Um engradado de 50 kg está em repouso num plano horizontal (Figura 13.6*a*) para o qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}3$. O engradado passa a ser tracionado por uma força de 400 N, como indicado na figura. Determine a sua velocidade 3 s após ter sido posto em movimento.




(a)

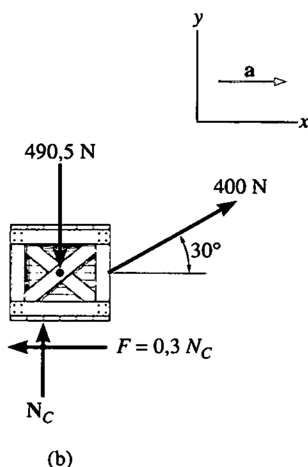
**Figura 13.6**

## SOLUÇÃO

Usando as equações de movimento, podemos relacionar a aceleração do engradado com a força que causa o movimento. A velocidade pode então ser determinada pela cinemática.

***Diagrama de Corpo Livre.*** O peso do engradado é $W = mg = 50$ kg (9,81 m/s$^2$) = 490,5 N. Como mostrado na Figura 13.6*b*, a força de atrito tem intensidade $F = \mu_c N_C$ e age para a esquerda, opondo-se ao sentido do movimento

[6] Neste livro convencionamos o uso do diagrama dinâmico como um recurso gráfico no desenvolvimento de provas e teoria. Nos exemplos, a aceleração do ponto material ou de seus componentes será mostrada como vetores próximos ao diagrama de corpo livre.




do engradado. Supõe-se que a aceleração da caixa é horizontal, no sentido positivo de $x$. Há duas incógnitas, $N_C$ e $a$. (Também podemos adotar um procedimento alternativo e desenhar para o engradado o diagrama de corpo livre *e* o dinâmico (Figura 13.6*c*) antes de aplicar as equações de movimento.)

***Equações de Movimento.*** Usando os dados mostrados no diagrama de corpo livre, temos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 400 \cos 30° - 0{,}3N_C = 50a \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad N_C - 490{,}5 + 400 \operatorname{sen} 30° = 0 \qquad (2)$$

Resolvendo a Equação 2 para $N_C$, substituindo o resultado na Equação 1 e resolvendo para $a$, obtemos

$$N_C = 290{,}5 \text{ N}$$

$$a = 5{,}19 \text{ m/s}^2$$

***Cinemática.*** Observemos que a aceleração é *constante*, uma vez que **P** é constante. Uma vez que a velocidade inicial é nula, a velocidade do engradado após 3 s é

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = v_0 + a_c t$$
$$= 0 + 5{,}19(3)$$
$$= 15{,}6 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$

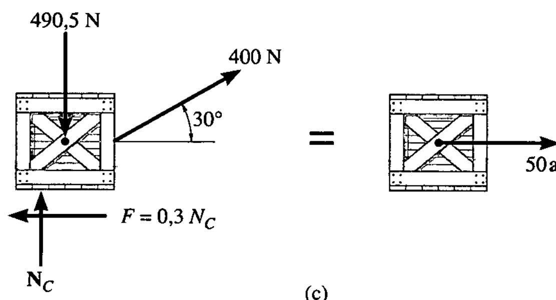
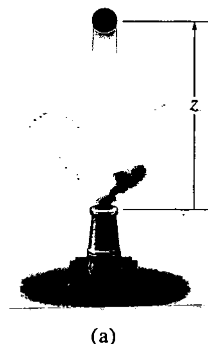



**Figura 13.6**

## EXEMPLO 13.2



(a)

**Figura 13.7**

Dispara-se um projétil de 10 kg verticalmente para cima, a partir do solo, com uma velocidade de 50 m/s (Figura 13.7*a*). Determine a altura máxima alcançada pelo projétil se (a) a resistência do ar é desprezível e (b) a resistência oferecida pelo ar é dada por $F_D = (0{,}01v^2)$ N, onde $v$ é a velocidade do projétil, medida em m/s.

### SOLUÇÃO

Em ambos os casos a força sobre o projétil pode ser relacionada com sua aceleração usando-se a equação de movimento. A seguir, usamos a cinemática para relacionar a aceleração com sua posição.

***Parte (a) Diagrama de Corpo Livre.*** Como mostrado na Figura 13.7*b*, o peso do projétil é $W = mg = 10\ (9{,}81) = 98{,}1$ N. Cosideramos que a aceleração do projétil, que é desconhecida, tem o sentido *positivo* de $z$.

*Equação de Movimento.*

$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z;$ $\qquad -98{,}1 = 10a;$ $\qquad a = -9{,}81 \text{ m/s}^2$

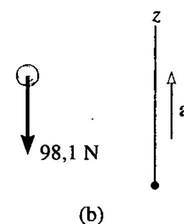
O resultado indica que o projétil, como todo objeto em queda livre próximo à superfície terrestre, tem aceleração *constante* para baixo de 9,81 m/s².

*Cinemática.* No instante inicial, $z_0 = 0$ e $v_0 = 50$ m/s e, na máxima altura alcançada, $z = h$ e $v = 0$. Como a aceleração é constante,

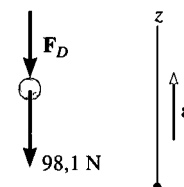
$$(+\uparrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(z - z_0)$$

$$0 = (50)^2 + 2(-9{,}81)(h - 0)$$

$$h = 127 \text{ m}$$ ***Resposta***



(b)



(c)

**Figura 13.7**

***Parte (b) Diagrama de Corpo Livre.*** A força $F_D = (0{,}01v^2)$ N tende a retardar o movimento ascendente do projétil, logo o seu sentido é para baixo, como mostrado no diagrama de corpo livre (Figura 13.7*c*).

*Equação de Movimento.*[7]

$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z;$ $\qquad -0{,}01v^2 - 98{,}1 = 10a;$ $\qquad a = -0{,}01v^2 - 9{,}81$

*Cinemática.* Agora a aceleração *não é constante,* pois $F_D$ depende da velocidade. Como $a = f(v)$, podemos relacionar a aceleração com a posição usando

$$(+\uparrow)\ a\,dz = v\,dv; \qquad (-0{,}001v^2 - 9{,}81)\,dz = v\,dv$$

Separando as variáveis, considerando que $z_0 = 0$, $v_0 = 50$ m/s (positivo para cima) e que, para $z = h$, $v = 0$ e integrando, obtemos

$$\int_0^h dz = -\int_{50}^{0} \frac{v\,dv}{0{,}001v^2 + 9{,}81} = -500 \ln(v^2 + 9.810)\Big|_{50}^{0}$$

$$h = 114 \text{ m}$$ ***Resposta***

A resposta indica, como era de esperar, uma altura menor do que na parte (a), em virtude da resistência do ar.

## EXEMPLO 13.3

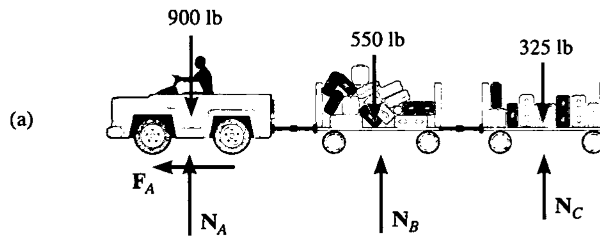
O carrinho de bagagem $A$ mostrado na foto pesa 900 lb e reboca um vagonete $B$ de 550 lb e um $C$ de 325 lb. Por um breve intervalo de tempo, a força de atrito desenvolvida nas rodas do carrinho é $F_A = (40t)$ lb, onde $t$ é dado em segundos. Se o carrinho parte do repouso, determine sua velocidade após 2 segundos. Qual é a força horizontal agindo no acoplamento do carrinho e no vagonete $B$? Despreze as dimensões do carrinho e dos vagonetes.




### SOLUÇÃO

*Diagrama de Corpo Livre.* Como mostrado na Figura 13.8*a*, é a força de atrito que comunica uma aceleração ao carrinho e aos vagonetes. Aqui estamos considerando os três veículos.

[7] Observemos que se o projétil fosse disparado para baixo, com $z$ positivo para baixo, a equação de movimento seria $-0{,}01v^2 + 9{,}81 = 10a$.




***Equação de Movimento.*** Somente o movimento na direção horizontal tem de ser considerado.

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 40t = \left(\frac{900 + 550 + 325}{32{,}2}\right)a$$

$$a = 0{,}7256t$$

***Cinemática.*** Uma vez que a aceleração é função do tempo, a velocidade do carrinho pode ser obtida usando-se $a = dv/dt$ com a condição inicial $v_0 = 0$ em $t = 0$. Tem-se

$$\int_0^v dv = \int_0^2 0{,}7256t\, dt; \qquad v = 0{,}3628t^2\Big|_0^2 = 1{,}45 \text{ pé/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

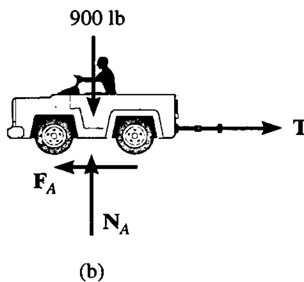



**Figura 13.8**

***Diagrama de Corpo Livre.*** Para obtermos a força entre o carrinho e o vagonete $B$, consideramos um diagrama de corpo livre para o carrinho, de modo que podemos 'expor' a força de acoplamento **T** como força externa (Figura 13.8*b*).

***Equação de Movimento.*** Quando $t = 2$ s,

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 40(2) - T = \left(\frac{900}{32{,}2}\right)[0{,}7256(2)]$$

$$T = 39{,}4 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Tente obter esse mesmo resultado considerando um diagrama de corpo livre para os vagonetes $B$ e $C$.

## EXEMPLO 13.4

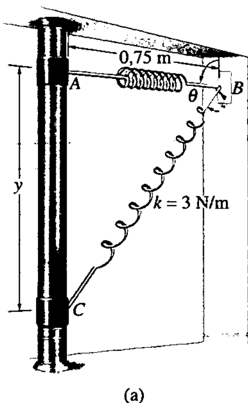



**Figura 13.9**

Um colar liso $C$ de 2 kg (Figura 13.9*a*) está preso numa mola não deformada de rigidez $k = 3$ N/m e de comprimento 0,75 m. Se o colar inicialmente em repouso é solto em $A$, determine sua aceleração e a força normal da barra sobre o colar no instante em que $y = 1$ m.

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** A Figura 13.9*b* mostra o diagrama de corpo livre do colar, quando localizado numa posição arbitrária $y$. Observemos que o seu peso é $W = 2(9{,}81) = 19{,}62$ N. Além disso, consideremos que o colar tenha uma aceleração **a** para baixo, no sentido positivo de $y$. Há quatro incógnitas, $N_C$, $F_s$, $a$ e $\theta$.

***Equação de Movimento.***

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -N_C + F_s \cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y;$ $\qquad 19{,}62 - F_s \operatorname{sen} \theta = 2a \qquad (2)$

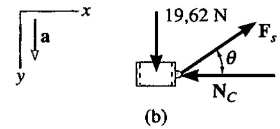



**Figura 13.9**

Da Equação 2, vemos que a aceleração depende da intensidade e da direção da força da mola. A solução para $N_C$ e $a$ será obtida assim que se determinarem $F_s$ e $\theta$.

A intensidade da força da mola é função da deformação $s$, isto é, $F_s = ks$. Aqui o comprimento da mola não deformada é $AB = 0{,}75$ m (Figura 13.9*a*); portanto

$s = CB - AB = \sqrt{y^2 + (0{,}75)^2} - 0{,}75$. Como $k = 3$ N/m, então

$$F_s = ks = 3\left(\sqrt{y^2 + (0{,}75)^2} - 0{,}75\right) \qquad (3)$$

Da Figura 13.9*a*, o ângulo $\theta$ é relacionado com $y$ por trigonometria.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{0{,}75} \qquad (4)$$

A substituição de $y = 1$ m nas equações 3 e 4 nos dá $F_s = 1{,}50$ N e $\theta = 53{,}1°$. Substituindo esses resultados nas equações 1 e 2, obtemos

$$N_C = 0{,}900 \text{ N} \qquad \textit{Resposta}$$

$$a = 9{,}21 \text{ m/s}^2\downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 13.5

Abandona-se, a partir do repouso, o bloco $A$ de 100 kg mostrado na Figura 13.10*a*. Desprezando o peso das polias e dos cabos, determine a velocidade do bloco $B$ após 2 s.

### SOLUÇÃO

***Diagramas de Corpo Livre.*** Como as massas das polias são *desprezíveis*, então, para a polia $C$, $ma = 0$ e podemos aplicar $\Sigma F_y = 0$, como indicado na Figura 13.10*b*. Os diagramas de corpo livre para os blocos $A$ e $B$ são mostrados nas figuras 13.10*c* e *d*, respectivamente. Observemos que para $A$ permanecer estático é necessário que $T = 490{,}5$ N, enquanto, para $B$, $T = 196{,}2$ N. Logo, $A$ será deslocado para baixo e $B$, para cima. Aqui *consideramos* que para ambos os blocos a aceleração é para baixo, no sentido de $+s_A$ e $+s_B$. As três incógnitas são $T$, $a_A$ e $a_B$.

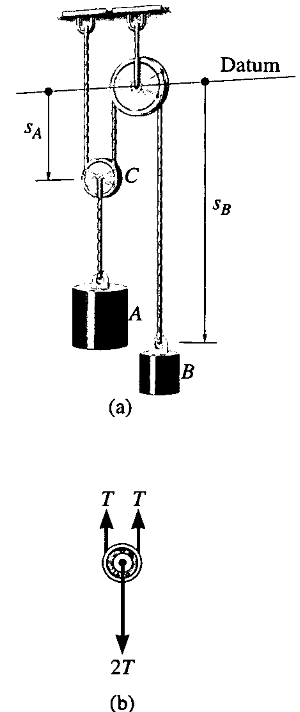



**Figura 13.10**

***Equações de Movimento.***

Bloco A (Figura 13.10c):

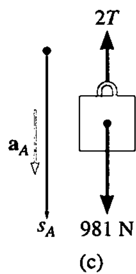
$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y;$ $\qquad 981 - 2T = 100a_A \qquad (1)$

Bloco B (Figura 13.10d):

$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y;$ $\qquad 196{,}2 - T = 20a_B \qquad (2)$

***Cinemática.*** A terceira equação necessária para a solução é obtida relacionando-se $a_A$ com $a_B$ pelo uso da análise de movimento dependente. Usando-se a técnica desenvolvida na Seção 12.9, as coordenadas $s_A$ e $s_B$ definem as posições de $A$ e $B$ a partir de uma referência fixa (Figura 13.10*a*). Vemos que

$$2s_A + s_B = l$$



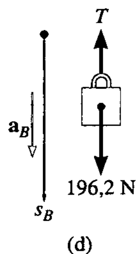




**Figura 13.10**

onde $l$ é constante e representa o comprimento vertical total do cabo. Derivando duas vezes essa expressão, em relação ao tempo, obtemos

$$2a_A = -a_B \tag{3}$$

Observemos que, para as equações 1 a 3, o *sentido positivo foi sempre considerado para baixo*. É muito importante que essa hipótese seja consistente, pois estamos procurando obter uma solução simultânea das equações. A solução é

$$T = 327{,}0 \text{ N}$$
$$a_A = 3{,}27 \text{ m/s}^2$$
$$a_B = -6{,}54 \text{ m/s}^2$$

Logo, quando o bloco $A$ se acelera *para baixo*, o bloco $B$ se acelera *para cima*. Como $a_B$ é constante, a velocidade de $B$ em 2s é

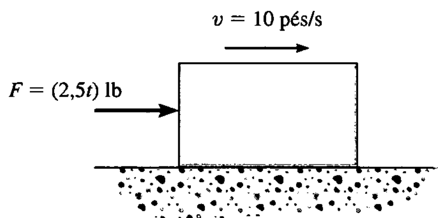
$(+\downarrow)$
$$v = v_0 + a_B t$$
$$= 0 + (-6{,}54)(2)$$
$$= -13{,}1 \text{ m/s}$$ ***Resposta***

O sinal negativo indica que o bloco $B$ está subindo.

# PROBLEMAS

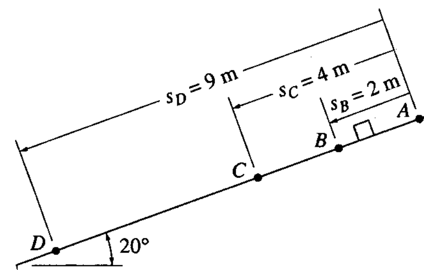
**13.1.** A Lua tem massa de $73{,}5(10^{21})$ kg e a Terra, de $5{,}98(10^{24})$ kg. Se seus centros distam $384(10^6)$ m, determine a intensidade da força gravitacional com que esses dois corpos se atraem.

**13.2.** O bloco de 10 lb tem uma velocidade inicial de 10 pés/s sobre um plano liso. Uma força $F = (2{,}5t)$ lb, onde $t$ é dado em segundos, age sobre o bloco durante 3 s. Determine a velocidade final do bloco e a distância que ele percorre nesse tempo.



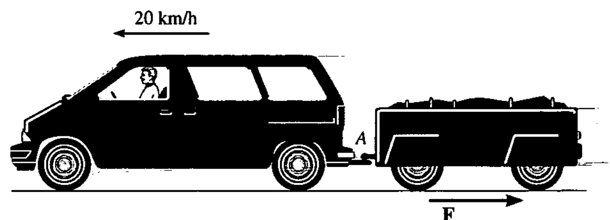

**Problema 13.2**

**13.3.** Usando um plano inclinado para retardar o movimento de um objeto em queda e assim fazer observações mais exatas, Galileu conseguiu determinar experimentalmente que a distância percorrida por um objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo gasto no percurso. Mostre esse resultado, isto é, $s \propto t^2$, determinando o tempo necessário $t_B$, $t_C$ e $t_D$ para um bloco de massa $m$ escorregar do repouso em $A$ até os pontos $B$, $C$ e $D$, respectivamente. Despreze os atritos.



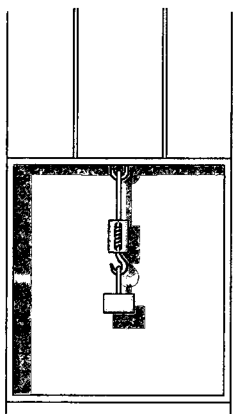

**Problema 13.3**

***13.4.** A van está trafegando a 20 km/h quando o acoplamento $A$ do trailer falha. Se o trailer tem massa de 250 kg e se desloca por 45 m antes de parar, determine a força horizontal $F$ criada pelo atrito de rolamento que o leva a parar.




**Problema 13.4**

**13.5.** Um bloco de massa igual a 2 kg está suspenso por um dinamômetro no teto de um elevador que está descendo. Se a leitura no dinamômetro, que mede a força da sua mola, é de 20 N, determine a aceleração do elevador. Despreze a massa do dinamômetro.



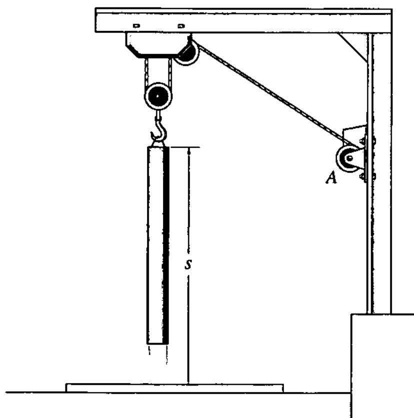
**Problema 13.5**

**13.6.** O carrinho de bagagem $A$ tem massa de 800 kg e é usado para tracionar dois vagonetes, cada um deles com massa de 300 kg. Se a força de tração sobre o carrinho é $F =$ 480 N, determine a sua aceleração inicial. Qual é a aceleração do veículo se o acoplamento em $C$ falha repentinamente? As rodas do veículo podem rolar livremente. Despreze a massa das rodas.



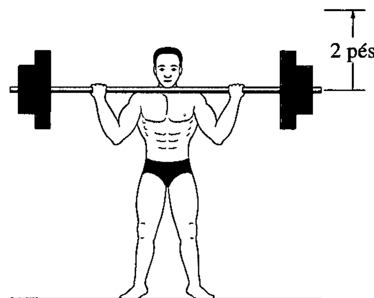

**Problema 13.6**

**13.7.** O cilindro de combustível com 500 kg de um reator nuclear está sendo elevado por meio de um sistema de polias como mostrado na figura. O cilindro é elevado com uma aceleração constante tal que em $t = 0, s = 0$ e $v = 0$. Quando $t = 1{,}5$ s, $s = 2{,}5$ m. Determine a tensão no cabo em $A$ durante o movimento.




**Problema 13.7**

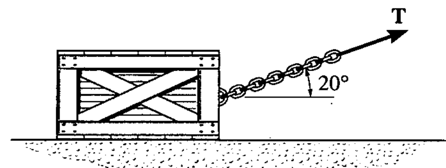
***13.8.** Um homem pesa 180 lb e suporta o haltere com peso de 100 lb. Partindo do repouso, ele o eleva 2 pés no ar em 1,5 s. Determine a reação de ambos os pés sobre o solo durante o levantamento do haltere. Suponha que o movimento se dê com aceleração constante.




**Problema 13.8**

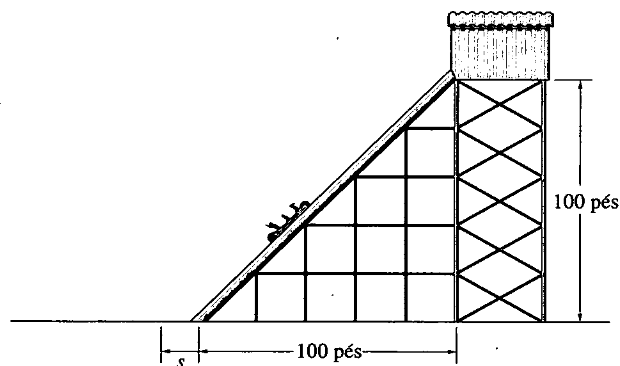
**13.9.** O engradado tem massa de 80 kg e está sendo puxado pela corrente que está sempre formando um ângulo de 20° com a horizontal, como mostrado na figura. Se a intensidade de $T$ aumenta até o engradado começar a escorregar, determine a sua aceleração inicial se o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0{,}5$ e o cinético, $\mu_c = 0{,}3$.

**13.10.** O engradado tem massa de 80 kg e está sendo puxado pela corrente que está sempre formando um ângulo de 20° com a horizontal, como mostrado na figura. Determine a aceleração do engradado para $t = 2$ s, supondo que o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}3$ e a força de tração é $T = (90t^2)$ N, onde $t$ é dado em segundos.



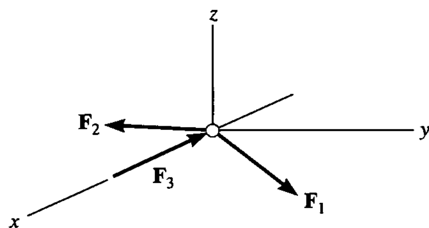

**Problemas 13.9/10**

**13.11.** O bote de 800 lb parte do repouso e escorrega pela calha inclinada entrando na piscina. Se a força de atrito na calha é $F_r = 30$ lb e na piscina, $F_r = 80$ lb, determine a velocidade do bote quando $s = 5$ pés.



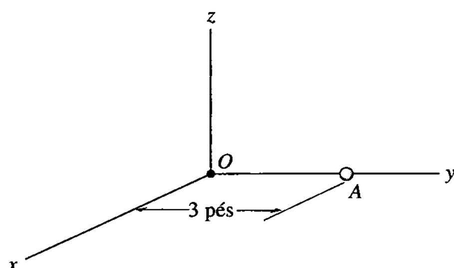

**Problema 13.11**

***13.12.** A bola de 6 lb está submetida à ação de seu peso e das forças $\mathbf{F}_1 = \{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{t^2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\}$ lb e $\mathbf{F}_3 = \{-2t\mathbf{i}\}$ lb, onde $t$ é dado em segundos. Determine a distância da bola à origem 2 s após ela ter sido solta a partir do repouso.



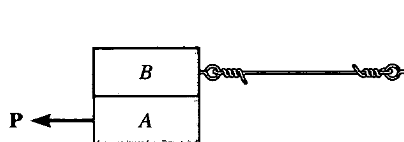

**Problema 13.12**

**13.13.** A bola $A$ de 2 lb está submetida à ação de seu peso e do sistema de forças $\mathbf{F}_1 = \{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{3i - 1\mathbf{k}\}$ lb e $\mathbf{F}_3 = \{1\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}$ lb, onde $t$ é dado em segundos. Determine a distância da bola à origem 3 s após ela ter sido solta a partir do repouso.

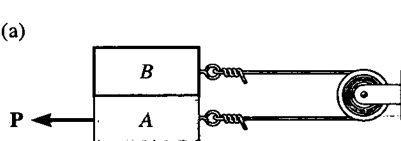



**Problema 13.13**

**13.14.** Cada um dos dois blocos tem massa $m$. O coeficiente de atrito cinético para todas as superfícies em contato é $\mu$. Se a força horizontal **P** move o bloco inferior, determine a aceleração desse bloco em (a) e (b).



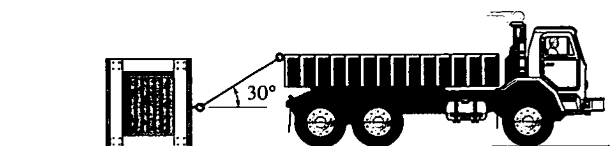

(a)




(b)

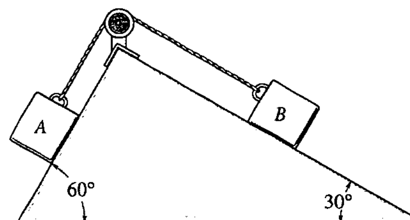
**Problema 13.14**

**13.15.** O motorista tenta rebocar o engradado de 500 lb usando uma corda que suporta uma tensão de 200 lb. Se o engradado está inicialmente em repouso, determine sua aceleração máxima se o coeficiente de atrito estático entre o engradado e o solo é $\mu_e = 0,4$ e o de atrito cinético é $\mu_c = 0,3$.



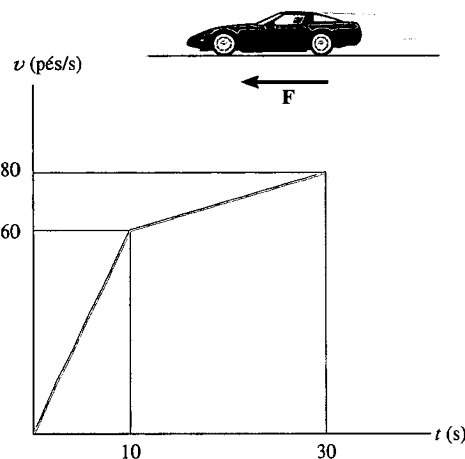

**Problema 13.15**

***13.16.** O duplo plano inclinado suporta os blocos $A$ e $B$, cada um com peso de 10 lb. Se o coeficiente de atrito cinético entre os blocos e o plano é $\mu_c = 0,1$, determine a aceleração de cada bloco.



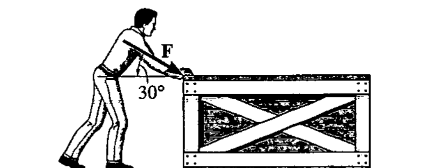

**Problema 13.16**

**13.17.** A figura mostra o gráfico da velocidade de um carro de 3.500 lb em um intervalo de 30 s. Construa um gráfico da variação da força de tração sobre o carro.




**Problema 13.17**

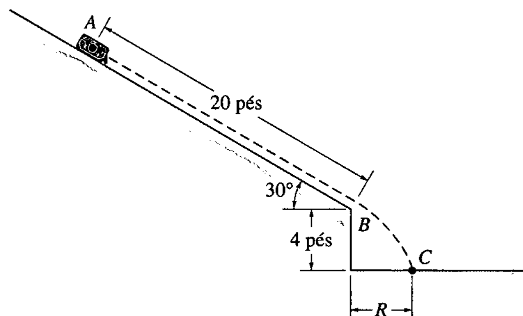
**13.18.** O homem empurra o engradado de 60 lb com uma força **F**. A força se mantém dirigida para baixo a 30° em relação à horizontal, como mostrado na figura, e sua intensidade aumenta até que o engradado começa a escorregar. Determine a aceleração inicial do engradado se o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0,6$ e o de atrito cinético é $\mu_c = 0,3$.




**Problema 13.18**

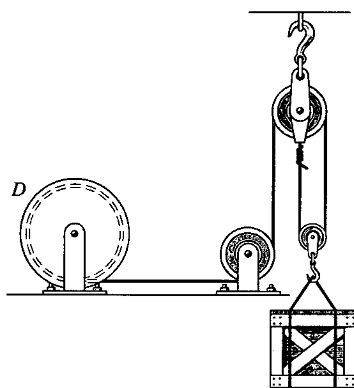
**13.19.** A mala de 40 lb inicialmente em repouso desliza 20 pés ao longo da rampa lisa. Determine o ponto $C$ onde a mala atinge o piso. Quanto tempo a mala leva para ir de $A$ a $C$?

***13.20.** Resolva o Problema 13.19, considerando que a mala tem uma velocidade inicial $v_A = 10$ pés/s, rampa abaixo e que o coeficiente de atrito cinético ao longo de $AB$ é $\mu_c = 0{,}2$.



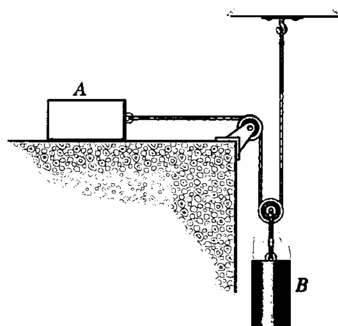

**Problemas 13.19/20**

**13.21.** O tambor enrola o cabo a uma aceleração de 5 m/s$^2$. Determine a tensão no cabo se o engradado tem massa de 800 kg.



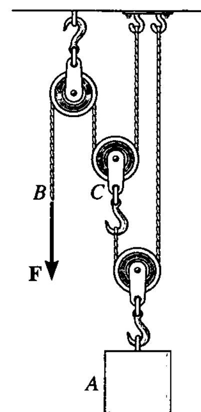

**Problema 13.21**

**13.22.** Num dado instante, o bloco $A$ de 10 lb desloca-se para a direita com velocidade $v_A = 2$ pés/s. Se o coeficiente de atrito cinético entre $A$ e a superfície é $\mu_c = 0{,}2$, determine a velocidade de $A$ após um deslocamento de 4 pés. O bloco $B$ pesa 20 lb.



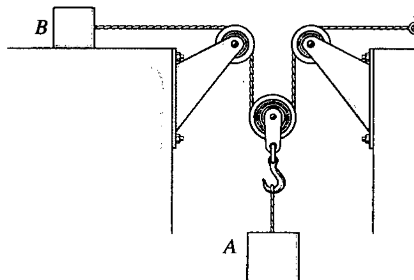

**Problema 13.22**

**13.23.** Aplica-se uma força $F = 15$ lb a uma corda inicialmente em repouso. Determine quanto o bloco $A$ sobe em 2 s. Despreze o peso das polias e da corda.



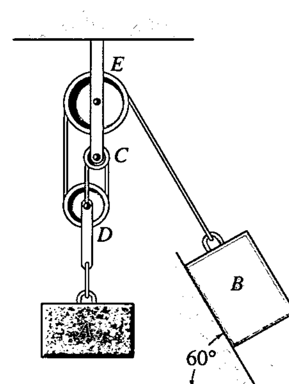

**Problema 13.23**

***13.24.** Em um dado instante o bloco $A$ de 10 lb desce com velocidade de 6 pés/s. Determine sua velocidade 2 s mais tarde. O bloco $B$ pesa 4 lb e o coeficiente de atrito cinético entre ele e o plano é $\mu_c = 0{,}2$. Despreze a massa das polias e da corda.



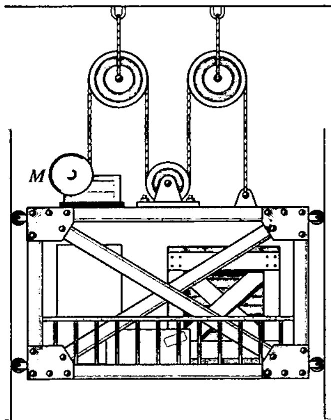

**Problema 13.24**

**13.25.** Determine a massa do bloco $A$, inicialmente em repouso, de modo que após ser solto ele faz o bloco $B$ de 5 kg subir 0,75 m ao longo do plano inclinado e liso, em $t = 2$ s. Despreze a massa das polias e das cordas.



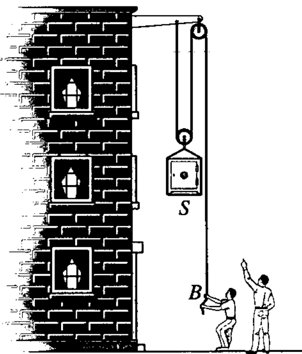

**Problema 13.25**

**13.26.** Um elevador de carga tem massa de 500 kg (incluindo sua carga). Ele é impedido de girar devido a trilhos e rodas montados nas laterais. Partindo do repouso, o motor $M$ atinge em 2 s uma taxa de enrolamento do cabo de 6 m/s, *medida em relação ao elevador*. Determine a aceleração constante do elevador e a tensão no cabo. Despreze a massa das polias e dos cabos.




**Problema 13.26**

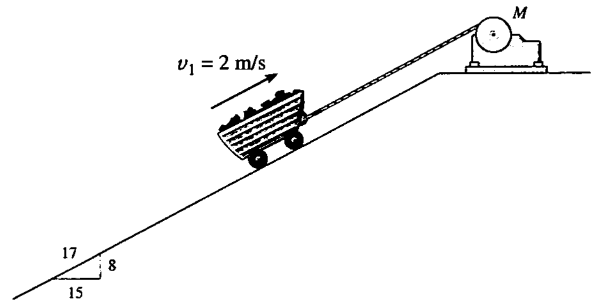
**13.27.** O cofre $S$ pesa 200 lb e está suspenso por meio de um arranjo de corda e polias. Se a extremidade da corda é dada a um menino $B$ de 90 lb, determine a aceleração dele, no caso de ele não ter soltado a corda. Despreze a massa das polias e da corda.




**Problema 13.27**

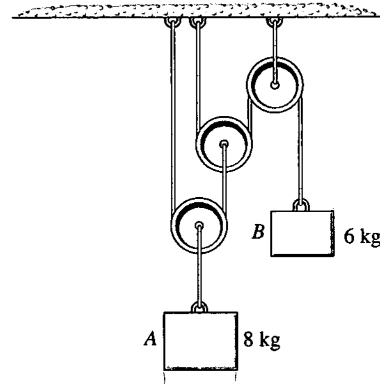
***13.28.** A gôndola de 400 kg está sendo elevada num plano inclinado por meio de um cabo e um motor $M$. Por um breve intervalo de tempo, a força no cabo é dada por $F = (3.600t^2)$ N, onde $t$ é dado em segundos. Se o cabo tem velocidade inicial $v_1 = 2$ m/s quando $t = 0$, determine sua velocidade quando $t = 2$ s.

**13.29.** A gôndola de 400 kg está sendo elevada num plano inclinado por meio de um cabo e um motor $M$. Por um breve intervalo de tempo, a força no cabo é dada por $F = (3.600t^2)$ N, onde $t$ é dado em segundos. Se o cabo tem velocidade inicial $v_1 = 2$ m/s em $s = 0$ e $t = 0$, determine a distância percorrida plano acima quando $t = 2$ s.



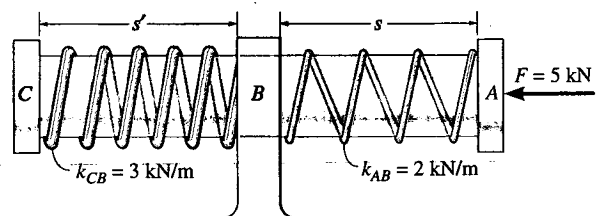

**Problemas 13.28/29**

**13.30.** Determine a tensão nos cabos ligados a cada bloco e a aceleração de cada um deles. Despreze a massa das polias e dos cabos.




**Problema 13.30**

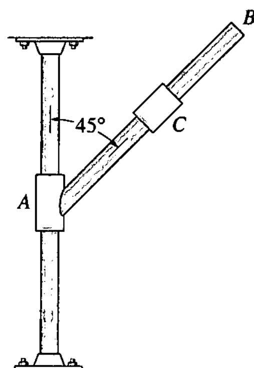
**13.31.** O eixo $CA$ de 2 kg passa através de um mancal radial liso em $B$. Inicialmente as molas, que são montadas justas no eixo, estão não deformadas quando não há força aplicada a ele. Nessa posição $s = s' = 250$ mm e o eixo está inicialmente em repouso. Se uma força horizontal $F = 5$ kN é aplicada, como mostrado na figura, determine a velocidade do eixo no instante em que $s = 50$ mm e $s' = 450$ mm. As extremidades das molas estão presas no mancal em $B$ e nas extremidades $A$ e $C$ do eixo.




**Problema 13.31**

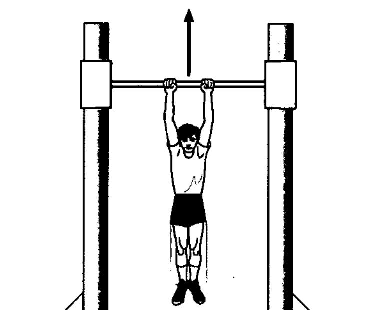
***13.32.** O colar $C$ de 2 kg pode deslizar ao longo do eixo liso $AB$. Determine a aceleração do colar supondo que (a) $AB$ é fixo, (b) o colar $A$, que é fixo em $AB$, desce com velocidade constante ao longo da barra vertical e (c) o colar $A$ está sujeito a uma aceleração constante para baixo de 2 m/s$^2$. Em todos os casos, o colar $A$ se move no plano.

**13.33.** O colar $C$ de 2 kg pode deslizar ao longo do eixo liso $AB$. Determine a aceleração de $C$ se o colar $A$ sobe com uma aceleração de 4 m/s².



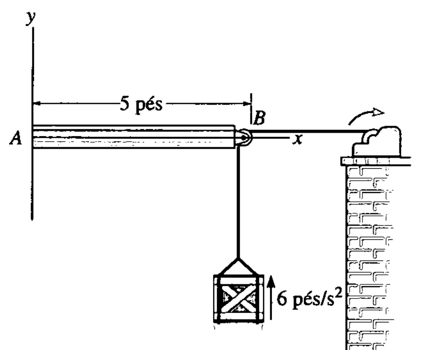

**Problemas 13.32/33**

**13.34.** Um menino que pesa 80 lb pendura-se uniformemente na barra. Determine a força em cada um de seus braços em $t = 2$ s, supondo que a barra está subindo (a) com uma velocidade constante de 3 pés/s e (b) com uma velocidade $v = (4t^2)$ pés/s, onde $t$ é dado em segundos.



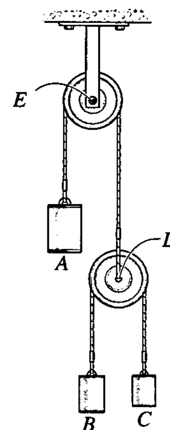
**Problema 13.34**

**13.35.** O engradado de 30 lb está sendo erguido com uma aceleração constante de 6 pés/s². Se a barra uniforme $AB$ pesa 200 lb, determine os componentes da reação em $A$. Despreze a massa e o tamanho da polia em $B$. *Dica:* primeiro determine a tensão no cabo e, então, analise as forças na barra usando a estática.



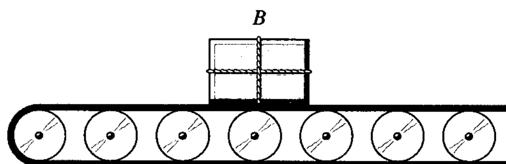

**Problema 13.35**

***13.36.** Os cilindros $B$ e $C$ têm massa de 15 kg e 10 kg, respectivamente. Determine a massa que $A$ deve ter para que não se mova quando se soltarem todos os cilindros. Despreze a massa das polias e das cordas.



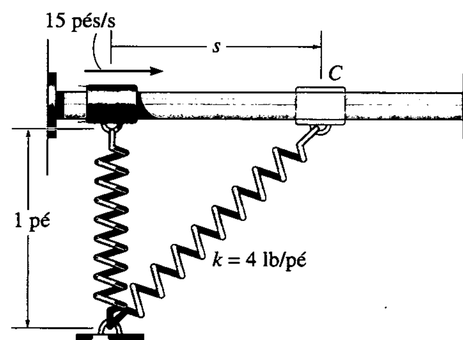

**Problema 13.36**

**13.37.** A esteira transportadora move-se a 4 m/s. Se o coeficiente de atrito estático entre a correia e o pacote $B$ de 10 kg é $\mu_e = 0,2$, determine o tempo mínimo para que a esteira pare sem haver escorregamento do pacote sobre ela.




**Problema 13.37**

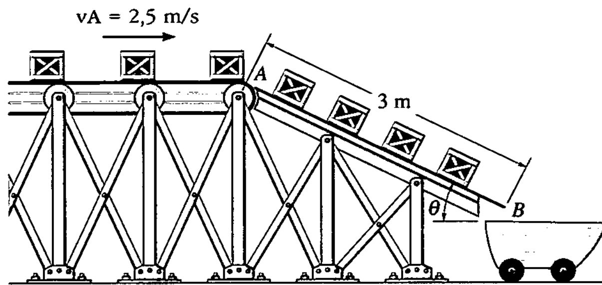
**13.38.** O colar $C$ de 2 lb ajusta-se no eixo liso. Se a mola não está deformada quando $s = 0$ e o colar tem velocidade de 15 pés/s, determine a velocidade do colar quando $s = 1$ pé.




**Problema 13.38**

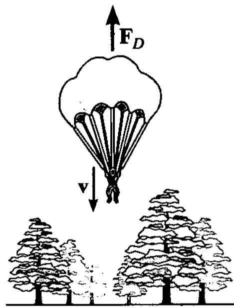
**13.39.** A esteira transportadora entrega cada engradado de 12 kg à rampa em $A$ com velocidade de 2,5 m/s na *direção* desta; isto é, cada engradado inicia seu movimento de descida na rampa com velocidade de 2,5 m/s. Se o coeficiente de atrito cinético entre cada engradado e a rampa é $\mu_c = 0,3$,

determine com que velocidade cada engradado deixa a rampa em $B$. Considere $\theta = 30°$.



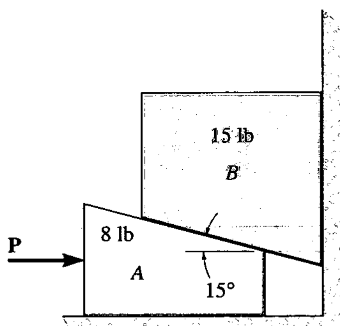

**Problema 13.39**

***13.40.** Um pára-quedista de massa $m$ abriu seu pára-quedas de uma posição de repouso a uma grande altitude. Se a resistência de arrasto do ar é dada por $F_D = kv^2$, onde $k$ é uma constante, determine a velocidade do pára-quedista após um tempo $t$. Qual é a sua velocidade quando ele atinge o solo? Essa velocidade é denominada *velocidade terminal*, que pode ser determinada fazendo-se o tempo de queda $t \rightarrow \infty$.




**Problema 13.40**

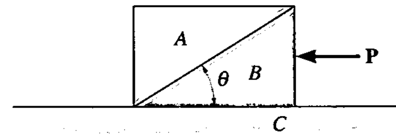
**13.41.** Se uma força $P = 12$ lb é aplicada ao bloco $A$, determine a aceleração do bloco $B$. Despreze os atritos.




**Problema 13.41**

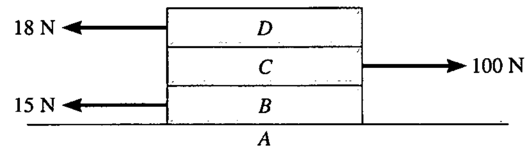
**13.42.** Cada um dos blocos $A$ e $B$ tem massa $m$. Determine a força horizontal máxima $P$ que pode ser aplicada a $B$ para que $A$ não se mova relativamente a $B$. Todas as superfícies são lisas.

**13.43.** Cada um dos blocos $A$ e $B$ tem massa $m$. Determine a força horizontal máxima $P$ que pode ser aplicada a $B$ para que $A$ não escorregue sobre $B$. O coeficiente de atrito estático entre $A$ e $B$ é $\mu_e$. Despreze qualquer atrito entre $B$ e $C$.



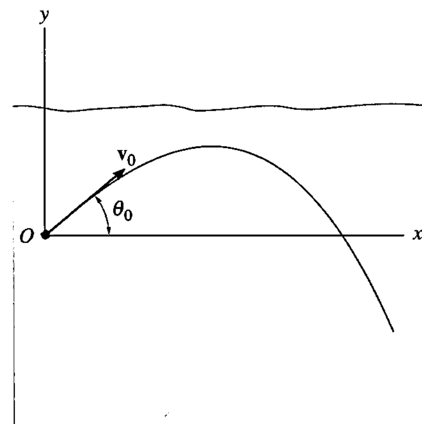

**Problemas 13.42/43**

***13.44.** Cada uma das placas tem massa de 10 kg. Os coeficientes de atrito estático e cinético são $\mu_e = 0,3$ e $\mu_c = 0,2$, respectivamente. Determine a aceleração de cada placa quando se aplicam as três forças horizontais mostradas na figura.




**Problema 13.44**

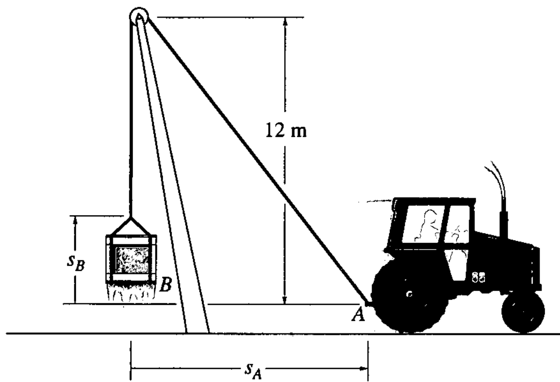
**13.45.** Dispara-se um projétil de massa $m$ num líquido a um ângulo $\theta_0$, com velocidade inicial $v_0$. O líquido desenvolve sobre o projétil uma resistência de atrito (também denominada força de arrasto), que é proporcional à velocidade, isto é, $F = kv$, onde $k$ é uma constante. Determine os componentes $x$ e $y$ da posição em qualquer instante. Calcule também a distância máxima percorrida pelo projétil.




**Problema 13.45**

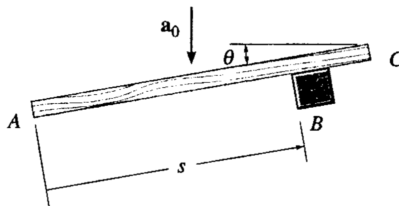
▪**13.46.** O trator é usado para levantar a carga $B$ de 150 kg com uma corda de 24 m de comprimento, um pau-de-carga e uma polia. Se o trator se move para a direita a uma velocidade constante de 4 m/s, determine a tensão na corda quando $s_A = 5$ m. Quando $s_A = 0, s_B = 0$.

**13.47.** O trator é usado para levantar a carga $B$ de 150 kg com uma corda de 24 m de comprimento, um pau-de-carga e uma polia. Se o trator se move para a direita com aceleração de 3 m/s$^2$ e tem velocidade de 4 m/s no instante em que $s_A = 5$ m, determine a tensão na corda nesse instante. Quando $s_A = 0, s_B = 0$.




**Problemas 13.46/47**

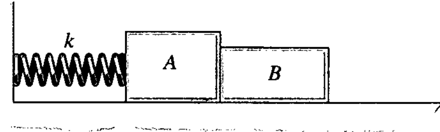
***13.48.** O bloco liso $B$ de dimensões desprezíveis tem massa $m$ e repousa num plano horizontal. A tábua $AC$ empurra o bloco a um ângulo $\theta$ com aceleração $\mathbf{a}_0$ constante. Determine a velocidade do bloco ao longo da tábua e a distância $s$ que o bloco percorre (também ao longo da tábua). O bloco parte do repouso em $s = 0$ quando $t = 0$.




**Problema 13.48**

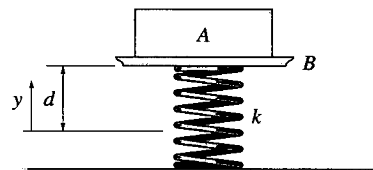
**13.49.** O bloco $A$ tem massa $m_A$ e está preso a uma mola não deformada de rigidez $k$ e comprimento $l_0$. Se o bloco $B$ de massa $m_B$ é pressionado contra $A$ e a mola se deforma uma distância $d$, determine a distância que ambos os blocos deslizam sobre a superfície lisa antes de se separarem. Qual é a velocidade no momento da separação?

**13.50.** O bloco $A$ tem massa $m_A$ e está preso a uma mola de rigidez $k$ e comprimento $l_0$. Se outro bloco $B$ de massa $m_B$ é pressionado contra $A$ e a mola se deforma uma distância $d$, mostre que para ocorrer a separação é necessário que $d > 2\mu_c g\,(m_A + m_B)/k$, onde $\mu_c$ é o coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e o solo. Que distância os blocos deslizam sobre a superfície antes da separação?




**Problemas 13.49/50**

**13.51.** O bloco $A$ tem massa $m_A$ e se apóia num prato $B$ de massa $m_B$. Ambos são sustentados por uma mola de rigidez $k$ que está presa ao prato $B$ e ao solo. Determine a distância $d$ que o prato deve ser empurrado para baixo, a partir da posição de equilíbrio, e então ser solto a partir do repouso para que o bloco se separe dele no instante em que a mola fique não deformada.




**Problema 13.51**

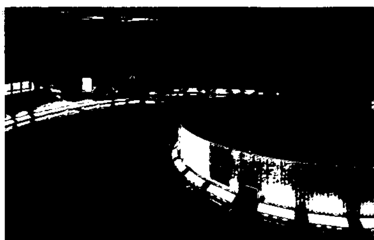
# 13.5 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO: COORDENADAS NORMAL E TANGENCIAL

Quando um ponto material se desloca ao longo de uma trajetória curva conhecida, a equação de movimento desse ponto pode ser escrita nas direções tangencial, normal e binormal. Temos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_t \mathbf{u}_t + \Sigma F_n \mathbf{u}_n + \Sigma F_b \mathbf{u}_b = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n$$

Nessa equação, $\Sigma \mathbf{F}_t$, $\Sigma \mathbf{F}_n$ e $\Sigma \mathbf{F}_b$ representam as somas dos componentes de todas as forças que agem no ponto material nas direções tangencial, normal e binormal, respectivamente (Figura 13.11). Observemos que não há movimento do ponto material na direção binormal, pois o movimento se restringe à trajetória. Essa equação é satisfeita se



*A centrífuga mostrada na foto é utilizada para submeter um passageiro a altas acelerações normais provocadas pelas altas rotações. Essas acelerações são causadas pela força normal exercida pelo assento da centrífuga sobre o passageiro.*

$$\Sigma F_t = ma_t$$
$$\Sigma F_n = ma_n \qquad (13.8)$$
$$\Sigma F_b = 0$$

Lembremos que $a_t$ ($= dv/dt$) representa a taxa temporal de variação da velocidade escalar (módulo da velocidade). Conseqüentemente, se $\Sigma\mathbf{F}_t$ age no sentido do movimento, a velocidade escalar aumenta e, caso aja no sentido oposto, a velocidade escalar decresce. Da mesma forma, $a_n$ ($=v^2/\rho$) representa a taxa temporal de variação da direção da velocidade. Estando o vetor $\mathbf{a}_n$ sempre voltado para o centro de curvatura da trajetória, então $\Sigma\mathbf{F}_n$, que causa essa aceleração, também tem esse sentido. Por exemplo, quando o movimento do ponto material é restrito a uma trajetória circular com velocidade escalar constante, há uma força normal sobre ele causada pela restrição a fim de alterar a direção da velocidade (mas não seu módulo). Por ser sempre voltada para o centro da trajetória circular, essa força é denominada *força centrípeta.*

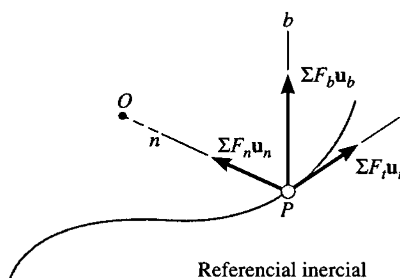



**Figura 13.11**

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Quando um problema envolve o movimento de um ponto material ao longo de uma *trajetória curva conhecida*, as coordenadas normal e tangencial podem ser consideradas na análise, pois os componentes da aceleração podem ser formulados. O método de aplicação das equações de movimento, que relacionam as forças com a aceleração, foi apresentado no procedimento sugerido na Seção 13.4. Para as coordenadas $t$, $n$, $b$, especificamente, podemos recomendar os seguintes passos:

***Diagrama de Corpo Livre***

- Estabeleça um sistema inercial com coordenadas $t$, $n$, $b$ sobre o ponto material e construa o diagrama de corpo livre para o ponto.
- A aceleração normal $\mathbf{a}_n$ do ponto material está sempre orientada no sentido do eixo $n$.
- Se a aceleração tangencial $\mathbf{a}_t$ é desconhecida, suponha que ela tem o sentido positivo de $t$.
- Identifique as incógnitas no problema.

***Equações de Movimento***

- Aplique as equações de movimento (equações 13.8).

***Cinemática***

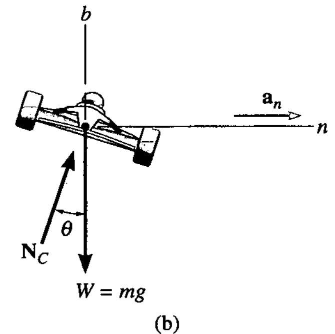
- Formule os componentes tangencial e normal da aceleração, isto é, $a_t = dv/dt$ ou $a_t = v\,dv/ds$ e $a_n = v^2/\rho$.
- Se a trajetória é definida como $y = f(x)$, o raio de curvatura no ponto da trajetória onde está o ponto material pode ser obtido por $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}/|d^2y/dx^2|$.

## EXEMPLO 13.6

Determine o ângulo de superelevação $\theta$ que uma pista de corrida deve ter para que as rodas dos carros mostrados na Figura 13.12*a* não tenham que depender do atrito para evitar que eles escorreguem para cima ou para baixo na pista. Suponha que os carros tenham massa $m$ e trafeguem com velocidade $v$ numa curva de raio $\rho$. Despreze as dimensões deles.




(a)




(b)

**Figura 13.12**

### SOLUÇÃO

Antes de acompanhar a solução abaixo, pense um pouco no motivo de se usarem coordenadas $t$, $n$, $b$.

***Diagrama de Corpo Livre.*** Como mostrado na Figura 13.12*b* e afirmado no enunciado, nenhuma força de atrito age no carro. A força $N_C$ representa a resultante das forças normais de contato agindo nas quatro rodas. Como $a_n$ pode ser calculada, as incógnitas são $N_C$ e $\theta$.

***Equações de Movimento.*** Usando os eixos $n$, $b$ mostrados na figura,

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_n = ma_n;$ $$N_C \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (1)$$

$+\uparrow \Sigma F_b = 0;$ $$N_C \cos\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

Dividindo a Equação 1 pela Equação 2 rearranjada, podemos eliminar $N_C$ e $m$, o que resulta em

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{g\rho}$$

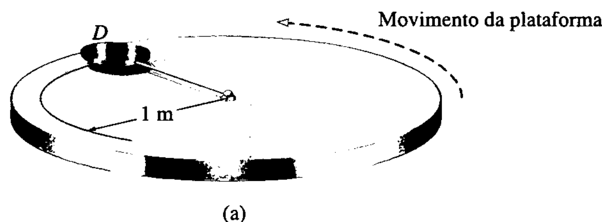
$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{v^2}{g\rho}\right)$$ ***Resposta***

Observemos que o resultado é independente da massa do carro, assim como a soma de forças na direção tangencial não é relevante para a solução. Se a soma fosse considerada, então $a_t = dv/dt = 0$, pois o carro se move com *velocidade escalar constante*. Uma análise adicional deste problema é apresentada no Problema 21.48.

## EXEMPLO 13.7

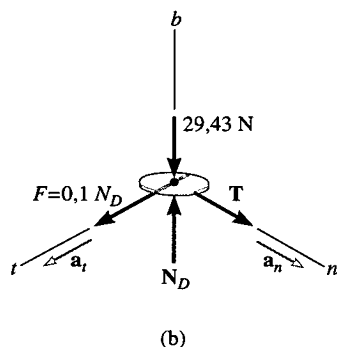
O disco $D$ de 3 kg está preso a um fio, como mostrado na Figura 13.13*a*. A outra extremidade do fio está presa a uma junta esférica localizada no cen-

tro da plataforma. Se o disco é colocado sobre a plataforma, que está girando rapidamente, determine o tempo necessário para ele atingir uma velocidade escalar suficientemente alta para a ruptura do fio. A tensão máxima suportada pelo fio é 100 N e o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a plataforma é $\mu_c = 0{,}1$.




(a)

## SOLUÇÃO




(b)

**Figura 13.13**

***Diagrama de Corpo Livre.*** A força de atrito tem intensidade $F = \mu_c N_D = 0{,}1\,N_D$ e sentido oposto ao do movimento do disco *em relação* à plataforma. É essa força que dá ao disco o componente tangencial da aceleração, causando nele um aumento de velocidade escalar e, conseqüentemente, aumentando a intensidade de $T$ até seu limite de 100 N. O peso do disco é $W = 3(9{,}81) = 29{,}43$ N. Como $a_n$ pode ser relacionada com $v$, as incógnitas são $N_D$, $a_t$ e $v$.

***Equações de Movimento.***

$$\Sigma F_n = ma_n; \qquad T = 3\left(\frac{v^2}{1}\right) \qquad (1)$$

$$\Sigma F_t = ma_t; \qquad 0{,}1N_D = 3a_t \qquad (2)$$

$$\Sigma F_b = 0; \qquad N_D - 29{,}43 = 0 \qquad (3)$$

Fazendo-se $T = 100$ N, a Equação 1 pode ser resolvida para se encontrar a velocidade crítica $v_{cr}$ do disco necessária para romper o fio.

Resolvendo todas as equações, temos

$$N_D = 29{,}43 \text{ N}$$
$$a_t = 0{,}981 \text{ m/s}^2$$
$$v_{cr} = 5{,}77 \text{ m/s}$$

***Cinemática.*** Como $a_t$ é constante, o tempo necessário para a ruptura do fio é

$$v_{cr} = v_0 + a_t t$$
$$5{,}77 = 0 + (0{,}981)t$$
$$t = 5{,}89 \text{ s}$$

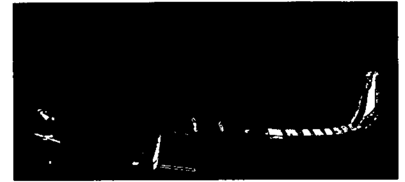
***Resposta***

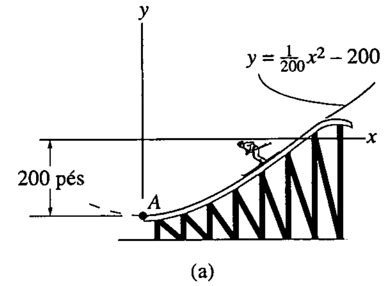
---

## EXEMPLO 13.8

Para construirmos a rampa de esqui mostrada na figura, precisamos conhecer o tipo de forças que serão aplicadas no esquiador, assim como a sua trajetória aproximada. Nesse caso, a rampa pode ser aproximada pela parábola mostrada na Figura 13.14*a*. Determine a força normal sobre o esquiador de

150 lb no instante em que ele chega à extremidade $A$, onde sua velocidade é de 65 pés/s. Qual é o valor de sua aceleração nesse ponto?





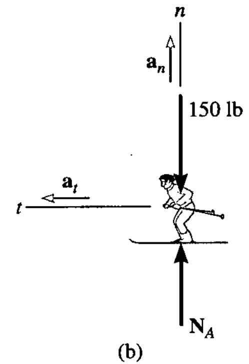




**Figura 13.14**

## SOLUÇÃO

Por que considerar o uso das coordenadas $n, t$ para resolver este problema?

***Diagrama de Corpo Livre.*** O diagrama de corpo livre para o esquiador quando ele está em $A$ é mostrado na Figura 13.14*b*. Como a trajetória é *curva*, há dois componentes da aceleração, $a_n$ e $a_t$. Uma vez que $a_n$ pode ser calculada, as incógnitas são $a_t$ e $N_A$.

***Equações de Movimento.***

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_A - 150 = \frac{150}{32{,}2}\left(\frac{(65)^2}{\rho}\right) \qquad (1)$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_t = ma_t; \qquad 0 = \frac{150}{32{,}2}a_t \qquad (2)$$

O raio de curvatura $\rho$ da trajetória deve ser determinado no ponto $A(0, -200 \text{ pés})$. De $y = \frac{1}{200}x^2 - 200$, $dy/dx = \frac{1}{100}x$, $d^2y/dx^2 = \frac{1}{100}$, onde se tem, para $x = 0$,

$$\rho = \left.\frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}\right|_{x=0} = \frac{[1 + (0)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{100}|} = 100 \text{ pés}$$

Substituindo o resultado na Equação 1 e resolvendo para $N_A$, temos

$$N_A = 347 \text{ lb} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

***Cinemática.*** Da Equação 2,

$$a_t = 0$$

Logo:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(65)^2}{100} = 42{,}2 \text{ pés/s}^2$$

$$a_A = a_n = 42{,}2 \text{ pés/s}^2 \uparrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Mostre que quando o esquiador está em pleno ar sua aceleração é de 32,2 pés/s$^2$.

---

## EXEMPLO 13.9

Vários pacotes, cada um com 2 kg, passam da esteira para a rampa circular lisa com velocidade $v_0 = 1$ m/s, como mostrado na Figura 13.15*a*. Se o raio efetivo da rampa é 0,5 m, determine o ângulo $\theta = \theta_{máx}$ para o qual cada pacote começa a deixar a superfície.

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** O diagrama de corpo livre para um pacote numa posição genérica $\theta$ está na Figura 13.15*b*. O pacote deve ter aceleração tangencial $\mathbf{a}_t$ não-nula, pois sua *velocidade* está sempre *aumentando*, à medida que ele

escorrega ao longo da rampa. O peso é $W = 2(9{,}81) = 19{,}62$ N. Especifique as três incógnitas.

***Equações de Movimento.***

$$+\swarrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad -N_B + 19{,}62\cos\theta = 2\frac{v^2}{0{,}5} \qquad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad 19{,}62 \operatorname{sen}\theta = 2a_t \qquad (2)$$

No instante $\theta = \theta_{\text{máx}}$, o pacote deixa a superfície da rampa, logo nesse ponto $N_B = 0$ (perda de contato). Portanto, há três incógnitas: $v$, $a_t$ e $\theta$.

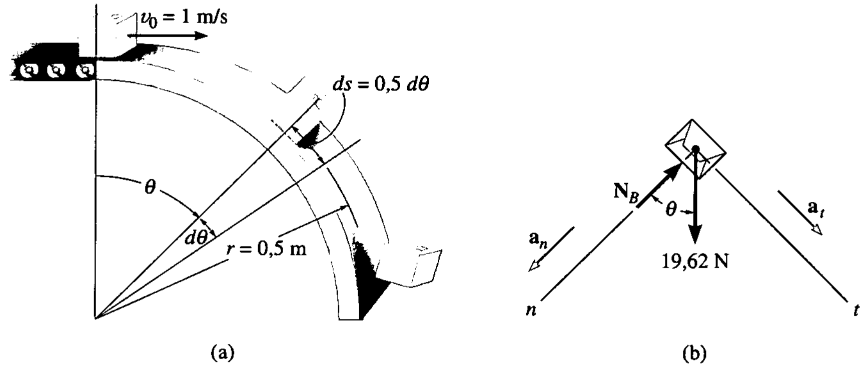



**Figura 13.15**

***Cinemática.*** A terceira equação para a solução do problema pode ser obtida ao observarmos que o módulo da aceleração tangencial $a_t$ pode ser relacionado com a velocidade $v$ do pacote e com o ângulo $\theta$. Como $a_t\,ds = v\,dv$ e $ds = r\,d\theta = 0{,}5\,d\theta$ (Figura 13.15*a*), temos

$$a_t = \frac{v\,dv}{0{,}5\,d\theta} \qquad (3)$$

Substituindo a Equação 3 na Equação 2 e separando as variáveis, temos

$$v\,dv = 4{,}905 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Integrando ambos os membros, lembrando que, quando $\theta = 0°$, $v_0 = 1$ m/s:

$$\int_1^v v\,dv = 4{,}905\int_{0°}^{\theta} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_1^v = -4{,}905\cos\theta\Big|_{0°}^{\theta}$$

$$v^2 = 9{,}81(1 - \cos\theta) + 1$$

Substituindo esse resultado para $v^2$ na Equação 1 com $N_B = 0$ e resolvendo para $\cos\theta_{\text{máx}}$, obtemos

$$19{,}62\cos\theta_{\text{máx}} = \frac{2}{0{,}5}[9{,}81(1 - \cos\theta_{\text{máx}}) + 1]$$

$$\cos\theta_{\text{máx}} = \frac{43{,}24}{58{,}86}$$

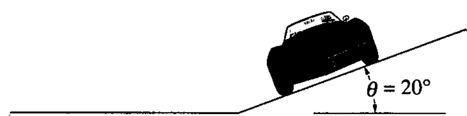
$$\theta_{\text{máx}} = 42{,}7° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

# PROBLEMAS

***13.52.** Determine a massa do Sol, sabendo-se que a distância entre a Terra e o Sol é de 149,6($10^6$) km. *Dica*: use a Equação 13.1 para representar a força gravitacional que age na Terra.

**13.53.** O carro esporte de 1.700 kg desloca-se horizontalmente ao longo de uma pista circular de raio de curvatura $\rho = 100$ m e ângulo de superelevação de 20°. Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é $\mu_e = 0{,}2$, determine a *máxima velocidade constante* para a qual o carro pode se deslocar sem escorregar para cima. Despreze as dimensões do carro.

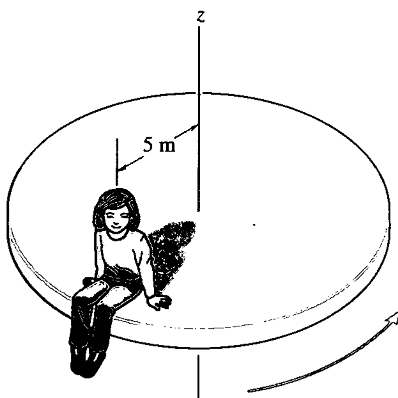
**13.54.** Usando os dados do Problema 13.53, determine a velocidade mínima com a qual o carro pode se deslocar sem escorregar para baixo.




**Problemas 13.53/54**

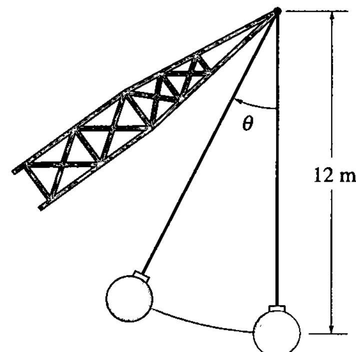
**13.55.** Uma menina de 15 kg está sentada em repouso relativamente à plataforma horizontal. O movimento de rotação da plataforma varia *lentamente*, de forma que o componente tangencial da aceleração da menina é desprezível. Determine a velocidade máxima que a criança pode ter antes de iniciar o seu escorregamento. A distância entre a menina e o eixo da plataforma é $r = 5$ m e o coeficiente de atrito estático entre a menina e a plataforma é $\mu = 0{,}2$.

***13.56.** Resolva o Problema 13.55 supondo que a plataforma inicialmente em repouso começa a girar de modo que a velocidade da menina aumenta uniformemente a uma taxa $\dot{v} = 0{,}5$ m/s².



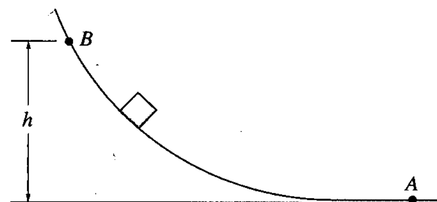

**Problemas 13.55/56**

**13.57.** A bola de demolição com 600 kg está presa a um guindaste por meio de um cabo de massa desprezível. A bola tem velocidade $v = 8$ m/s no instante em que ela passa pela sua posição mais baixa, $\theta = 0°$. Determine a tensão no cabo nesse instante, assim como o ângulo $\theta$ de afastamento máximo em relação à vertical.




**Problema 13.57**

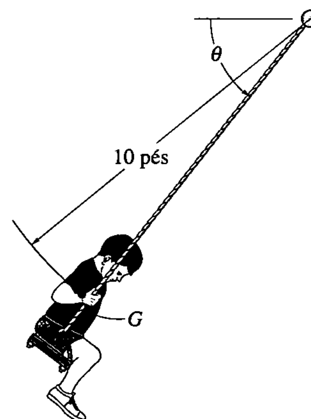
**13.58.** Prove que, se um bloco inicialmente em repouso é solto no ponto $B$ de uma trajetória lisa de *forma arbitrária*, a velocidade com que ele chega ao ponto $A$ é igual à velocidade com que ele cai livremente de uma altura $h$, isto é, $v = \sqrt{2gh}$.




**Problema 13.58**

**13.59.** No instante em que $\theta = 60°$, o centro de massa $G$ do menino tem velocidade para baixo $v_G = 15$ pés/s. Determine a taxa de aumento de sua velocidade e a tensão em cada uma das cordas de suporte do balanço nesse instante. O menino pesa 60 lb. Despreze o tamanho do menino e a massa das cordas e do assento.

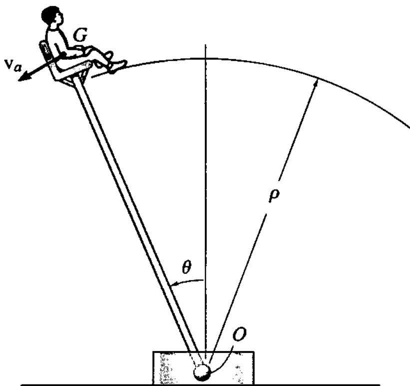
***13.60.** No instante em que $\theta = 60°$, o centro de massa $G$ do menino tem velocidade nula. Determine sua velocidade e a tensão em cada corda do balanço quando $\theta = 90°$. O menino pesa 60 lb. Despreze o tamanho do menino e a massa das cordas e do assento.




**Problemas 13.59/60**

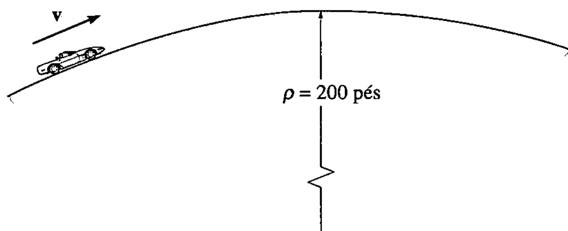
**13.61.** Um acrobata que pesa 150 lb está sentado na cadeira presa ao topo de uma haste, como mostrado na figura. Por meio de um sistema mecânico, a haste gira para baixo a uma taxa constante, a partir de $\theta = 0°$, de modo que o centro de massa $G$ do acrobata mantém-se a uma *velocidade escalar constante* $v_a = 10$ pés/s. Determine o ângulo $\theta$ para o qual ele começa a 'voar' da cadeira. Despreze o atrito e suponha que a distância do pivô $O$ a $G$ é $\rho = 15$ pés.

**13.62.** Resolva o Problema 13.61, considerando que para $\theta = 0°$ a velocidade do centro de massa do acrobata aumenta de $(v_a)_0 = 10$ pés/s a uma taxa $\dot{v}_a = 0{,}5$ pés/s$^2$.



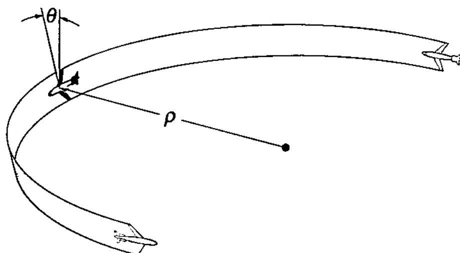

**Problemas 13.61/62**

**13.63.** Se o perfil da estrada tem raio de curvatura $\rho = 200$ pés, determine a velocidade constante máxima com a qual o carro pode trafegar sem perder o contato com a pista. Despreze o tamanho do carro. Considere que o carro pesa 3.500 lb.




**Problema 13.63**

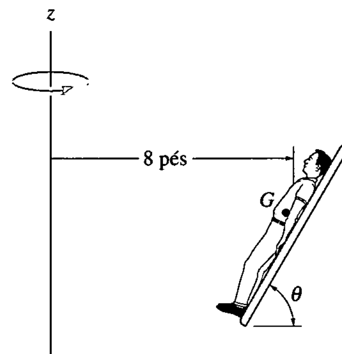
***13.64.** Um avião voando a uma velocidade constante de 50 m/s faz uma volta horizontal. O avião está inclinado a um ângulo $\theta = 15°$ e o piloto experimenta somente uma força normal sobre o assento. Determine o raio de curvatura $\rho$ do retorno. Qual é a intensidade da força normal do assento sobre o piloto se sua massa é de 70 kg?




**Problema 13.64**

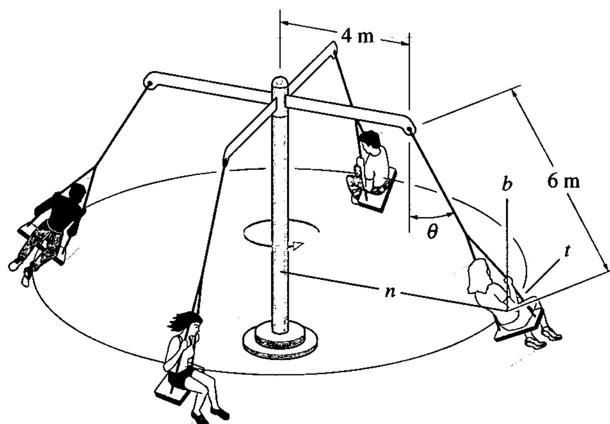
**13.65.** O homem de 150 lb está apoiado na prancha para a qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0{,}5$. Determine as forças normal resultante e de atrito que a prancha exerce sobre o homem se, em virtude da rotação em torno do eixo $z$, ele tem velocidade constante $v = 20$ pés/s. Despreze as dimensões do homem.

**13.66.** O homem de 150 lb está apoiado na prancha para a qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0{,}5$. Se ele gira em torno do eixo $z$ com velocidade constante $v = 30$ pés/s, determine o menor ângulo $\theta$ da prancha para o qual o homem começa a escorregar.




**Problemas 13.65/66**

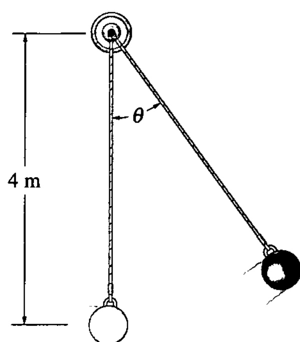
**13.67.** Determine a velocidade constante dos ocupantes do brinquedo de um parque de diversões, sabendo que os cabos de suspensão formam um ângulo $\theta = 30°$ com a vertical. Cada cadeira, incluindo seu ocupante, tem massa de 80 kg. Quais são os componentes da força nas direções $n$, $t$ e $b$ que a cadeira exerce num ocupante de 50 kg?




**Problema 13.67**

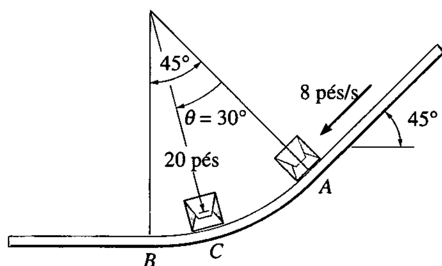
***13.68.** Uma bola tem massa de 30 kg e velocidade $v = 4$ m/s no instante em que está em sua posição mais baixa, $\theta = 0°$. Determine a tensão no cabo nesse instante, assim como o ângulo $\theta$ de afastamento máximo em relação à vertical. Despreze o tamanho da bola.

**13.69.** Uma bola tem massa de 30 kg e velocidade $v = 4$ m/s no instante em que está na sua posição mais baixa, $\theta = 0°$. Determine a tensão na corda e a taxa com que a velocidade da bola está decrescendo no instante em que $\theta = 20°$. Despreze o tamanho da bola.



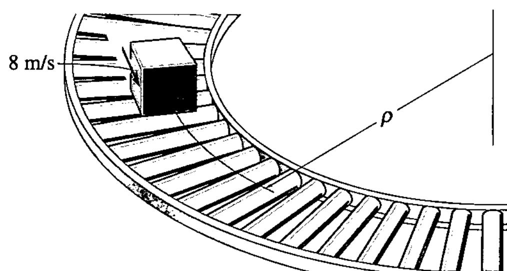

**Problemas 13.68/69**

**13.70.** O pacote pesa 5 lb e escorrega numa calha. Quando ele chega à porção curva $AB$, sua velocidade de descida é 8 pés/s ($\theta = 0°$). Se a calha é lisa, determine a velocidade do pacote quando ele chega ao ponto intermediário $C$ ($\theta = 30°$) e quando chega ao plano horizontal ($\theta = 45°$). Obtenha também a força normal sobre o pacote em $C$.



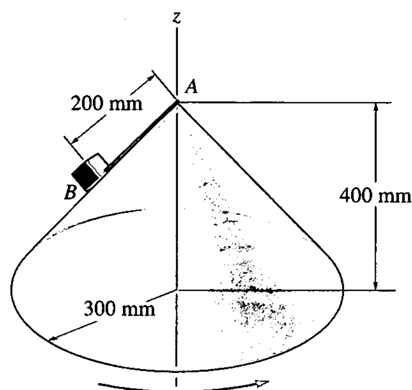

**Problema 13.70**

**13.71.** Caixas de 5 kg movem-se ao longo de uma linha de montagem a uma velocidade constante de 8 m/s. Determine o menor raio de curvatura, $\rho$, que a esteira transportadora deve ter para que as caixas não escorreguem. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre uma caixa e a esteira são $\mu_e = 0{,}7$ e $\mu_c = 0{,}5$, respectivamente.



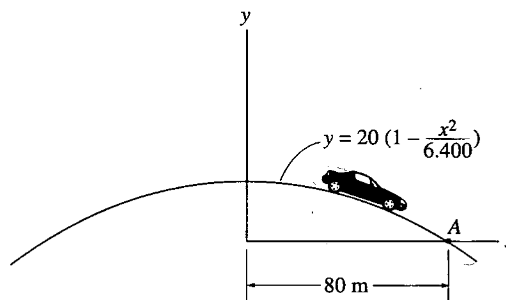

**Problema 13.71**

***13.72.** O bloco liso $B$ de 0,2 kg está preso por um fio leve ao vértice $A$ de um cone circular reto. O cone está girando em torno do eixo $z$ a uma taxa angular constante, de forma que o bloco atinge uma velocidade de 0,5 m/s. Determine a tensão no fio e a força de reação do cone sobre o bloco para essa velocidade. Despreze o tamanho do bloco.



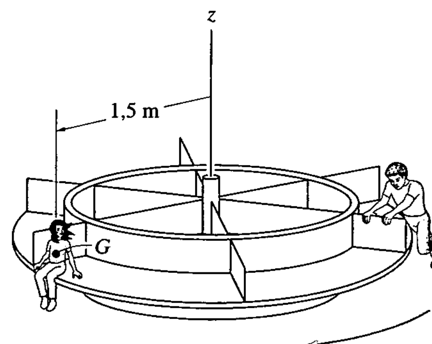

**Problema 13.72**

**13.73.** O carro de 800 kg trafega em um trecho de estrada que tem a forma de uma parábola. Se o motorista mantém uma velocidade constante de 9 m/s, determine a força normal resultante e a força de atrito resultante que todas as rodas do veículo exercem na pista quando o carro atinge o ponto $A$. Despreze as dimensões do carro.




**Problema 13.73**

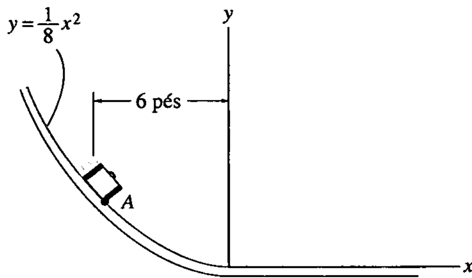
**13.74.** Uma menina de 25 kg está sentada na borda de um gira-gira, de modo que seu centro de massa $G$ está a 1,5 m do eixo de rotação. O movimento de rotação da plataforma aumenta *lentamente*, de modo que o componente tangencial da aceleração é desprezível. Determine a velocidade máxima que a menina pode ter sem que ela escorregue do brinquedo. O coeficiente de atrito estático entre a menina e o gira-gira é $\mu_e = 0{,}3$.




**Problema 13.74**

**13.75.** A mala de 10 lb escorrega numa rampa curva para a qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}2$. Se no instan-

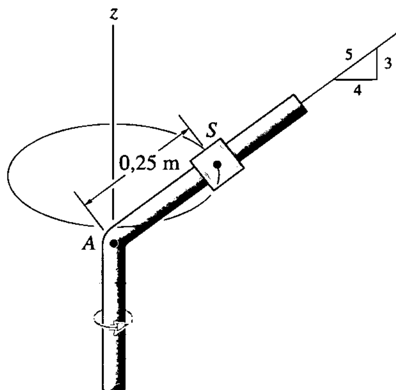
te em que ela chega ao ponto $A$ sua velocidade é de 5 pés/s, determine a força normal sobre a mala e a taxa de aumento de sua velocidade.




**Problema 13.75**

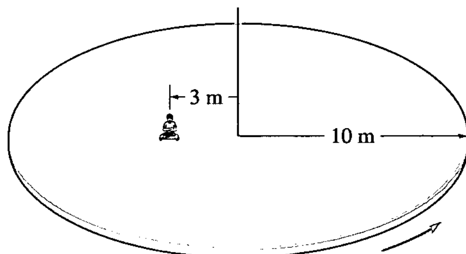
***13.76.** O cursor $S$ de 2 kg ajusta-se na haste inclinada para a qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0,2$. Se o cursor está a 0,25 m de $A$, determine a velocidade constante mínima que ele deve ter para que não escorregue para baixo.

**13.77.** O cursor $S$ de 2 kg ajusta-se na haste inclinada para a qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0,2$. Se o cursor está a 0,25 m de $A$, determine a velocidade constante máxima que ele deve ter para que não escorregue para cima.



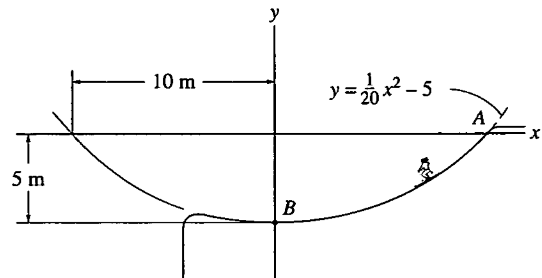

**Problemas 13.76/77**

**13.78.** Um homem de 80 kg está sentado a 3 m do eixo de rotação da plataforma girante. Devido à rotação, sua velocidade aumenta a partir do repouso a uma taxa $\dot{v} = 4$ m/s$^2$. Se o coeficiente de atrito estático entre sua roupa e a plataforma é $\mu_e = 0,3$, determine o tempo necessário para que ele comece a escorregar.



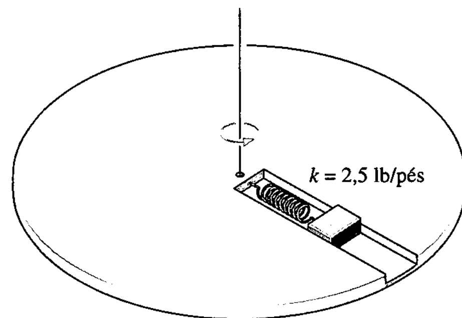

**Problema 13.78**

**13.79.** A esquiadora parte do repouso em $A(10\text{ m}, 0)$ e desce pelo declive liso, que pode ser aproximado por uma parábola. Se a esquiadora tem massa de 52 kg, determine a força normal que ela exerce no solo no instante em que chega ao ponto $B$. Despreze as dimensões dela. *Dica:* use o resultado do Problema 13.58.



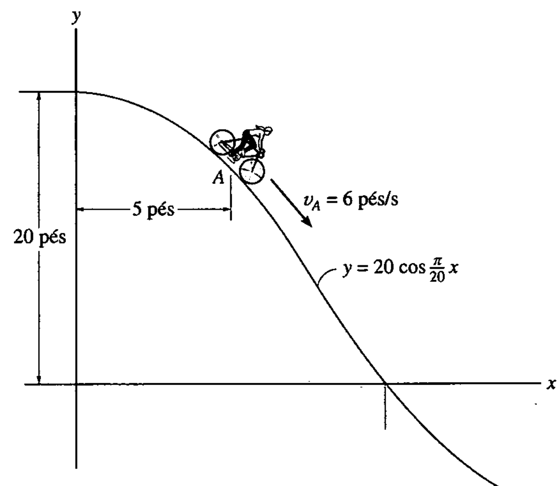

**Problema 13.79**

***13.80.** O bloco pesa 2 lb e pode se mover pela fenda do disco girante. A mola tem rigidez de 2,5 lb/pé e comprimento quando não deformada de 1,25 pé. Determine a força da mola sobre o bloco e o componente tangencial da força que a fenda exerce na lateral do bloco quando este está em repouso em relação ao disco e está se movendo a uma velocidade constante de 12 pés/s.



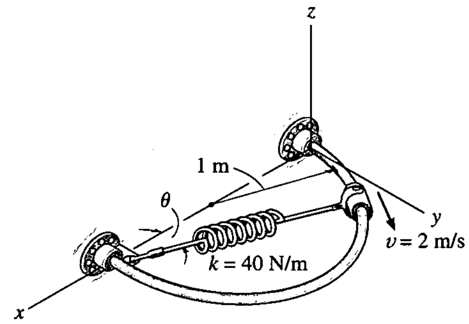

**Problema 13.80**

**13.81.** Se a bicicleta e a ciclista têm peso total de 180 lb, determine a força normal resultante agindo na bicicleta quando ela está no ponto $A$ e desce livremente com velocidade $v_A = 6$ pés/s. Calcule o aumento da velocidade da ciclista nesse ponto. Despreze a resistência do vento e as dimensões da ciclista e da bicicleta.




**Problema 13.81**

**13.82.** O colar tem massa de 5 kg e pode se mover numa haste circular lisa que está contida num plano horizontal. A mola tem comprimento quando não deformada de 200 mm. Se no instante em que $\theta = 30°$, o colar tem velocidade $v = 2$ m/s, determine o módulo da força normal da haste sobre o colar e a aceleração deste.




**Problema 13.82**

## 13.6 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO: COORDENADAS CILÍNDRICAS



*À medida que o carrinho de peso W desce pelo trilho helicoidal, a força normal resultante que o trilho exerce no carrinho pode ser representada por seus três componentes cilíndricos. $-\mathbf{N}_r$ cria uma aceleração radial, $-\mathbf{a}_r$, $\mathbf{N}_\theta$ cria uma aceleração transversal, $a_\omega$ e a diferença, $\mathbf{W} - \mathbf{N}_z$, cria uma aceleração azimutal, $-\mathbf{a}_z$.*

Quando todas as forças que agem num ponto material são expressas em componentes cilíndricos, isto é, ao longo dos vetores unitários $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_z$ (Figura 13.16), a equação de movimento pode ser escrita como

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_r\mathbf{u}_r + \Sigma F_\theta\mathbf{u}_\theta + \Sigma F_z\mathbf{u}_z = ma_r\mathbf{u}_r + ma_\theta\mathbf{u}_\theta + ma_z\mathbf{u}_z$$

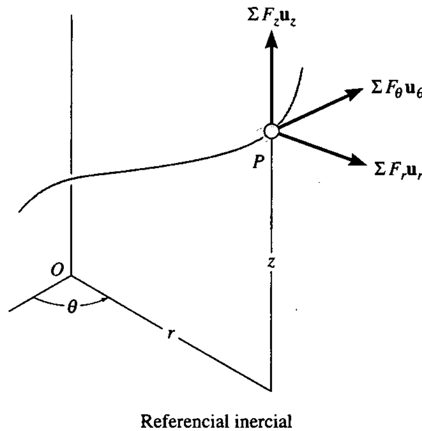



**Figura 13.16**

Para satisfazer essa equação, os componentes $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{u}_z$ no primeiro membro devem ser iguais aos componentes correspondentes no segundo membro. Conseqüentemente, podemos escrever as seguintes três equações escalares para o movimento:

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_r &= ma_r \\ \Sigma F_\theta &= ma_\theta \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned}} \qquad (13.9)$$

Se o movimento do ponto se restringe ao plano $r$–$\theta$, então apenas as duas primeiras equações 13.9 são usadas para tratar o problema.

***Forças Normal e Tangencial.*** O tipo mais comum de problema envolvendo coordenadas cilíndricas exige a determinação dos componentes da força resultante $\Sigma F_r$, $\Sigma F_\theta$ e $\Sigma F_z$ que imprimem ao ponto material uma aceleração *conhecida*. Se, todavia, o movimento acelerado do ponto não é completamente especificado num dado instante, então alguma informação referente a direções e módulo das forças agentes no ponto material deve ser conhecida ou calculada para resolver as equações 13.9. Por exemplo, a força **P** sobre o ponto material (Figura 13.17*a*) causa um movimento ao longo da trajetória $r = f(\theta)$. A *força normal* **N** que a trajetória exerce no ponto material é sempre *perpendicular à reta tangente à trajetória*, enquanto a força de atrito **F** sempre age na direção da tangente no sentido oposto ao do movimento. As *direções* de **N** e **F** podem ser especificadas relativamente à coordenada radial, usando-se para isso o ângulo $\psi$ (Figura 13.17*b*), que é definido entre a linha radial *estendida* e a tangente à curva.

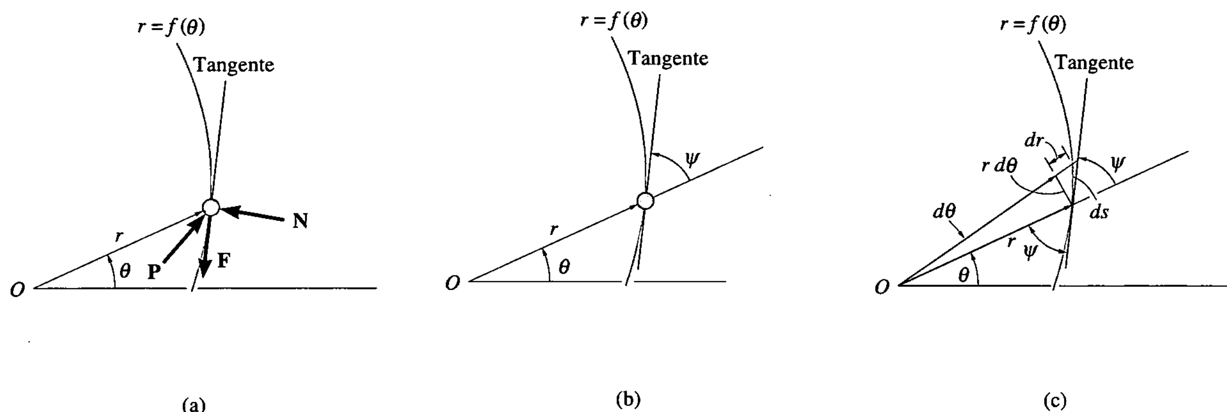



**Figura 13.17**

Esse ângulo pode ser obtido observando-se que, quando o ponto é deslocado de $ds$ ao longo da trajetória (Figura 13.17*c*), o componente do deslocamento na direção radial é $dr$ e o componente na direção transversal é $r\,d\theta$. Uma vez que esses dois componentes são mutuamente perpendiculares, o ângulo $\psi$ pode ser determinado por $\text{tg}\,\psi = r\,d\theta/dr$ ou

$$\text{tg}\,\psi = \frac{r}{dr/d\theta} \tag{13.10}$$

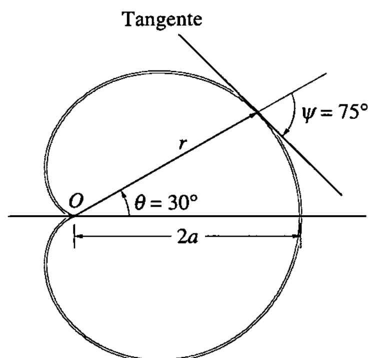



**Figura 13.18**

Sendo $\psi$ definido como uma quantidade positiva, ele é medido da *linha radial estendida* à tangente, no sentido anti-horário ou no sentido positivo de $\theta$. Se é negativo, ele é medido no sentido oposto a $\theta$ positivo. Por exemplo, consideremos a cardióide $r = a\,(1 + \cos\,\theta)$, como mostrado na Figura 13.18. Como $dr/d\theta = -a\,\text{sen}\,\theta$, então, quando $\theta = 30°$, $\text{tg}\,\psi = a(1 + \cos 30°)/(-a\,\text{sen}\,30°) = -3{,}732$, ou $\psi = -75°$, medido no sentido horário, como mostrado na figura.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Coordenadas cilíndricas ou polares são convenientes para a análise de um problema para o qual os dados referentes ao movimento angular da linha radial $r$ são conhecidos ou em casos para os quais a trajetória pode ser expressa convenientemente em termos dessas coordenadas. Estabelecidas essas coordenadas, as equações de movimento podem ser aplicadas para relacionar as forças agentes no ponto material com os seus componentes da aceleração. O método para se fazer isso foi descrito no procedimento para análise apresentado na Seção 13.4. A seguir, apresentamos um resumo desse procedimento.

*Diagrama de Corpo Livre*

- Estabeleça um sistema inercial em coordenadas $r$, $\theta$, $z$ e construa o diagrama de corpo livre do ponto.
- Suponha que $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$ e $\mathbf{a}_z$ têm os *sentidos positivos* de $r$, $\theta$ e $z$, se eles são desconhecidos.
- Identifique todas as incógnitas no problema.

*Equações de Movimento*

- Aplique as equações de movimento (equações 13.9).

*Cinemática*

- Use os métodos da Seção 12.8 para determinar $r$ e as derivadas temporais $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{z}$ e então calcule os componentes da aceleração $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, $a_z = \ddot{z}$.
- Se o resultado do cálculo de qualquer componente da aceleração é negativo, isso indica que esse componente tem o sentido negativo da coordenada.
- Quando se calculam as derivadas temporais de $r = f(\theta)$, é muito importante usar a regra da cadeia do cálculo diferencial.

## EXEMPLO 13.10

O bloco de 2 lb (Figura 13.19*a*) move-se num canalete horizontal liso especificado em coordenadas polares pelas equações paramétricas $r = (10t^2)$ pés e $\theta = (0{,}5t)$ rad, onde $t$ é dado em segundos. Determine a intensidade da força tangencial **F** aplicada no bloco no instante $t = 1$ s.

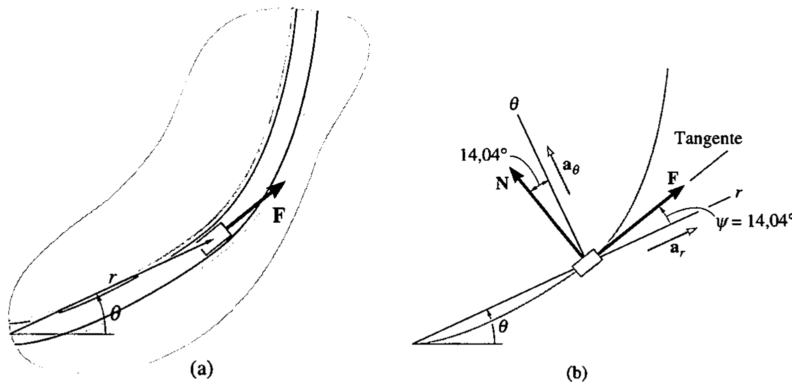



**Figura 13.19**

## SOLUÇÃO

*Diagrama de Corpo Livre.* Como mostrado no diagrama de corpo livre para o bloco (Figura 13.19*b*), a força normal **N** do canalete sobre o bloco e a força tangencial **F** formam um ângulo $\psi$ em relação aos eixos $r$ e $\theta$, respectivamente. Esse ângulo pode ser obtido com o auxílio da Equação 13.10. Para obtermos $\psi$, primeiro expressamos a trajetória na forma $r = f(\theta)$ por meio da eliminação do tempo nas equações para $r$ e $\theta$. Isso nos fornece $r = 40\theta^2$. Por outro lado, quando $t = 0$, $\theta = 0{,}5(1 \text{ s}) = 0{,}5$ rad. Assim:

$$\text{tg}\,\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \left.\frac{40\theta^2}{40(2\theta)}\right|_{\theta=0,5\text{ rad}} = 0,25$$

$$\psi = 14,04°$$

O ângulo $\psi$ é uma quantidade positiva medida no sentido anti-horário, do eixo $r$ à tangente (a mesma direção do eixo $\theta$), como mostrado na Figura 13.19*b*. Há quatro incógnitas: $F$, $N$, $a_r$ e $a_\theta$.

***Equações de Movimento.***

$+\downarrow \Sigma F_r = ma_r;\qquad F\cos 14,04° - N\,\text{sen}\,14,04° = \frac{2}{32,2}a_r \qquad (1)$

$\uparrow + \Sigma F_\theta = ma_\theta;\qquad F\,\text{sen}\,14,04° + N\cos 14,04° = \frac{2}{32,2}a_\theta \qquad (2)$

***Cinemática.*** Como o movimento é especificado, as coordenadas e as derivadas temporais necessárias podem ser calculadas no instante $t = 1$ s.

$$r = 10t^2\Big|_{t=1\text{ s}} = 10\text{ pés} \qquad \theta = 0,5t\Big|_{t=1\text{ s}} = 0,5\text{ rad}$$

$$\dot{r} = 20t\Big|_{t=1\text{ s}} = 20\text{ pés/s} \qquad \dot{\theta} = 0,5\text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 20\text{ pés/s}^2 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 20 - 10(0,5)^2 = 17,5\text{ pés/s}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 10(0) + 2(20)(0,5) = 20\text{ pés/s}^2$$

Substituindo esses resultados nas equações 1 e 2, temos

$$F = 1,36\text{ lb}$$ ***Resposta***

$$N = 0,942\text{ lb}$$

## EXEMPLO 13.11

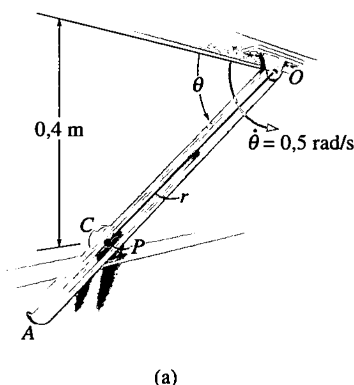



**Figura 13.20**

O cilindro liso $C$ de 2 kg mostrado na Figura 13.20*a* tem um pino passando pelo seu centro e pela fenda na barra $OA$. Se a barra gira no *plano vertical* a uma taxa constante $\dot{\theta} = 0,5$ rad/s, determine a força que ela exerce no pino no instante em que $\theta = 60°$.

## SOLUÇÃO

Por que é uma boa idéia usar coordenadas polares para resolver este problema?

***Diagrama de Corpo Livre.*** O diagrama de corpo livre para o cilindro pode ser visto na Figura 13.20*b*. A força $\mathbf{F}_P$ sobre o pino age perpendicularmente à fenda na barra. Habitualmente, convencionamos que $\mathbf{a}_r$ e $\mathbf{a}_\theta$ têm os sentidos *positivos* de $r$ e $\theta$, respectivamente. Identifique as quatro incógnitas.

***Equações de Movimento.*** Usando os dados da Figura 13.20*b*, temos

$+\searrow \Sigma F_r = ma_r;\qquad 19,62\,\text{sen}\,\theta - N_C\,\text{sen}\,\theta = 2a_r \qquad (1)$

$+\swarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta;$ $\quad 19{,}62 \cos\theta + F_P - N_C \cos\theta = 2a_\theta \qquad (2)$

***Cinemática.*** Da Figura 13.20*a*, $r$ pode ser relacionado com $\theta$ pela equação

$$r = \frac{0{,}4}{\text{sen}\,\theta} = 0{,}4 \text{ cossec}\,\theta$$

*Como* $d(\text{cossec}\,\theta) = -(\text{cossec}\,\theta \text{ cotg}\,\theta)\,d\theta$ e $d(\text{cotg}\,\theta) = -(\text{cossec}^2\,\theta)\,d\theta$, então $r$ e as derivadas temporais necessárias tornam-se

$$\dot\theta = 0{,}5 \qquad r = 0{,}4 \text{ cossec}\,\theta$$

$$\ddot\theta = 0 \qquad \dot r = -0{,}4(\text{cossec}\,\theta \text{ cotg}\,\theta)\dot\theta$$

$$= -0{,}2 \text{ cossec}\,\theta \text{ cotg}\,\theta$$

$$\ddot r = -0{,}2(-\text{cossec}\,\theta \text{ cotg}\,\theta)(\dot\theta) \text{ cotg}\,\theta - 0{,}2 \text{ cossec}\,\theta(-\text{cossec}^2\,\theta)\dot\theta$$

$$= 0{,}1 \text{ cossec}\,\theta(\text{cotg}^2\,\theta + \text{cossec}^2\,\theta)$$

Calculando essas fórmulas para $\theta = 60°$, obtemos

$$\dot\theta = 0{,}5 \qquad r = 0{,}462$$

$$\ddot\theta = 0 \qquad \dot r = -0{,}133$$

$$\ddot r = 0{,}192$$

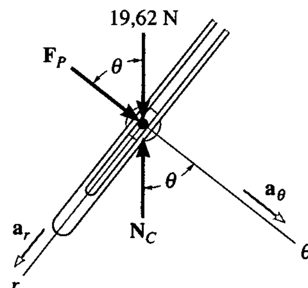
$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = 0{,}192 - 0{,}462(0{,}5)^2 = 0{,}0770$$

$$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = 0 + 2(-0{,}133)(0{,}5) = -0{,}133$$

Substituindo esses resultados nas equações 1 e 2 com $\theta = 60°$ e resolvendo as equações, temos

$$N_C = 19{,}4 \text{ N} \qquad F_P = -0{,}356 \text{ N}$$ ***Resposta***

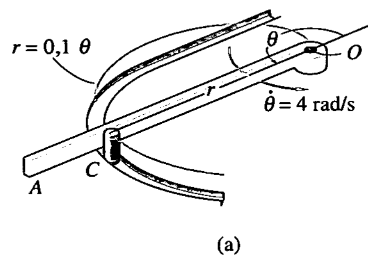
O sinal negativo indica que $\mathbf{F}_P$ age no sentido oposto àquele mostrado na Figura 13.20*b*.




(b)

**Figura 13.20**

## EXEMPLO 13.12




(a)

Um pino $C$ de 0,5 kg move-se ao longo da fenda horizontal mostrada na Figura 13.21*a*. A fenda tem a forma de uma espiral definida por $r = (0{,}1\theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Se o braço $OA$ gira a uma taxa constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s no plano horizontal, determine a força que ele exerce no pino no instante em que $\theta = \pi$ rad. Despreze o atrito e o tamanho do pino.

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** A força motriz $\mathbf{F}_C$ age perpendicularmente ao braço $OA$, enquanto a força normal da parede da fenda sobre o pino, $\mathbf{N}_C$, age perpendicularmente à tangente à curva em $\theta = \pi$ rad (Figura 13.21*b*). Habitualmente, supõe-se que $\mathbf{a}_r$ e $\mathbf{a}_\theta$ orientam-se nos sentidos positivos de $r$ e $\theta$, respectivamente. Uma vez que se conhece a trajetória, o ângulo $\psi$ que a linha radial $r$ estendida faz com a tangente (Figura 13.21*c*) pode ser determinado pela Equação 13.10. Temos $r = 0{,}1\theta$, onde $dr/d\theta = 0{,}1$ e, portanto,

$$\text{tg}\,\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{0{,}1\theta}{0{,}1} = \theta$$

Quando $\theta = \pi$, $\psi = \text{tg}^{-1}\,\pi = 72{,}3°$, de modo que $\phi = 90° - \psi = 17{,}7°$, como mostrado na Figura 13.21*c*. Identifique as quatro incógnitas na Figura 13.21*b*.

(b)

***Equações de Movimento.*** Usando $\phi = 17{,}7°$ e os dados mostrados na Figura 13.21*b*, temos

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_r = ma_r; \qquad N_C \cos 17{,}7° = 0{,}5a_r \qquad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F_C - N_C \,\text{sen}\, 17{,}7° = 0{,}5a_\theta \qquad (2)$$

***Cinemática.*** As derivadas temporais de $r$ e $\theta$ são

$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} \qquad r = 0{,}1\theta$$

$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = 0{,}1\dot{\theta} = 0{,}1(4) = 0{,}4 \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = 0{,}1\ddot{\theta} = 0$$

No instante em que $\theta = \pi$ rad,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 0{,}1(\pi)(4)^2 = -5{,}03 \text{ m/s}^2$$

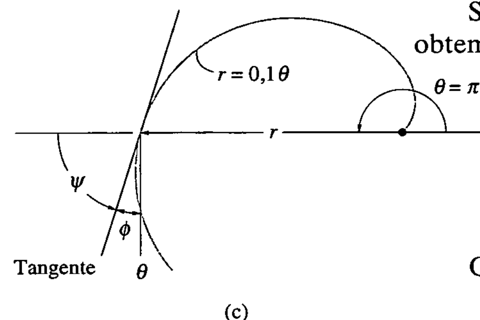
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(0{,}4)(4) = 3{,}20 \text{ m/s}^2$$

Substituindo esses resultados nas equações 1 e 2 e resolvendo as equações, obtemos

$$N_C = -2{,}64 \text{ N}$$

$$F_C = 0{,}800 \text{ N}$$ ***Resposta***

O que o sinal negativo de $N_C$ está indicando?




(c)

**Figura 13.21**

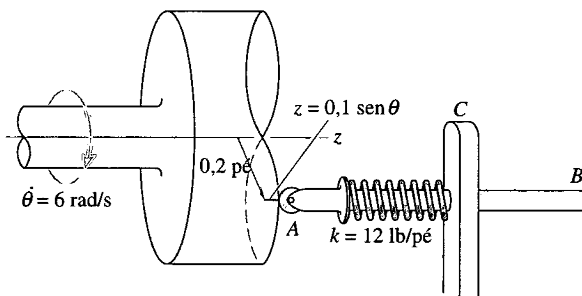
## PROBLEMAS

**13.83.** Um ponto material de 1,5 kg move-se ao longo da trajetória definida pelas equações $r = (4 + 3t)$ m, $\theta = (t^2 + 2)$ rad e $z = (6 - t^3)$ m, onde $t$ é dado em segundos. Determine os componentes $r$, $\theta$ e $z$ da força que a trajetória exerce no ponto quando $t = 2$s.

***13.84.** A trajetória de um ponto material de 5 lb em movimento num plano horizontal é descrita em termos de coordenadas polares como $r = (2t + 1)$ pés e $\theta = (0{,}5t^2 - t)$ rad, onde $t$ é dado em segundos. Determine o módulo da força resultante que age no ponto quando $t = 2$ s.

**13.85.** O seguidor $AB$ pesa 0,75 lb e tem movimento de vai-e-vem conforme sua extremidade rola na superfície da came, seguindo uma trajetória de equações $r = 0{,}2$ pé e $z = (0{,}1 \text{ sen } \theta)$ pés. Se a came gira a uma taxa de 6 rad/s, determine a força na extremidade $A$ do seguidor quando $\theta = 90°$. Nessa posição a mola no seguidor está comprimida 0,4 pé. Despreze o atrito no suporte $C$.

**13.86.** O seguidor $AB$ pesa 0,75 lb e tem movimento de vai-e-vem conforme sua extremidade rola na superfície da came, seguindo uma trajetória de equações $r = 0{,}2$ pé e $z = (0{,}1 \text{ sen } 2\theta)$ pés. Se a came gira a uma taxa de 6 rad/s, determine as forças máxima e mínima que o seguidor exerce na came se a mola se comprime 0,2 pé quando $\theta = 45°$.

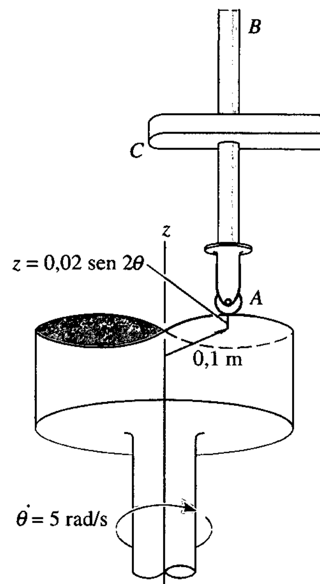



Problemas 13.85/86

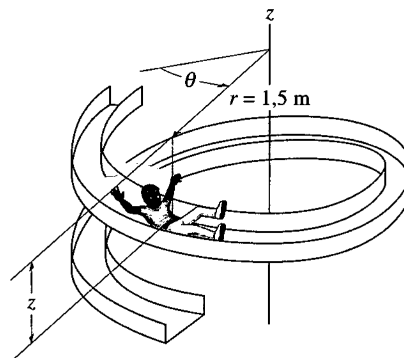
**13.87.** A barra $AB$ de 2 kg move-se para cima e para baixo conforme sua extremidade desliza na superfície da came, seguindo uma trajetória de equações $r = 0{,}1$ m e $z = (0{,}02 \text{ sen } 2\theta)$ m. Se a came gira a uma taxa constante de 5 rad/s, determine as forças máxima e mínima que ela exerce na barra.

***13.88.** O menino de 40 kg desliza para baixo num escorregador helicoidal a uma velocidade escalar constante, de modo que sua posição medida do topo da calha tem componentes $r = 1{,}5$ m, $\theta = (0{,}7t)$ rad e $z = (-0{,}5t)$ m, onde $t$ é dado em segundos. Determine os componentes $\mathbf{F}_r$, $\mathbf{F}_\theta$, $\mathbf{F}_z$ da força que o escorregador exerce no menino no instante $t = 2$ s. Despreze as dimensões do menino.

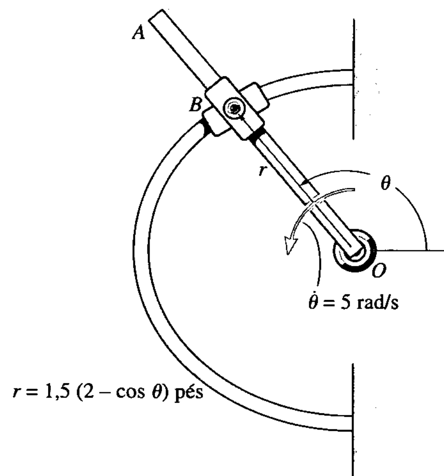
**13.89.** A barra $OA$ gira a uma velocidade constante $\dot{\theta} = 5$ rad/s. O colar duplo $B$ é formado por outros dois ligados por um pino, de modo que um desliza ao longo da barra girante e o outro, ao longo de uma barra *horizontal* curva cuja forma é descrita pela equação $r = 1{,}5(2 - \cos \theta)$ pés. Se ambos os colares pesam 0,75 lb, determine a força normal que a barra curva exerce sobre um colar no instante em que $\theta = 120°$. Despreze os atritos.




Problema 13.87

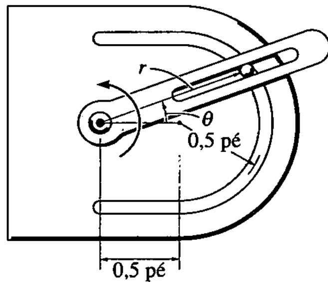



Problema 13.88




Problema 13.89

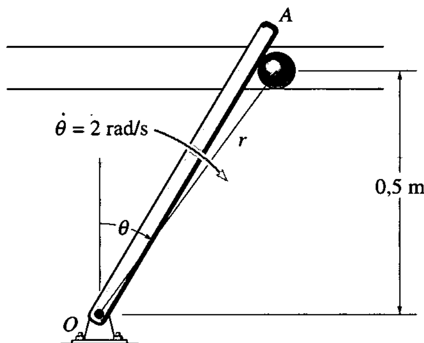
**13.90.** O pino de 5 lb é guiado ao longo de uma trajetória circular usando-se uma barra com uma fenda. A barra tem velocidade angular $\dot{\theta} = 4$ rad/s e aceleração angular $\ddot{\theta} = 8$ rad/s$^2$ no instante em que $\theta = 30°$. Determine a força da barra sobre o pino. O movimento se dá num *plano horizontal.*




**Problema 13.90**

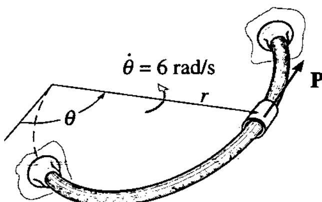
**13.91.** A pequena esfera tem massa de 0,5 kg e é forçada a se deslocar numa fenda horizontal lisa em virtude da rotação do braço $OA$. Determine a força do braço e a força normal da fenda que agem na esfera quando $\theta = 30°$. A barra gira com velocidade angular constante de 2 rad/s. Suponha que a esfera tenha contato com apenas um dos lados da fenda.

***13.92.** Resolva o Problema 12.91 considerando que o braço tem uma aceleração angular de 3 rad/s$^2$ e uma velocidade angular de 2 rad/s.




**Problemas 13.91/92**

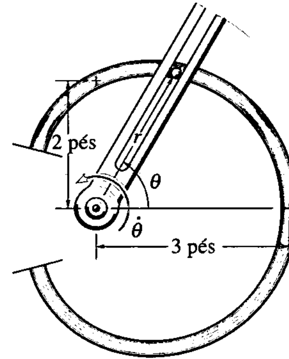
**13.93.** O cursor de 2 kg desliza ao longo da barra em espiral *horizontal* de equação $r = (0,40\ \theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Se a taxa de rotação é constante e igual a $\dot{\theta} = 6$ rad/s, determine a força tangencial horizontal **P** necessária para produzir o movimento. Determine também o componente horizontal da força normal que o cursor exerce na barra no instante em que $\theta = 45°$.




**Problema 13.93**

**13.94.** A barra bifurcada serve para mover uma pequena esfera lisa de 2 lb ao longo da trajetória horizontal com a forma de *limaçon*, $r = (2 + \cos\theta)$ pés. Se $\dot{\theta} = 0,5$ rad/s para todo instante $t$, determine a força que a barra exerce na esfera no instante em que $\theta = 90°$. A barra e a trajetória têm contato com a esfera em apenas um lado.

**13.95.** Resolva o Problema 13.95 para o instante em que $\theta = 60°$.

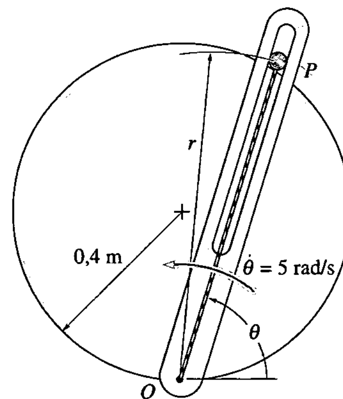



**Problemas 13.94/95**

***13.96.** A barra bifurcada serve para mover uma pequena esfera lisa de 2 lb ao longo da trajetória horizontal com a forma de *limaçon*, $r = (2 + \cos\theta)$ pés. Se $\theta = (0,5t^2)$ rad, onde $t$ é dado em segundos, determine a força que a barra exerce na esfera no instante $t = 1$ s. A barra e a trajetória têm contato com a esfera em apenas um lado.

**13.97.** A pequena esfera de 80 g está presa a um elástico que se estende de $O$ a $P$ e devido à fenda na barra move-se ao longo da trajetória circular *horizontal* $r = (0,8 \text{ sen } \theta)$ m. Se o elástico tem rigidez $k = 30$ N/m e comprimento quando não deformado de 0,25 m, determine a força da barra sobre a esfera quando $\theta = 60°$. A barra tem velocidade angular constante $\dot{\theta} = 5$ rad/s.

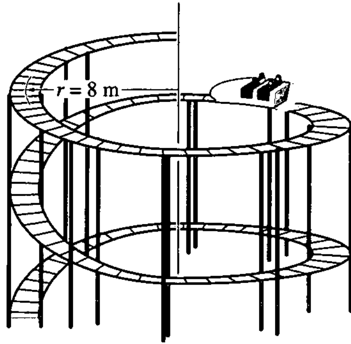
**13.98.** Resolva o Problema 13.97 supondo que $\ddot{\theta} = 2$ rad/s$^2$ quando $\dot{\theta} = 5$ rad/s e $\theta = 60°$.




**Problemas 13.97/98**

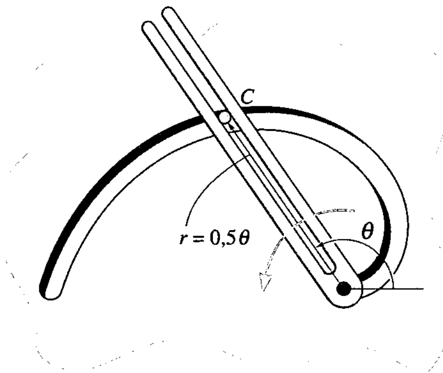
**13.99.** Por um breve intervalo de tempo, o carrinho de 250 kg desloca-se ao longo dos trilhos helicoidais de modo que sua posição medida a partir do topo da trajetória tem coordenadas $r = 8$ m, $\theta = (0,1t + 0,5)$ rad e $z = (-0,2t)$ m, onde

$t$ é dado em segundos. Determine os módulos dos componentes da força total que os trilhos exercem no carrinho nas direções $r$, $\theta$ e $z$, no instante $t = 2$ s. Despreze o tamanho do carrinho.




**Problema 13.99**

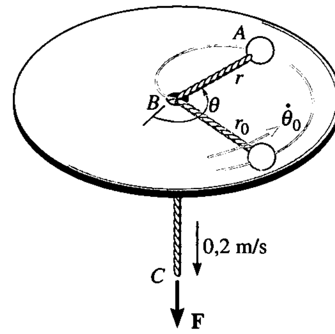
***13.100.** Usando-se uma barra bifurcada, um cilindro $C$ de 0,5 kg tem de se mover numa *fenda vertical* que determina uma trajetória $r = (0{,}5\theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Se a posição angular da barra é $\theta = (0{,}5t^2)$ rad, onde $t$ é dado em segundos, determine a força da barra e a força normal da fenda sobre o cilindro quando $t = 2$ s. Em qualquer instante, o cilindro está em contato com apenas *um lado* da barra e da fenda.



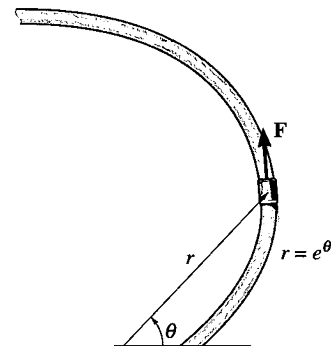

**Problema 13.100**

**13.101.** A bola tem massa de 2 kg e tamanho desprezível. Inicialmente, ela está descrevendo uma trajetória circular horizontal de raio $r_0 = 0{,}5$ m, com velocidade angular $\dot{\theta}_0 = 1$ rad/s. Se a corda $ABC$ é puxada para baixo a uma taxa constante de 0,2 m/s, determine a tensão na corda no instante em que $r = 0{,}25$ m. Calcule também a velocidade angular da bola nesse instante. Despreze os efeitos do atrito entre a bola e o plano horizontal. *Dica:* primeiro, mostre que a equação de movimento na direção $\theta$ fornece $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1/r)(d(r^2\dot{\theta})/dt) = 0$. Quando integrado, $r^2\dot{\theta} = c$, onde a constante $c$ pode ser determinada com os dados do problema.

**13.102.** O cursor tem massa de 2 kg e se move ao longo da barra lisa horizontal definida pela espiral eqüiangular $r = (e^\theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Determine a força tangencial $F$ e a força normal $N$ agindo no cursor quando $\theta = 45°$, supondo que a força $F$ mantém uma velocidade angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s.

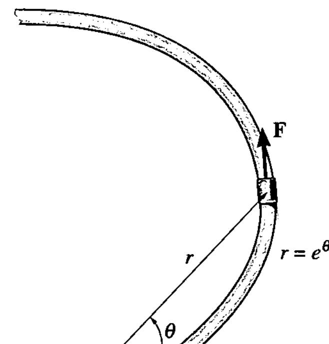



**Problema 13.101**




**Problema 13.102**

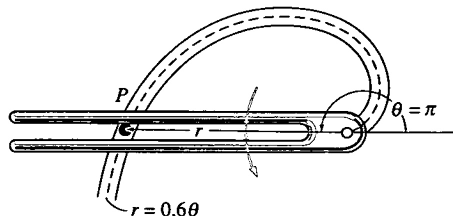
**13.103.** O cursor tem massa de 2 kg e se move ao longo da barra lisa horizontal definida pela espiral eqüiangular $r = (e^\theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Determine a força tangencial $F$ e a força normal $N$ agindo no cursor quando $\theta = 90°$, supondo que a força $F$ mantém uma velocidade angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s.




**Problema 13.103**

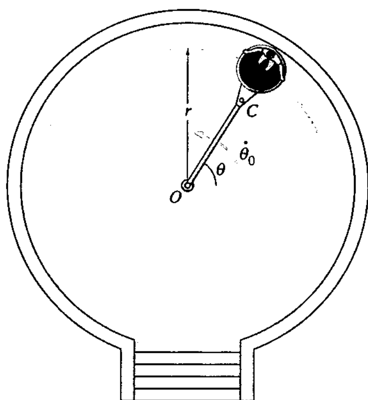
***13.104.** Usando-se uma barra bifurcada, um cilindro liso $P$ de 0,4 kg é mantido em movimento ao longo da trajetória vertical $r = -(0{,}6\theta)$ m, onde $\theta$ é dado em radianos. Se o cilindro tem velocidade constante $v_C = 2$ m/s, determine a força da barra e a força normal da fenda sobre o cilindro no instante em que $\theta = \pi$ rad. Suponha que o cilindro está em contato com *apenas um lado* da barra e da fenda. *Dica:* para obter as derivadas temporais necessárias para o cálculo dos componentes da aceleração do cilindro $a_r$ e $a_\theta$, tome a primeira e a segunda derivadas temporais de $r = -(0{,}6\theta)$. Então, para mais informação, use a Equação 12.26 para determinar $\dot{\theta}$. Para determinar a segunda derivada temporal de $\ddot{\theta}$, tome também

a derivada temporal da Equação 12.26, considerando que $\dot{v}_C = 0$.




**Problema 13.104**

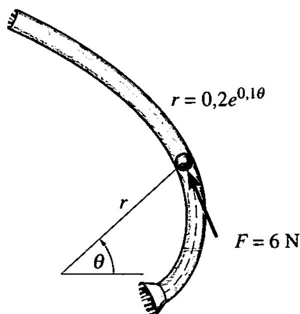
**13.105.** A gôndola do brinquedo de um parque de diversões é sustentada por pequenas rodas. Inicialmente, a gôndola move-se numa trajetória circular de raio $r_0 = 16$ pés, com velocidade angular $\dot{\theta}_0 = 0{,}2$ rad/s. Se o cabo $OC$ é retraído a uma velocidade constante $\dot{r} = -0{,}5$ pé/s, determine a tensão nele desenvolvida no instante em que $r = 4$ pés. A gôndola e a pessoa têm peso total de 400 lb. Despreze os efeitos do atrito. *Dica:* mostre primeiro que a equação de movimento na direção $\theta$ fornece $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1/r)\ d(r^2\dot{\theta})/dt = 0$; após integração, $r^2\dot{\theta} = c$, onde a constante $c$ é determinada com os dados do problema.




**Problema 13.105**

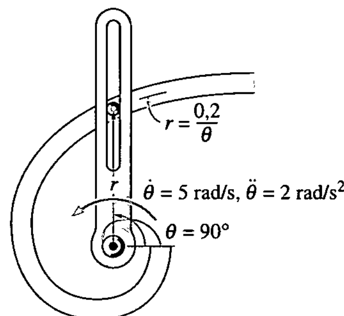
**13.106.** Usando-se ar comprimido, a bola de 0,5 kg tem de se mover pelo tubo mantido num *plano horizontal.* O tubo tem a forma de uma espiral logarítmica. Se a força tangencial exercida sobre a bola pelo ar comprimido é de 6 N, determine a taxa de aumento da velocidade da bola no instante em que $\theta = \pi/2$. Qual é sua direção?

**13.107.** Resolva o Problema 13.106, considerando que o tubo está num *plano vertical.*



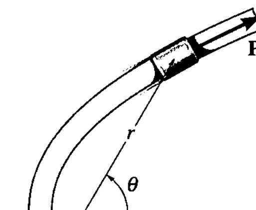

**Problemas 13.106/107**

***13.108.** O braço está girando a uma taxa $\dot{\theta} = 2$ rad/s quando $\theta = 90°$. Determine a força normal que ele deve exercer na bolinha de 0,5 kg que tem de se mover na fenda definida pela espiral hiperbólica *horizontal* $r\theta = 0{,}2$ m.



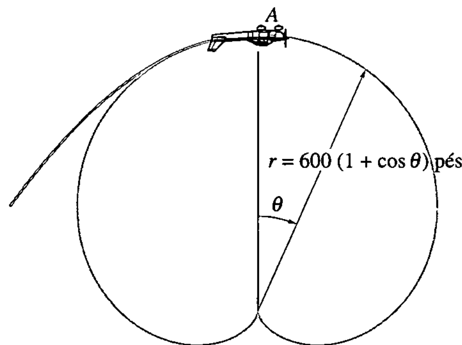

**Problema 13.108**

**13.109.** O colar de 3 lb desliza ao longo da barra lisa que está contida num plano horizontal e tem a forma de uma parábola $r = 4/(1 - \cos\theta)$, onde $\theta$ é expresso em radianos e $r$, em pés. Se a velocidade angular do colar é constante e igual a $\dot{\theta} = 4$ rad/s, determine a força tangencial retardadora $P$ necessária para produzir o movimento e a força normal que o colar exerce na barra no instante em que $\theta = 90°$.




**Problema 13.109**

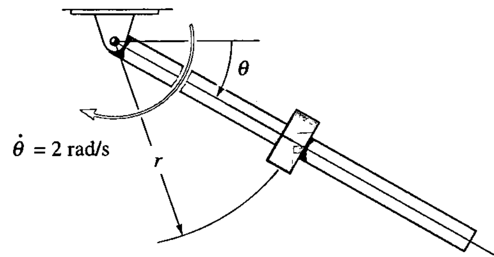
**13.110.** O piloto de um avião executa um *loop* vertical que em parte segue a curva de uma cardióide, $r = 600(1 + \cos\theta)$ pés, onde $\theta$ é dado em radianos. Se a sua velocidade em $A$ ($\theta = 0°$) é uma constante $v_P = 80$ pés/s, determine a força vertical que o cinto de segurança exerce sobre o piloto quando o avião está na posição $A$. O piloto pesa 150 lb. Veja a dica dada no Problema 13.104.




**Problema 13.110**

**13.111.** Um cursor desliza para baixo ao longo da barra que tem velocidade angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s no plano vertical. Mostre que as equações de movimento para o cursor são $\ddot{r} - 4r - 9{,}81\ \text{sen}\,\theta = 0$ e $0{,}8\dot{r} + N_s - 1{,}962\cos\theta = 0$, onde

$N_s$ é a intensidade da força normal da barra sobre o cursor. Usando-se os métodos de equações diferenciais, pode-se mostrar que a solução da primeira dessas equações é $r = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} - (9{,}81/8)$ sen $2t$. Se r, $\dot{r}$ e $\theta$ são nulos quando $t = 0$, calcule as constantes $C_1$ e $C_2$, assim como $r$ no instante em que $\theta = \pi/4$ rad.




Problema 13.111

# *13.7 MOVIMENTO SOB FORÇA CENTRAL E MECÂNICA ESPACIAL

Se um ponto material se move apenas sob a ação de uma força sempre orientada para um ponto fixo, o seu movimento é denominado *movimento sob força central*. Esse tipo de movimento é comumente causado por forças elétricas e gravitacionais.

Para determinarmos o movimento, consideraremos o ponto material $P$ mostrado na Figura 13.22*a*, que tem massa $m$ e está submetido somente à força central **F**. A Figura 13.22*b* mostra o diagrama de corpo livre para o ponto material. Usando-se coordenadas polares $(r, \theta)$, as equações de movimento (equações 13.9) tornam-se

$$-F = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$0 = m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad (13.11)$$

A segunda equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

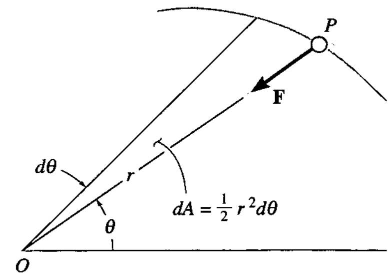
de modo que após integração se obtém

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \qquad (13.12)$$

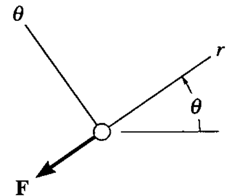
onde $h$ é uma constante de integração. Da Figura 13.22*a* observamos que a área sombreada descrita pelo raio $r$, conforme $r$ se move através de um ângulo $d\theta$, é $dA = \frac{1}{2}r^2d\theta$. Definindo-se a *velocidade areolar* como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2} \qquad (13.13)$$

vemos que essa quantidade é *constante* ou *se conserva* para um ponto material sob a ação de uma força central. Em outras palavras, o vetor de posição varre áreas iguais em tempos iguais à medida que o ponto material se movimenta. Para se obter a *trajetória*, $r = f(\theta)$, a variável independente $t$ deve ser eliminada das




(a)




(b)

Figura 13.22

equações 13.11. Usando-se a regra da cadeia do cálculo diferencial e a Equação 13.12, as derivadas temporais das equações 13.11 podem ser substituídas por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

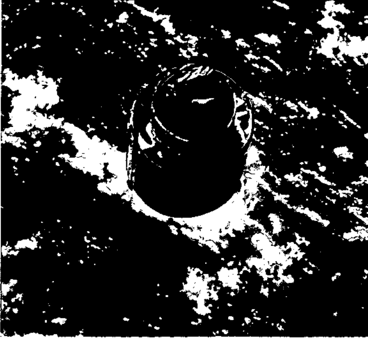
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\right]\frac{h}{r^2}$$

Introduzindo-se uma nova variável dependente $\xi = 1/r$, a segunda equação se torna

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2}$$

e o quadrado da Equação 13.12 se torna

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h^2\xi^4$$



*Este satélite está submetido a uma força central, portanto seu movimento orbital pode ser previsto pelas equações desta seção.*

Substituindo essas duas últimas equações na primeira das equações 13.11 obtemos

$$-h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2} - h^2\xi^3 = -\frac{F}{m}$$

ou

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{F}{mh^2\xi^2} \qquad (13.14)$$

Essa equação diferencial define a trajetória do ponto material submetido à força central **F**.[8]

Para aplicação, será considerada a atração gravitacional. Alguns exemplos comuns de movimentos sob força central que dependem da gravitação incluem o movimento lunar e os de satélites artificiais da Terra e o movimento dos planetas ao redor do Sol. Como um problema típico em mecânica espacial, consideremos a trajetória de um satélite ou um veículo espacial lançado com velocidade inicial $\mathbf{v}_0$, numa órbita de vôo livre (Figura 13.23). Suponha que a velocidade seja inicialmente *paralela* à superfície da Terra, como mostrado na figura.[9] Exatamente no início do vôo livre, a única força agindo no satélite é a força gravitacional terrestre. (Outras forças gravitacionais envolvendo o Sol e a Lua serão ignoradas, pois em órbitas próximas da superfície terrestre seus efeitos são pequenos em comparação com os da Terra.) De acordo com a lei da gravitação de Newton, a força **F** sempre agirá entre os centros de massa da Terra e do satélite (Figura 13.23). Da Equação 13.1, essa força de atração tem módulo

$$F = G\frac{M_em}{r^2}$$

[8] Na dedução, a força é considerada positiva quando orientada para o ponto $O$. Se a força tem o sentido oposto, o segundo membro da Equação 13.14 deve ser negativo.

[9] O caso em que $\mathbf{v}_0$ forma um ângulo $\theta$ com a tangente é mais bem descrito usando-se a conservação do momento angular (veja o Problema 15.116).

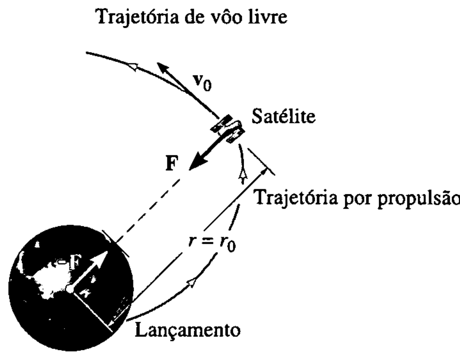



**Figura 13.23**

onde $M_t$ e $m$ representam a massa da Terra e do satélite, respectivamente, $G$ é a constante gravitacional e $r$, a distância entre os centros de massa. Fazendo $\xi = 1/r$ na equação precedente e substituindo o resultado na Equação 13.14, obtemos

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{GM_e}{h^2} \tag{13.15}$$

Essa equação diferencial ordinária de segunda ordem tem coeficientes constantes e é não homogênea. Como solução geral dessa equação tem-se a soma da solução geral da equação homogênea associada e uma solução particular. Como solução geral da equação homogênea temos

$$\xi_c = C\cos(\theta - \phi)$$

onde $C$ e $\phi$ são constantes de integração. Uma solução particular é

$$\xi_p = \frac{GM_e}{h^2}$$

Logo, como solução geral da Equação 13.15, temos

$$\xi = \xi_c + \xi_p$$

$$= \frac{1}{r} = C\cos(\theta - \phi) + \frac{GM_e}{h^2} \tag{13.16}$$

A verificação de que a Equação 13.16 é solução da Equação 13.15 pode ser facilmente efetuada por substituição.

A Equação 13.16, que representa a *trajetória de vôo livre* do satélite, é uma *cônica*, expressa em coordenadas polares. Como mostrado na Figura 13.24, uma cônica é o lugar geométrico dos pontos $P$ do plano tais que a razão entre sua distância a um ponto fixo $F$ (denominado *foco*) e a sua distância a uma reta fixa $DD$ (denominada *diretriz*) é constante. A razão constante é denominada excentricidade da cônica e é representada por $e$. Assim:

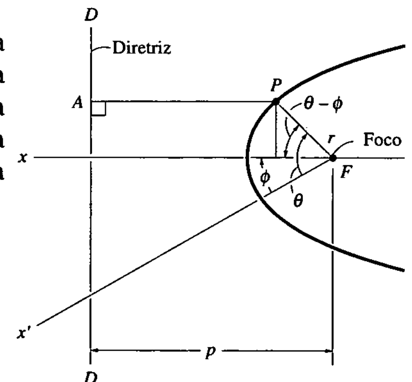



**Figura 13.24**

$$e = \frac{FP}{PA}$$

que pode ser escrita na forma

$$FP = r = e(PA) = e[p - r\cos(\theta - \phi)]$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cos(\theta - \phi) + \frac{1}{ep}$$

Comparando essa equação com a Equação 13.16, vemos que a excentricidade da cônica para a trajetória é

$$\boxed{e = \frac{Ch^2}{GM_e}} \tag{13.17}$$

e a distância fixa do foco à diretriz é

$$p = \frac{1}{C} \tag{13.18}$$

Sendo o ângulo polar $\theta$ medido a partir do eixo $x$ (um eixo de simetria uma vez que ele é perpendicular à diretriz), o ângulo $\phi$ é nulo (Figura 13.24); portanto, a Equação 13.16 reduz-se a

$$\frac{1}{r} = C\cos\theta + \frac{GM_e}{h^2} \tag{13.19}$$

As constantes $h$ e $C$ são determinadas pelos dados obtidos para a posição e a velocidade do satélite ao fim da trajetória de vôo sob propulsão. Por exemplo, se a altura ou distância do veículo espacial é $r_0$ (medida do centro da Terra) e sua velocidade escalar é $v_0$, no início do vôo livre (Figura 13.25), então a constante $h$ pode ser obtida da Equação 13.12. Quando $\theta = \phi = 0°$, a velocidade $\mathbf{v}_0$ não possui componente radial; logo, da Equação 12.25, $v_0 = r_0(d\theta/dt)$, de modo que

$$h = r_0^2\frac{d\theta}{dt}$$

ou

$$\boxed{h = r_0 v_0} \tag{13.20}$$

Para determinarmos $C$, usaremos a Equação 13.19 com $\theta = 0°$, $r = r_0$ e substituiremos $h$, dado pela Equação 13.20:

$$\boxed{C = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right)} \tag{13.21}$$

Assim, a equação da trajetória de vôo livre se torna

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right)\cos\theta + \frac{GM_e}{r_0^2 v_0^2}} \tag{13.22}$$

O tipo de trajetória adquirida pelo satélite é determinado pelo valor da excentricidade da cônica (Equação 13.17). Se

| | |
|---|---|
| $e = 0$ | A trajetória de vôo livre é uma circunferência |
| $e = 1$ | A trajetória de vôo livre é uma parábola |
| $e < 1$ | A trajetória de vôo livre é uma elipse |
| $e > 1$ | A trajetória de vôo livre é uma hipérbole |

(13.23)

Cada uma dessas trajetórias pode ser vista na Figura 13.25. Das curvas, vemos que, quando o satélite segue uma trajetória parabólica, ele está "na fronteira de não-retorno à posição de partida". A velocidade inicial de lançamento, $\mathbf{v}_0$, necessária para se adquirir uma trajetória parabólica, é denominada *velocidade* de *escape*. O módulo $v_e$ dessa velocidade pode ser determinado usando-se a segunda das equações 13.23 com as equações 13.17, 13.20 e 13.21. Deixa-se como exercício mostrar que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{r_0}} \qquad (13.24)$$

A velocidade escalar $v_c$ necessária para lançar o satélite em uma órbita circular pode ser obtida usando-se a primeira das equações 13.23. Uma vez que $e$ está relacionado com $C$ e $h$ (Equação 13.17), $C$ deve ser zero para satisfazer essa equação (na Equação 13.20, $h$ não pode ser zero); portanto, usando a Equação 13.21, temos

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_e}{r_0}} \qquad (13.25)$$

Sendo $r_0$ a altura mínima de lançamento e considerando-se a resistência do ar desprezível, as velocidades de lançamento inferiores a $v_c$ causarão a reentrada do satélite na atmosfera e a sua queima ou colisão com o solo ou mar (Figura 13.25).

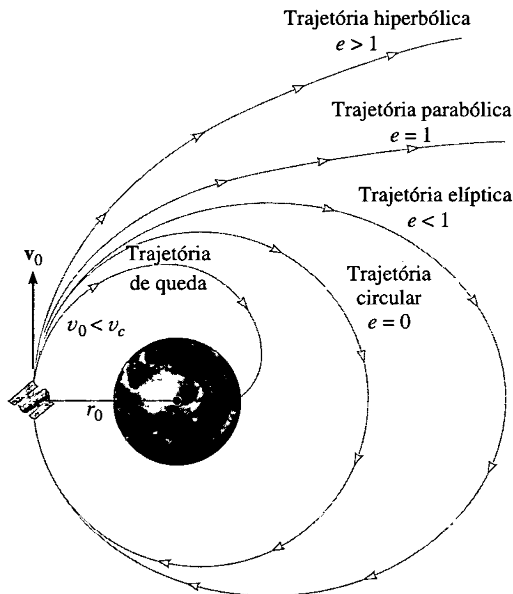



**Figura 13.25**

Todas as trajetórias dos planetas e da maioria dos satélites são elípticas (Figura 13.26). Para a órbita de um satélite ao redor da Terra, a distância mínima da órbita ao centro $O$ do planeta (localizado num dos focos da elipse) é $r_p$, que pode ser obtida usando-se a Equação 13.22 com $\theta = 0°$. Logo:

$$\boxed{r_p = r_0} \qquad (13.26)$$

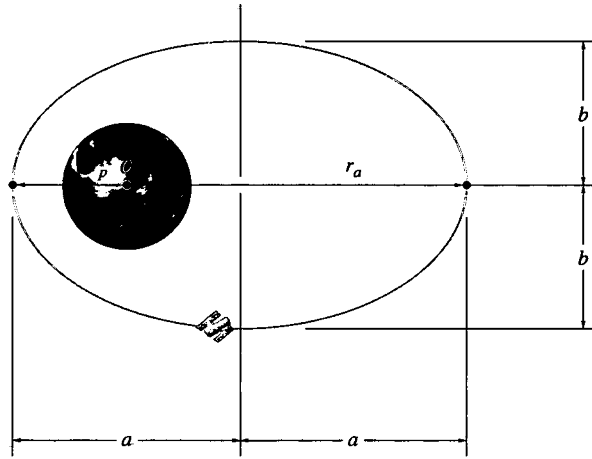



**Figura 13.26**

Essa distância mínima é denominada *perigeu* da órbita. O *apogeu* ou distância máxima $r_a$ pode ser obtido usando-se a Equação 13.22, com $\theta = 180°$.[10] Assim:

$$r_a = \frac{r_0}{(2GM_e/r_0 v_0^2) - 1} \tag{13.27}$$

Em relação à Figura 13.26, o semi-eixo maior $a$ da elipse é

$$\boxed{a = \frac{r_p + r_a}{2}} \tag{13.28}$$

Usando geometria analítica, podemos mostrar que o semi-eixo menor $b$ é determinado pela equação

$$b = \sqrt{r_p r_a} \tag{13.29}$$

Mais ainda, por integração direta, a área de uma elipse é

$$A = \pi ab = \frac{\pi}{2}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \tag{13.30}$$

A velocidade areolar foi definida pela Equação 13.13, $dA/dt = h/2$. A integração dessa equação nos fornece $A = hT/2$, onde $T$ é o *período* de uma revolução orbital, isto é, o tempo para uma volta completa na órbita. Da Equação 13.30, o período é

$$\boxed{T = \frac{\pi}{h}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a}} \tag{13.31}$$

Além da predição da trajetória orbital de satélites da Terra, a teoria desenvolvida nesta seção é válida com aproximação surpreendentemente boa para a predição do movimento real dos planetas ao redor do Sol. Nesse caso, a massa do Sol, $M_s$, deverá substituir a da Terra quando se utilizarem as fórmulas para o movimento planetário.

O fato de que os planetas traçam órbitas elípticas em torno do Sol foi descoberto pelo astrônomo alemão Johannes Kepler no século XVII. Sua descoberta foi *anterior* ao trabalho de Newton sobre as leis do movimento e da gravita-

[10] Na realidade, a terminologia perigeu e apogeu aplica-se tão-somente a órbitas em torno da *Terra*. Se qualquer outro corpo estiver localizado no foco de uma órbita elíptica, as distâncias mínima e máxima serão denominadas *periastro* e *apoastro* da órbita.

ção e consistiu em uma importante prova da validade dessas leis. As leis de Kepler, enunciadas 20 anos depois das medidas dos movimentos planetários, podem ser resumidas como se segue:

1. Todo planeta se move em sua órbita, de modo que a linha unindo-o ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais, qualquer que seja o comprimento da linha.
2. A órbita de todo planeta é uma elipse com o Sol ocupando um dos focos.
3. O quadrado do período de qualquer planeta é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo menor de sua órbita.

Uma formulação matemática da primeira e da segunda lei é dada pelas equações 13.13 e 13.22, respectivamente. A terceira lei pode ser deduzida da Equação 13.31 usando-se as equações 13.19, 13.28 e 13.29.

## EXEMPLO 13.13

Lança-se um satélite a 600 km da superfície da Terra, com uma velocidade inicial de 30 Mm/h paralelamente à superfície do planeta (Figura 13.27). Supondo que o raio da Terra seja de 6.378 km e que sua massa seja de $5{,}976(10^{24})$ kg, determine (a) a excentricidade da trajetória orbital e (b) a velocidade do satélite no apogeu.

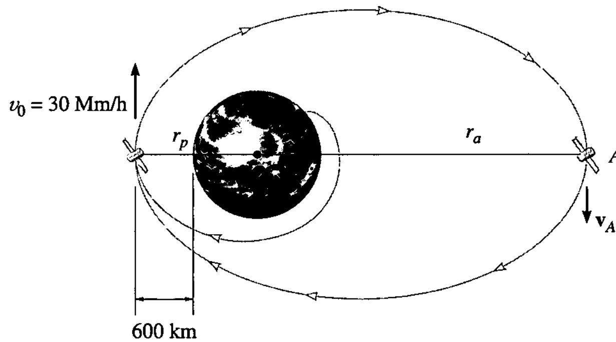



**Figura 13.27**

## SOLUÇÃO

***Parte (a).*** A excentricidade da órbita pode ser obtida da Equação 13.17. As constantes $h$ e $C$ podem ser determinadas com as equações 13.20 e 13.21. Uma vez que

$$r_p = r_0 = 6.378\text{ km} + 600\text{ km} = 6{,}978(10^6)\text{ m}$$
$$v_0 = 30\text{ Mm/h} = 8.333{,}3\text{ m/s}$$

então

$$h = r_p v_0 = 6{,}978(10^6)(8.333{,}3) = 58{,}15(10^9)\text{ m}^2/\text{s}$$
$$C = \frac{1}{r_p}\left(1 - \frac{GM_e}{r_p v_0^2}\right)$$
$$= \frac{1}{6{,}978(10^6)}\left\{1 - \frac{66{,}73(10^{-12})[5{,}976(10^{24})]}{6{,}978(10^6)(8.333{,}3)^2}\right\} = 25{,}4(10^{-9})\text{ m}^{-1}$$

Logo:

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} = \frac{2{,}54(10^{-8})[58{,}15(10^9)]^2}{66{,}73(10^{-12})[5{,}976(10^{24})]} = 0{,}215 < 1 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Da Equação 13.23, observemos que a órbita é uma *elipse.*

***Parte (b).*** Se o satélite fosse lançado no apogeu $A$ mostrado na Figura 13.27, com velocidade $\mathbf{v}_A$, a mesma órbita seria mantida, contanto que

$$h = r_p v_0 = r_a v_A = 58{,}15(10^9)\ \text{m}^2/\text{s}$$

Usando a Equação 13.27, temos

$$r_a = \frac{r_p}{\dfrac{2GM_e}{r_p v_0^2} - 1} = \frac{6{,}978(10^6)}{\left\{\dfrac{2[66{,}73(10^{-12})][5{,}976(10^{24})]}{6{,}978(10^6)(8333{,}3)^2} - 1\right\}} = 10{,}804(10^6)$$

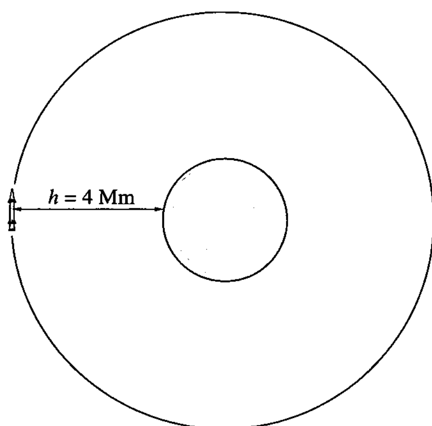
Assim:

$$v_A = \frac{58{,}15(10^9)}{10{,}804(10^6)} = 5.382{,}2\ \text{m/s} = 19{,}4\ \text{Mm/h} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## PROBLEMAS

Nos problemas seguintes, exceto quando indicado explicitamente de outro modo, suponha que o raio da Terra seja de 6.378 km, sua massa seja $5{,}976(10^{24})$ kg, a massa do Sol, $1{,}99(10^{30})$ kg e a constante gravitacional, $G = 66{,}73(10^{-12})\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$.

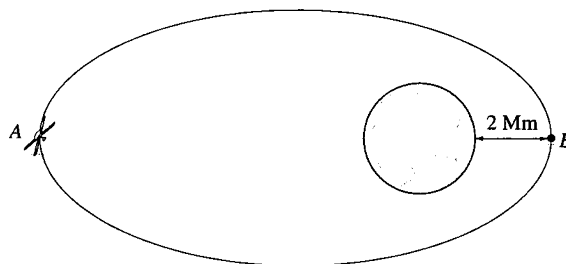
***13.112.** O foguete está numa órbita circular da Terra a uma altitude $h = 4$ Mm. Determine o incremento de velocidade mínimo que ele deve ter para escapar do campo gravitacional da Terra.




**Problema 13.112**

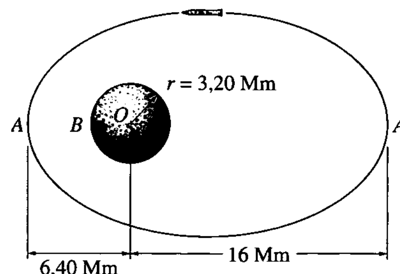
**13.113.** Prove a terceira lei de Kepler. *Dica:* use as equações 13.19, 13.28, 13.29 e 13.31.

**13.114.** O satélite move-se numa trajetória elíptica com excentricidade $e = 0{,}25$. Determine sua velocidade quando ele está à sua distância máxima (ponto $A$) e à sua distância mínima (ponto $B$) da Terra.




**Problema 13.114**

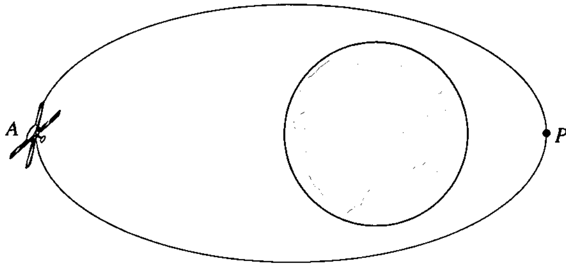
**13.115.** O foguete viaja em vôo livre ao longo da trajetória elíptica $A'A$. A massa do planeta é 60% a da Terra. Se o foguete tem um *apoastro* e um *periastro*, como mostrado na figura, determine sua velocidade quando ele passa por $A$.




**Problema 13.115**

***13.116.** A trajetória elíptica de um satélite tem excentricidade $e = 0{,}130$. Se ele tem velocidade de 25 Mm/h quando no perigeu, $P$, determine sua velocidade no apogeu, $A$. Qual

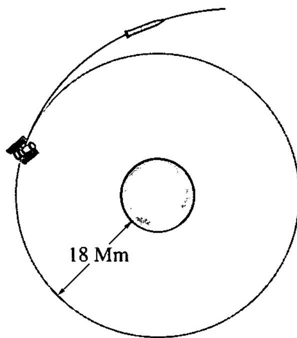
deve ser a sua distância da superfície da Terra quando ele passa por $A$?




Problema 13.116

**13.117.** Lança-se um satélite com uma velocidade inicial $v_0$ = 2.500 mi/h paralelamente à superfície da Terra. Determine a altitude necessária (ou intervalo de altitude) para um lançamento acima da superfície da Terra supondo que a trajetória de vôo livre é (a) circular, (b) parabólica, (c) elíptica e (d) hiperbólica. Tome $G = 34{,}4(10^{-9})$ (lb·pés²)/(slug²), $M_t = 409(10^{21})$ slugs, raio da Terra $r_t = 3.960$ mi e 1 mi = 5.280 pés.

**13.118.** O satélite está em uma órbita circular a 18 Mm da superfície terrestre. Determine o aumento de velocidade tangente à órbita que deve ser comunicada ao foguete que orbita ao lado do satélite para que ele siga em vôo livre uma trajetória parabólica, como mostrado na figura.



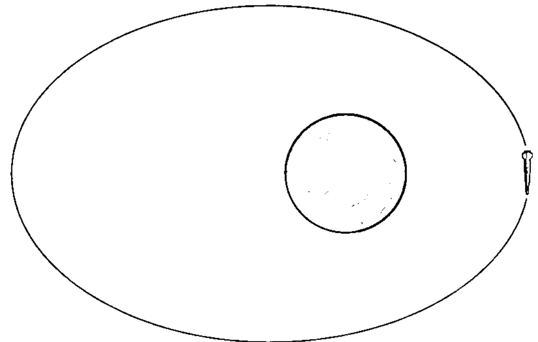

Problema 13.118

**13.119.** A velocidade de um satélite lançado numa órbita circular em torno da Terra é dada pela Equação 13.25. Determine a velocidade que um satélite lançado paralelamente à superfície terrestre deve ter para que descreva uma órbita circular a 800 km acima da superfície da Terra.

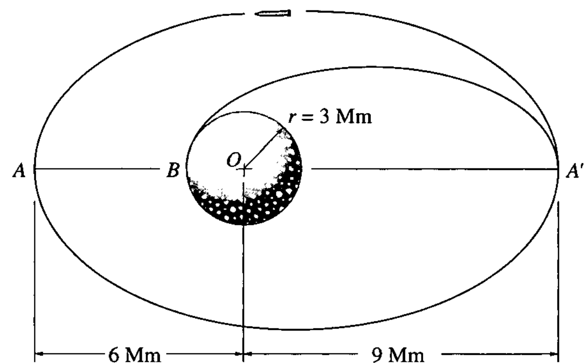
***13.120.** O foguete em vôo livre percorre uma órbita elíptica em torno da Terra, com excentricidade $e$ e perigeu $r_0$. Determine o incremento de velocidade mínimo necessário para ele sair do campo gravitacional terrestre quando estiver passando pelo perigeu.

**13.121.** O foguete está em vôo livre numa órbita elíptica $A'A$. O planeta não possui atmosfera e sua massa é 0,70 vezes a da Terra. Se o foguete tem um *periastro* e um *apoastro* como indicados na figura, determine a velocidade do foguete quando ele passa pelo ponto $A$.

**13.122.** O foguete do Problema 13.121 deve descer no planeta. Determine a velocidade de vôo livre que ele deve ter em $A'$ para que atinja o ponto $B$. Quanto tempo o foguete leva para atingir a superfície do planeta, se ele segue a trajetória elíptica de $A'$ a $B$?

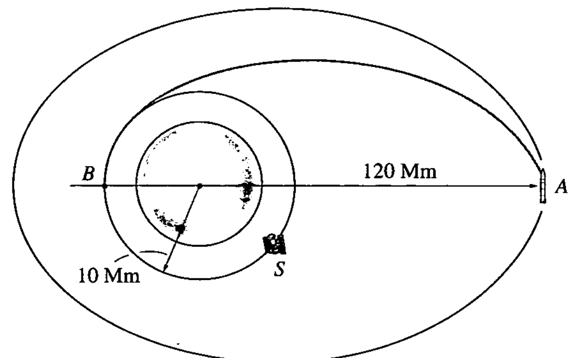


Problema 13.120




Problemas 13.121/122

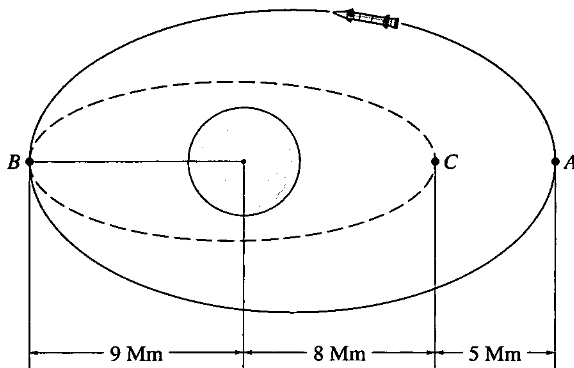
**13.123.** Um satélite $S$ está em uma órbita circular ao redor da Terra e um foguete está localizado no apogeu de sua órbita elíptica, para a qual $e$ = 0,58. Determine a mudança súbita na velocidade que o foguete em $A$ deve ter para que ele entre na órbita do satélite, seguindo em vôo livre ao longo da trajetória elíptica mostrada em sombreado. Determine o ajuste súbito que deve ocorrer na sua velocidade ao chegar a $B$, para o foguete se manter na órbita circular.




Problema 13.123

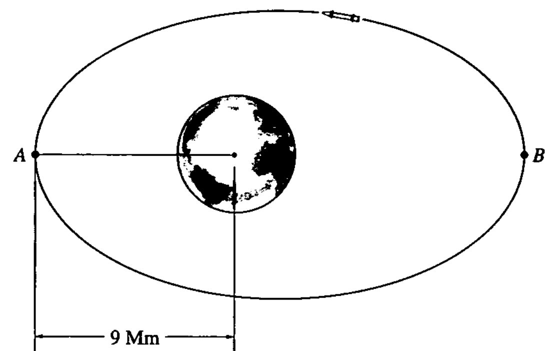
***13.124.** Um asteróide está em órbita ao redor do Sol, apresentando uma distância de periélio de $9{,}30(10^9)$ km. Se a excentricidade da órbita é $e = 0{,}073$, determine a distância de afélio de sua órbita.

**13.125.** A excentricidade da órbita de um foguete em vôo livre é $e = 0{,}76$. Determine sua velocidade ao passar pelo ponto $A$, assim como a mudança súbita na velocidade que o foguete no ponto $B$ deve ter para que ele se desloque em vôo livre ao longo da órbita tracejada.



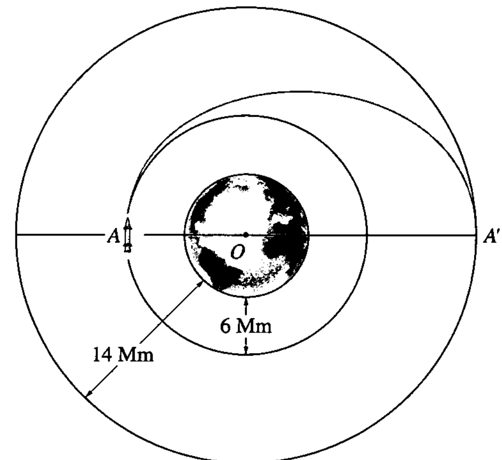

**Problema 13.125**

**13.126.** Com um perigeu de 9 Mm e excentricidade $e = 0{,}76$, um foguete descreve sua órbita elíptica em vôo livre ao redor da Terra, como mostrado na figura. Determine sua velocidade quando ele passa pelo ponto $B$. Determine também o decréscimo súbito na velocidade do foguete em $A$ para que ele passe para uma órbita circular.




**Problema 13.126**

**13.127.** O foguete mostrado na figura está inicialmente em uma órbita circular de 6 Mm acima da superfície terrestre. Necessita-se que ele orbite numa trajetória circular a uma altitude de 14 Mm. Para isso, dá-se ao foguete um pequeno pulso de potência em $A$, de modo que ele se desloca em vôo livre ao longo da trajetória elíptica em sombreado até o ponto $A'$. Que ajuste de velocidade se deve fazer em $A'$ para ele se manter nessa segunda órbita circular?

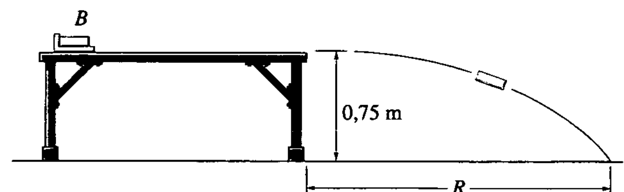



**Problema 13.127**

# ESTUDO DE PROJETOS

## 13.1P Projeto de uma Catapulta

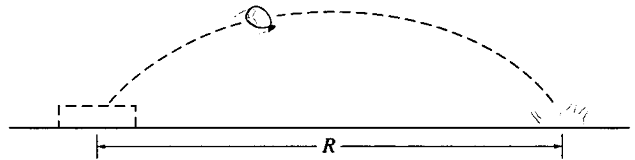
Um bloco $B$ de 20 kg deve ser catapultado de uma mesa. Projete um mecanismo de lançamento que pode ser preso à mesa e ao alojamento do bloco usando blocos e polias. Despreze a massa do alojamento, suponha que o operador possa exercer uma tensão de 120 N num único cabo durante a operação e que o deslocamento máximo de seu braço é de 0,5 m. O coeficiente de atrito cinético entre a mesa e o alojamento é $\mu_c = 0{,}2$. Apresente um esquema de seu projeto e calcule o alcance máximo $R$ do bloco. Compare seu resultado com os de outros colegas.




**Problema 13.1P**

## 13.2P PROJETO DE UM LANÇADOR DE BALÕES DE ÁGUA

Desenvolva um dispositivo para lançar um balão de água de 0,25 lb. Estabeleça uma competição com outros colegas para ver quem pode lançar o balão mais longe ou atingir um alvo. Os materiais devem consistir em um único elástico com comprimento e rigidez especificados e, se necessário, não mais do que três pedaços de madeira de tamanho também especificado. Apresente um relatório mostrando seus cálculos de previsão de onde o balão atingirá o solo a partir do ponto em que ele for lançado. Compare o resultado da previsão com o valor real $R$ obtido e discuta as razões para a diferença encontrada.




**Problema 13.2P**

## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Dinâmica.*** A dinâmica é o estudo da relação entre as forças e a aceleração que elas causam. A relação baseia-se na segunda lei de Newton para o movimento, expressa matematicamente como $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. A constante de proporcionalidade $m$ entre a força resultante $\Sigma \mathbf{F}$ e a aceleração $\mathbf{a}$ causada por essa resultante é a massa do ponto material. A massa, representando a matéria contida no objeto tomado como ponto material, é uma medida de sua resistência a uma variação de seu estado de movimento.

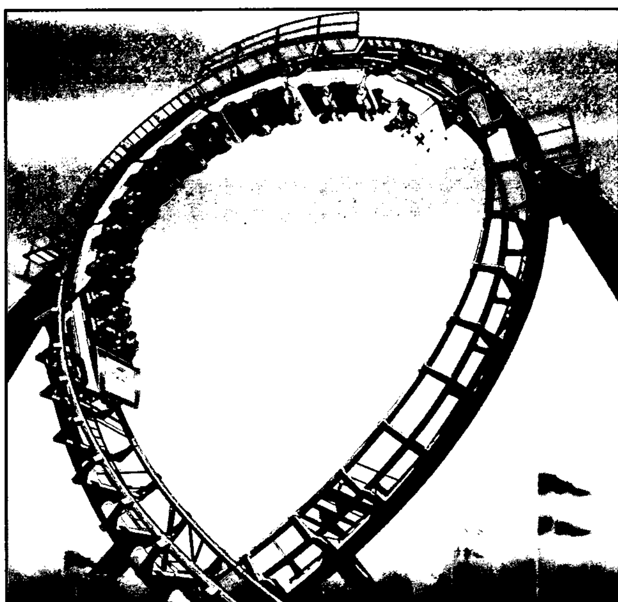
  Antes de aplicar a equação de movimento, é importante desenhar o diagrama de corpo livre levando em conta todas as forças agentes no ponto material. Graficamente, esse diagrama pode ser igualado ao diagrama dinâmico, que exibe o resultado das forças, isto é, o vetor $m\mathbf{a}$.

- ***Sistemas de Coordenadas Inerciais.*** Ao se aplicar a equação de movimento, é importante considerar que as medidas de aceleração são efetuadas em relação a um referencial inercial. Esse referencial tem eixos que não giram; devem ser fixos ou estar em translação com velocidade constante. Vários tipos de sistema de coordenadas podem ser usados para a aplicação da equação $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ expressa em termos de componentes. Usam-se eixos cartesianos $x, y, z$ para descrever movimento retilíneo ao longo de cada eixo. Os eixos normal, $n$, e tangencial, $t$, são usados com freqüência quando a trajetória é conhecida. Recorde-se que $\mathbf{a}_n$ sempre aponta no sentido $+n$; esse componente de aceleração indica a mudança na direção da velocidade. O componente $\mathbf{a}_t$, por sua vez, é tangente à trajetória e é uma medida da variação do módulo da velocidade. Finalmente, as coordenadas cilíndricas são úteis quando o movimento angular da coordenada radial $r$ é especificado ou quando a trajetória pode ser convenientemente descrita com essas coordenadas. Para alguns problemas, a direção das forças no diagrama de corpo livre requer que se encontre o ângulo $\psi$ entre a coordenada radial estendida e a tangente à curva. Esse ângulo pode ser determinado usando-se

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

- ***Movimento sob Força Central.*** Quando a única força agente num ponto material sempre tem a direção definida pelo ponto material e um ponto fixo, como é o caso, por exemplo, do vôo livre de um satélite num campo gravitacional, o movimento é denominado movimento sob a ação de uma força central. A órbita depende da excentricidade $e$, e, como resultado, a trajetória pode ser circular, parabólica, elíptica ou hiperbólica.

# 14 DINÂMICA DE UM PONTO MATERIAL: TRABALHO E ENERGIA



*Para se projetar adequadamente o loop é necessário se assegurar de que os carrinhos tenham energia suficiente para fazer a volta sem perder contato com os trilhos.*

## OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- Desenvolver o princípio do trabalho e energia e aplicá-lo à solução de problemas que envolvem força, velocidade e deslocamento.
- Estudar problemas que envolvem potência e rendimento.
- Introduzir o conceito de força conservativa e aplicar o teorema da conservação da energia para resolver problemas de dinâmica.

## 14.1 TRABALHO DE UMA FORÇA

Em mecânica uma força **F** realiza *trabalho* sobre um ponto material quando este sofre um *deslocamento na direção da força*. Por exemplo, consideremos a força **F** agindo no ponto material mostrado na Figura 14.1. Se o ponto se desloca ao longo da trajetória $s$ a partir da posição **r** a uma nova posição **r**′, o deslocamento é $d\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. O módulo desse deslocamento $dr$ é representado pelo arco elementar da trajetória, $ds$. Se o ângulo entre $d\mathbf{r}$ e **F** é $\theta$ (Figura 14.1), então o trabalho $dU$ realizado pela força **F** é a *quantidade escalar*, definida por

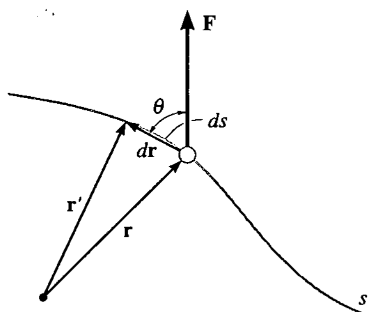



**Figura 14.1**

$$dU = F\,ds\cos\theta$$

Pela definição do produto escalar (veja a Equação C.14), a equação acima pode ser reescrita como

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Esse resultado pode receber qualquer uma das seguintes interpretações: o trabalho é dado pelo produto de $F$ pelo componente do deslocamento na direção da força, isto é, $ds\cos\theta$, ou pelo produto de $ds$ pelo componente da força na direção do deslocamento, isto é, $F\cos\theta$. Observemos que, se $0° \leq \theta < 90°$, então o componente da força e o deslocamento têm o *mesmo sentido*, de modo que o trabalho é *positivo*; se $90° < \theta \leq 180°$, esses vetores têm *sentidos opostos*, portanto o trabalho é *negativo*. Finalmente, $dU = 0$ se a

força é *perpendicular* ao deslocamento, pois cos 90° = 0, ou se o ponto de aplicação da força é *fixo*, caso em que o deslocamento é nulo.

A unidade de trabalho no Sistema Internacional é denominada joule (J). Essa unidade combina a unidade de força (newton) com a de deslocamento (metro). Especificamente, realiza-se um trabalho de 1 *joule* quando uma força de 1 newton move seu ponto de aplicação 1 metro ao longo de sua reta de ação (1 J = 1 N·m). O momento ou torque de uma força também possui a mesma combinação de unidades (N · m), porém os conceitos de torque e trabalho são distintos. O torque ou momento é uma quantidade vetorial, enquanto o trabalho é uma quantidade escalar. No sistema FPS o trabalho é geralmente definido escrevendo-se as unidades como pés · lb, para se distinguir da unidade de torque denotada como lb · pés.

***Trabalho de uma Força Variável.*** Se um ponto material sofre um deslocamento ao longo de sua trajetória, de $\mathbf{r}_1$ a $\mathbf{r}_2$ ou de $s_1$ a $s_2$ (Figura 14.2*a*), o trabalho é determinado por integração. Se $F$ é expresso como uma função da posição, $F = F(s)$, temos

$$U_{1\text{-}2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos\theta \, ds \qquad (14.1)$$

Se o componente da força, $F \cos\theta$, é lançado em gráfico contra o deslocamento $s$ (Figura 14.2*b*), a integral na Equação 14.1 pode ser interpretada como a *área sob a curva* da posição $s_1$ à posição $s_2$.

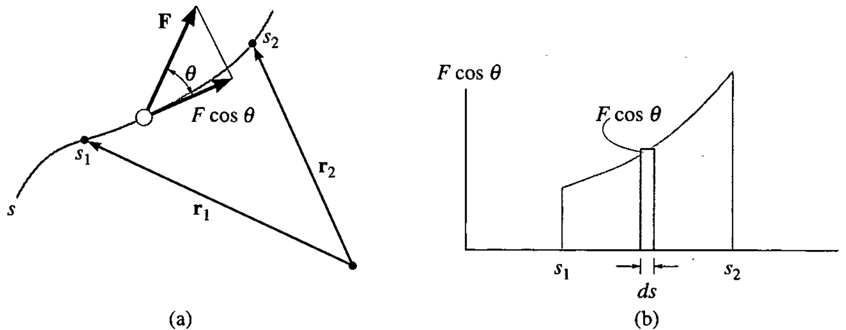



**Figura 14.2**

***Trabalho de uma Força Constante Movendo seu Ponto de Aplicação ao Longo de uma Reta.*** Se a força $F_c$ tem intensidade constante e sua direção forma um ângulo constante com o deslocamento retilíneo de seu ponto de aplicação (Figura 14.3*a*), então o componente da força na direção do deslocamento é $F_c \cos\theta$, e o trabalho da posição $s_1$ até a posição $s_2$, calculado pela Equação 14.1, resulta em

$$U_{1\text{-}2} = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

ou

$$U_{1\text{-}2} = F_c \cos\theta (s_2 - s_1) \qquad (14.2)$$

Nesse caso, o trabalho da força $\mathbf{F}_c$ é representado pela *área do retângulo* da Figura 14.3*b*.

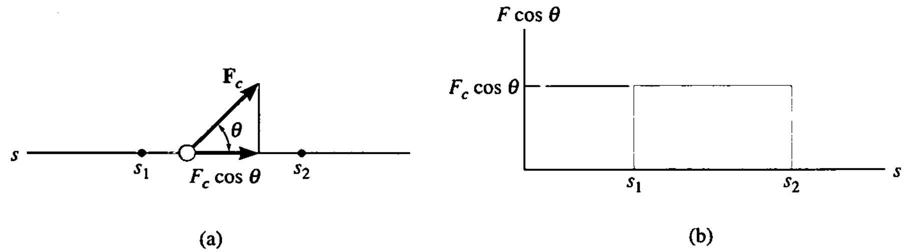



Figura 14.3

***Trabalho da Força Peso.*** Consideremos um ponto material que se move ao longo da trajetória $s$ mostrada na Figura 14.4, indo da posição $s_1$ até a posição $s_2$. Em um ponto intermediário, o deslocamento infinitesimal é dado em coordenadas cartesianas por $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Uma vez que $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$, aplicando a Equação 14.1 temos

$$U_{1\text{-}2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W dy = -W(y_2 - y_1)$$

ou

$$\boxed{U_{1\text{-}2} = -W\Delta y} \tag{14.3}$$

Logo, o trabalho realizado é igual à intensidade da força peso vezes o deslocamento vertical. No caso mostrado na Figura 14.4, o trabalho é *negativo*, pois $\mathbf{W}$ é voltado para *baixo* e o deslocamento se dá para *cima* ($\Delta y$). Observemos que se o ponto material se desloca para *baixo* ($-\Delta y > 0$), o trabalho é *positivo*.

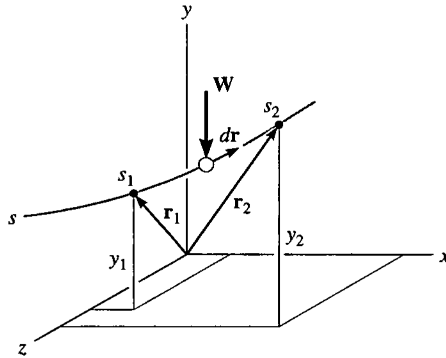



Figura 14.4

***Trabalho da Força de uma Mola.*** A intensidade da força desenvolvida numa mola elástica linear quando esta sofre uma deformação $s$ (medida a partir da posição da mola não deformada) é dada por $F_s = ks$, onde $k$ é a rigidez da mola. Se a mola é distendida ou comprimida de uma posição $s_1$ até outra mais distante $s_2$ (Figura 14.5*a*), o trabalho realizado sobre a mola pela força $\mathbf{F}_s$ é *positivo,* pois a força e o deslocamento têm o *mesmo sentido.* Temos

$$U_{1\text{-}2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s\, ds = \int_{s_1}^{s_2} ks\, ds$$

$$= \tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2$$

Essa equação representa a área do trapézio sob a reta $F_s = ks$ (Figura 14.5*b*).

Se um ponto material é ligado à mola, então a força $F_s$ exercida sobre o ponto é *oposta* àquela exercida sobre a mola (Figura 14.5*c*). Conseqüentemente, quando o ponto se mover e distender ou comprimir a mola, a força realizará trabalho sobre ele e o sinal desse trabalho será oposto àquele dado pela equação anterior, isto é,

$$\boxed{U_{1-2} = -(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2)} \qquad (14.4)$$

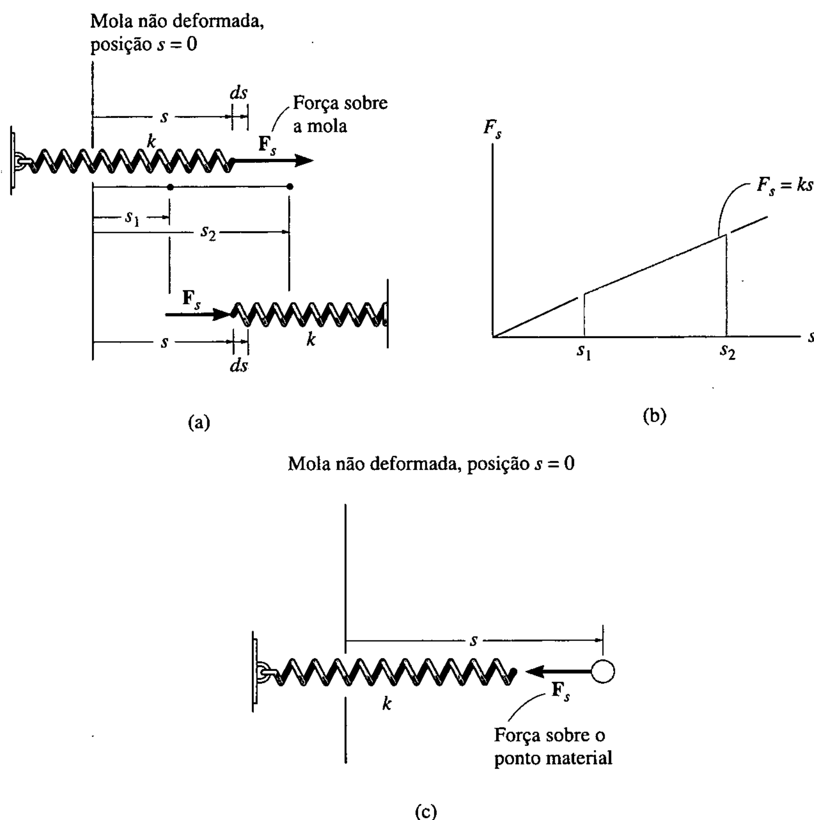
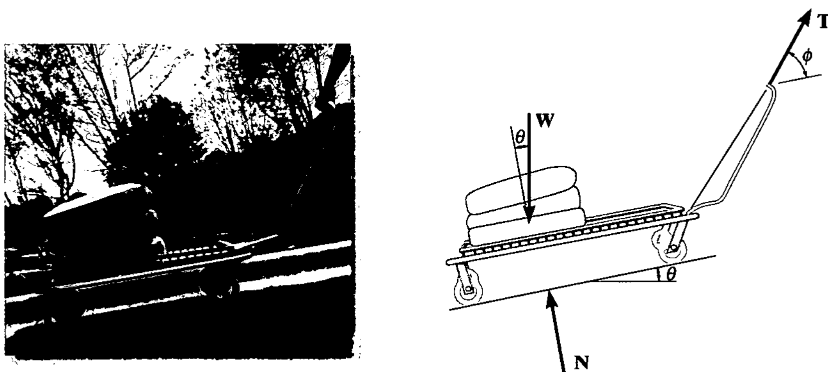



**Figura 14.5**

Quando essa equação for usada, um engano de sinal poderá ser facilmente eliminado se observarmos o sentido da força agindo no ponto e compará-lo com o do deslocamento do ponto material — se ambos tiverem o *mesmo sentido*, o *trabalho será positivo*; *caso contrário*, o *trabalho será negativo*.




As forças agindo no carrinho à medida que ele é puxado de uma distância $s$ ao longo da subida estão no diagrama de corpo livre. A força de tração constante **T** realiza trabalho positivo, $U_T = (T \cos \phi)s$, o peso realiza trabalho negativo, $U_W = -(W \text{ sen } \theta)s$, e a força normal **N** não realiza trabalho por ser perpendicular ao deslocamento de seu ponto de aplicação.

## EXEMPLO 14.1

O bloco de 10 kg mostrado na Figura 14.6*a* está em repouso sobre um plano liso inclinado. Se a mola está inicialmente distendida 0,5 m, determine o trabalho total realizado por todas as forças que agem no bloco quando uma força horizontal $P = 400$ N empurra-o $s = 2$ m plano acima.

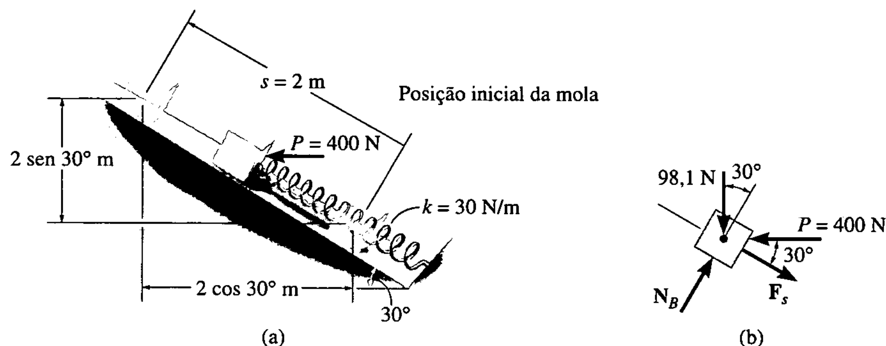



**Figura 14.6**

## SOLUÇÃO

Começa-se por traçar o diagrama de corpo livre que leve em conta todas as forças agindo no bloco (Figura 14.6*b*).

***Força Horizontal P.*** Como essa força é *constante*, seu trabalho é determinado pela Equação 14.2. O resultado pode ser calculado como a força vezes o componente do deslocamento na direção da força; isto é,

$$U_P = 400\text{ N }(2\text{ m}\cos 30^\circ) = 692{,}8\text{ J}$$

ou o deslocamento vezes o componente da força na direção do deslocamento; isto é:

$$U_P = 400\text{ N}\cos 30^\circ(2\text{ m}) = 692{,}8\text{ J}$$

***Força da mola $F_s$.*** Na posição inicial, a mola tem deformação $s_1 = 0{,}5$ m e na posição final, $s_2 = 0{,}5 + 2 = 2{,}5$ m. O trabalho é negativo, pois a força e o deslocamento têm sentidos opostos. O trabalho de $\mathbf{F}_s$ é, portanto,

$$U_s = -[\tfrac{1}{2}(30\text{ N/M})(2{,}5\text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(30\text{ N/m})(0{,}5\text{ m})^2] = -90\text{ J}$$

***Peso W.*** Como o peso age no sentido oposto ao do deslocamento vertical, seu trabalho é negativo; isto é,

$$U_W = -98{,}1\text{ N }(2\text{ m sen }30^\circ) = -98{,}1\text{ J}$$

Observemos que também é possível considerar o componente do peso na direção do deslocamento; isto é,

$$U_W = -(98{,}1\text{ sen }30^\circ\text{ N})2\text{ m} = -98{,}1\text{ J}$$

***Força Normal $N_B$.*** Esta força não realiza trabalho, pois se mantém perpendicular ao deslocamento.

***Trabalho Total.*** O trabalho de todas a forças quando o bloco se desloca 2 m é, portanto,

$$U_T = 692{,}8 - 90 - 98{,}1 = 505\text{ J} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## 14.2 PRINCÍPIO DO TRABALHO E ENERGIA

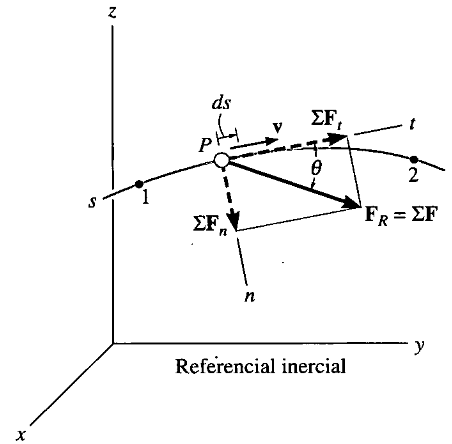



**Figura 14.7**

Consideremos o ponto material $P$, que num dado instante se situa no ponto da trajetória mostrado na Figura 14.7. Se o ponto material tem massa $m$ e está submetido a um sistema de forças externas representado pela resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$, então a equação de movimento para o ponto material no referencial inercial tem componente na direção tangencial dado por $\Sigma F = ma_t$. Considerando que inicialmente a posição é $s_1$ e a velocidade é $v_1$ e que posteriormente a posição ocupada é $s_2$ e a velocidade é $v_2$ e aplicando a equação cinemática $a_t = v\,dv/ds$, obtemos por integração de ambos os membros, após multiplicação pela massa $m$,

$$\Sigma\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv$$

$$\Sigma\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14.5)$$

Da Figura 14.7, $\Sigma F_t = \Sigma F\cos\theta$, e uma vez que o trabalho é definido pela Equação 14.1, o resultado final pode ser escrito como

$$\Sigma U_{1\text{-}2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14.6)$$

Essa equação representa o *princípio do trabalho e energia* para o ponto material. O termo no primeiro membro é a soma dos trabalhos de todas as forças agindo no ponto material conforme ele se move do ponto 1 ao ponto 2. Os dois termos no segundo membro, que têm a forma $T = \frac{1}{2}mv^2$, definem as *energias cinéticas* final e inicial, respectivamente. Esses termos *escalares* são sempre *positivos*. A Equação 14.6 é dimensionalmente homogênea, de modo que a energia cinética tem as mesmas unidades do trabalho, isto é, joules (J) ou pés · lb.

Quando a Equação 14.6 é aplicada, ela é usualmente simbolizada na forma

$$\boxed{T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2} \qquad (14.7)$$

o que nos permite afirmar que a energia cinética inicial do ponto material mais o trabalho realizado por todas as forças agindo nele durante o deslocamento é igual à energia cinética final do ponto.

Como pudemos observar durante a dedução, o princípio do trabalho e energia representa uma forma integrada de $\Sigma F_t = ma_t$, obtida pelo emprego da equação cinemática $a_t = v\,dv/ds$. Como resultado, esse princípio fornece uma conveniente *substituição* de $\Sigma F_t = ma_t$ para se resolverem problemas que envolvem força, velocidade e deslocamento, pois essas quantidades estão envolvidas nos termos da Equação 14.7. Por exemplo, se a velocidade inicial é conhecida e o trabalho de todas as forças que agem no ponto material pode ser determinado, então a Equação 14.7 fornece um *meio direto* de se obter a velocidade final do ponto após ter sofrido um dado deslocamento. Se a velocidade final for determinada por meio da equação de movimento, será necessário um processo de dois estágios, isto é, deve-se aplicar $\Sigma F = ma_t$ para se obter $a_t$, e, então, integrar $a_t = v\,dv/ds$, para finalmente se calcular $v_2$. Observemos que o princípio do trabalho e energia não pode ser usado para determinar, por exemplo, as forças *normais* à trajetória, pois essas forças não realizam trabalho sobre o ponto material. Nesse caso, a equação $\Sigma F_n = ma_n$ deve ser aplicada. Para trajetórias curvas, todavia, o módulo da força normal é uma função da



*Se um carro atingir os cestos, a energia cinética dele será transformada em trabalho, que causará deformações nos cestos e, em certo grau, no próprio carro. Sabendo-se a quantidade de energia absorvida por cada um dos cestos é possível desenvolver um protetor de estrada como este mostrado na figura.*

velocidade escalar. Logo, pode ser mais fácil obter essa velocidade usando o princípio do trabalho e energia para, então, substituir essa quantidade na equação de movimento $\Sigma F_n = mv^2/\rho$ para se obter a força normal para finalmente se calcular a velocidade final.

### PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

- Usa-se o princípio do trabalho e energia para resolver problemas que envolvam velocidade, força e deslocamento, pois esses termos estão relacionados na equação. Para aplicação, sugere-se o seguinte procedimento:

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre)***

- Estabeleça o sistema inercial e desenhe um diagrama de corpo livre para o ponto material, levando em conta todas as forças que realizam trabalho conforme o ponto material se move ao longo de sua trajetória.

***Princípio do Trabalho e Energia***

- Aplique o princípio do trabalho e energia, $T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$.
- A energia cinética nos pontos inicial e final é sempre positiva, pois envolve o quadrado da velocidade $(T = \frac{1}{2}mv^2)$.
- Há realização de trabalho quando o ponto de aplicação da força se desloca na direção desta.
- O trabalho é *positivo* quando força e deslocamento têm o *mesmo sentido*; caso contrário, é negativo.
- Forças que são funções do deslocamento devem ser integradas para se obter o trabalho. Graficamente, o trabalho é igual à área sob a curva força-deslocamento.
- O trabalho da força peso é o produto do módulo do peso pelo deslocamento vertical, $U_W = \pm Wy$. O trabalho é positivo quando o peso se move para baixo.
- O trabalho de uma mola tem a forma $U_s = \frac{1}{2}ks^2$, onde $k$ é a rigidez da mola e $s$, a sua deformação.

A aplicação numérica desse procedimento está ilustrada nos exemplos da Seção 14.3.

## 14.3 PRINCÍPIO DO TRABALHO E ENERGIA PARA UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS

O princípio do trabalho e energia pode ser estendido para um sistema de $n$ pontos materiais contido numa região do espaço, como mostrado na Figura 14.8. O $i$-ésimo ponto material tem massa $m_i$ e está submetido a forças externas de resultante $\mathbf{F}_i$ e a forças internas que se devem aos outros pontos materiais do sistema, cuja resultante representamos aqui por $\mathbf{f}_i$. Usando-se a Equação 14.5, que se refere à direção tangencial, o princípio do trabalho e energia aplicado ao $i$-ésimo ponto material se escreve

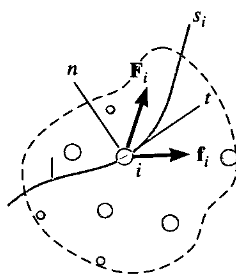



**Figura 14.8**

$$\frac{1}{2}m_i v_{i1}^2 + \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (F_i)_t\, ds + \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (f_i)_t\, ds = \frac{1}{2}m_i v_{i2}^2$$

Obtemos equações semelhantes quando aplicamos o princípio do trabalho e energia aos outros pontos materiais do sistema. Como trabalho e energia são escalares, os resultados podem ser somados algebricamente, de modo que

$$\Sigma\frac{1}{2}m_i v_{i1}^2 + \Sigma\int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (F_i)_t\, ds + \Sigma\int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (f_i)_t\, ds = \Sigma\frac{1}{2}m_i v_{i2}^2$$

que pode ser reescrita simbolicamente como

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = \Sigma T_2 \qquad (14.8)$$

Essa equação estabelece que a soma da energia cinética inicial ($\Sigma T_1$) com o trabalho realizado por *todas as forças internas e externas* agindo em todos os pontos do sistema ($\Sigma U_{1\text{-}2}$) é igual à energia cinética final ($\Sigma T_2$) do sistema. Para manter esse balanço de energia, é necessário que seja feito um acompanhamento muito preciso do trabalho realizado por todas as forças. A esse respeito, observemos que, embora as forças internas apareçam aos pares de forças opostas, que mutuamente se cancelam, seus trabalhos *não se cancelam*, pois as trajetórias dos pontos materiais sobre os quais atuam essas forças são *diferentes*. Todavia, há duas exceções importantes. Se os pontos materiais formam um *corpo rígido em movimento de translação*, então os trabalhos dos pares de forças internas se cancelam, pois todas as forças sofrem o mesmo deslocamento.* Outro exemplo é o de blocos ligados por cabos inextensíveis, para os quais as forças internas são deslocadas da mesma quantidade. Nesse caso, blocos adjacentes exercem forças internas opostas que possuem componentes que sofrem o mesmo deslocamento, e, portanto, os trabalhos se cancelam. Por outro lado, observemos que, se o corpo *não é rígido*, os pontos materiais deslocam-se ao longo de trajetórias diferentes e uma parte da energia que se deve às forças de interação se perde como calor. Discutiremos um pouco esse assunto ao fim desta seção e na Seção 15.4. Ao longo deste livro, no entanto, o princípio do trabalho e energia somente será aplicado para resolver problemas quando essas perdas de energia não tiverem de ser levadas em conta diretamente.

O procedimento para análise delineado na Seção 14.2 fornece um método de aplicação da Equação 14.8; todavia, somente uma equação se aplica para todo o sistema. Se os pontos materiais estão ligados por cabos ou fios, outras equações podem ser obtidas pelo uso dos princípios cinemáticos discutidos na Seção 12.9 a fim de relacionar as velocidades escalares dos pontos. Veja o Exemplo 14.6.

***Trabalho do Atrito Causado por Escorregamento.*** Uma classe especial de problemas que exige cuidado ao se aplicar a Equação 14.8 será agora investigada. Esses problemas envolvem casos em que um corpo está escorregando sobre a superfície de outro, na presença de atrito. Consideremos, por exemplo, um bloco que translada uma distância $s$ sobre uma superfície áspera, como mostra a Figura 14.9*a*. Se a força aplicada **P** equilibra a força de atrito *resultante* (de módulo $\mu_c N$), como mostra a Figura 14.9*b*, então, a velocidade $v$ do bloco se mantém constante e a Equação 14.8 pode ser aplicada como se segue:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_c Ns = \tfrac{1}{2}mv^2$$

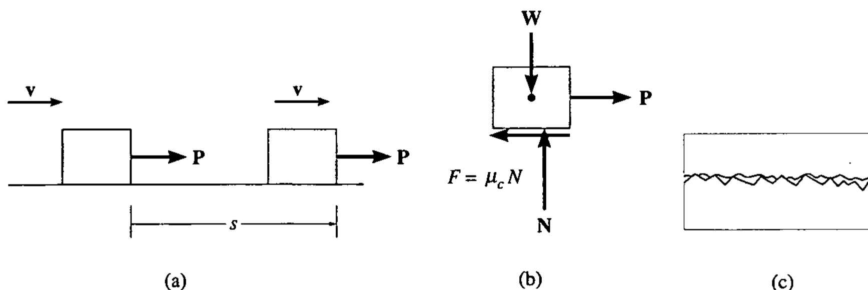



**Figura 14.9**

* Pode ser mostrado que o trabalho total das forças internas é nulo para *qualquer movimento* de um corpo *rígido*, contanto que os pares ação-reação sejam forças que têm a mesma reta de ação (N. do T.).

De fato, essa equação é satisfeita se $P = \mu_c N$; todavia, como se espera, o escorregamento *gerará calor*, uma forma de energia que não parece ser levada em conta na equação do trabalho-energia. Para entendermos esse paradoxo e, portanto, representarmos melhor a natureza do atrito, devemos modelar o bloco de modo que as superfícies de contato sejam *deformáveis* (não rígidas).[1] Lembremos que as porções ásperas no fundo do bloco agem como 'dentes', e quando o bloco escorrega esses dentes deformam-se ligeiramente e se rompem ou vibram, em virtude dos efeitos de interbloqueamento (Figura 14.9*c*). Resulta disso que forças de atrito agentes nesses pontos do bloco sofrem um ligeiro deslocamento, como resultado das deformações localizadas, e então são substituídas por outras forças de atrito à medida que se formam novos pontos de contato. Em cada instante, a *resultante* **F** de todas essas forças de atrito permanece essencialmente constante, isto é, $\mu_c N$; todavia, em virtude das muitas *deformações localizadas*, o deslocamento real $s'$ de $\mu_c N$ *não* é o mesmo deslocamento $s$ da força aplicada **P**. Na verdade, $s'$ será menor do que $s$ ($s' < s$), e, portanto, o *trabalho externo* realizado pela força de atrito resultante será $\mu_c N s'$, e não $\mu_c N s$. A quantidade de energia representada pela diferença $\mu_c N(s - s')$ manifesta-se como um aumento de *energia interna*, que, de fato, provoca um aumento da temperatura do bloco.

Em resumo, a Equação 14.8 pode ser aplicada a problemas que envolvem atrito de escorregamento; contudo, deve ser completamente entendido que o trabalho da força de atrito resultante não é representado por $\mu_c N_s$; esse termo representa *ambos* os trabalhos, o externo, $\mu_c N s'$, e o interno, $\mu_c N(s - s')$, que é convertido em várias formas de energia interna.[2]

## EXEMPLO 14.2

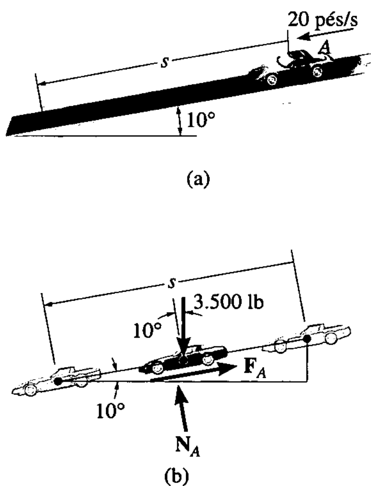



**Figura 14.10**

O automóvel de 3.500 lb mostrado na Figura 14.10*a* move-se para baixo numa estrada com 10° de inclinação, a uma velocidade de 20 pés/s. Se o motorista freia o carro, provocando um travamento das rodas, determine a distância $s$ que o carro percorre durante o escorregamento. O coeficiente de atrito cinético entre as rodas e a pista é $\mu_c = 0{,}5$.

### SOLUÇÃO I

Este problema pode ser resolvido usando-se o princípio do trabalho e energia, pois envolve força, velocidade e deslocamento.

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** Como mostrado na Figura 14.10*b*, a força normal $\mathbf{N}_A$ não realiza trabalho, pois sua direção é perpendicular ao deslocamento de seu ponto de aplicação. O peso, 3.500 lb, sofre um deslocamento $s$ sen10° e realiza trabalho positivo. Por quê? A força de atrito $\mathbf{F}_A$ realiza trabalho externo e interno, *considerando-se* o deslocamento $s$. Seu trabalho é negativo por se tratar de uma força de sentido oposto ao do deslocamento. Aplicando a equação do equilíbrio na direção normal à pista, temos

$$+\nwarrow \Sigma F_n = 0; \qquad N_A - 3.500 \cos 10° \text{ lb} = 0 \qquad N_A = 3.446{,}8 \text{ lb}$$

Assim:

$$F_A = 0{,}5 N_A = 1723{,}4 \text{ lb}$$

[1] Veja o Capítulo 8 do livro *Estática: Mecânica para Engenharia*, 10 ed. R. C. Hibbeler, Prentice Hall, 2005.

[2] Veja B. A. Sherwood e W. H. Bernard, "Work and heat transfer in the presence of sliding friction", *Am. J. Phys.* 52, 1001, 1984.

***Princípio do Trabalho e Energia.***

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3.500 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(20 \text{ pés/s})^2 + \{3.500 \text{ lb}(s \operatorname{sen} 10°) - (1.723{,}4 \text{ lb})s\} = 0$$

Resolvendo, encontramos para $s$

$$s = 19{,}5 \text{ pés}$$ ***Resposta***

## SOLUÇÃO II

São necessários *dois passos* para resolver o problema usando a equação de movimento. Primeiro, do diagrama de corpo livre (Figura 14.10*b*), a equação de movimento deve ser aplicada na direção da pista inclinada. Isso nos fornece

$$+\swarrow \Sigma F_s = ma_s; \qquad 3.500 \operatorname{sen} 10° \text{ lb} - 1.723{,}4 \text{ lb} = \frac{3.500 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}a$$

$$a = -10{,}3 \text{ pés/s}^2$$

A seguir, a forma integrada de $a\,ds = v\,dv$ (cinemática) nos fornece

$$(+\swarrow) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0);$$

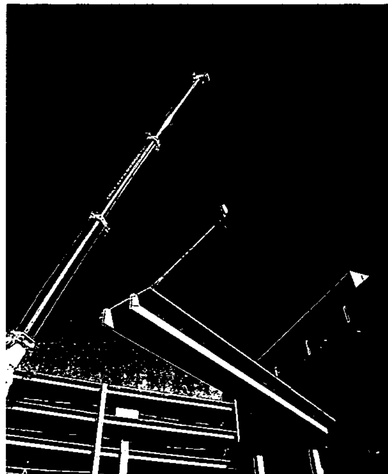
$$(0)^2 = (20 \text{ pés/s})^2 + 2(-10{,}3 \text{ pés/s}^2)(s - 0)$$

$$s = 19{,}5 \text{ pés,}$$ ***Resposta***

pois $a$ é constante.

## EXEMPLO 14.3

Durante um pequeno intervalo de tempo, o guindaste da Figura 14.11*a* ergue a viga de 2,50 t com uma força $F = (28 + 3s^2)$ kN. Determine a velocidade da viga ao fim de um deslocamento vertical $s = 3$ m. Quanto tempo leva para a viga atingir essa altura, supondo-se que ela partiu do repouso?



(a)

**Figura 14.11**

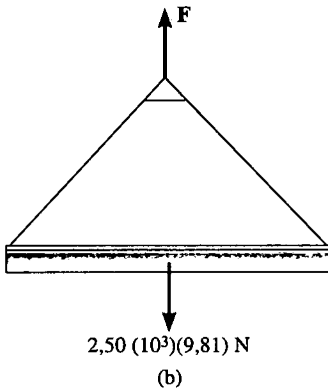



**Figura 14.11**

## SOLUÇÃO

Podemos resolver parte do problema usando o princípio do trabalho e energia, pois ele envolve força, velocidade e deslocamento. A cinemática deve ser usada para determinar o tempo.

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** Como mostrado no diagrama de corpo livre (Figura 14.11*b*), a tração **F** realiza trabalho positivo, que deve ser determinado por integração, pois a força é variável. O peso é constante e realiza trabalho negativo, uma vez que o deslocamento se dá para cima.

***Princípio do Trabalho e Energia.***

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + \int_0^s (28 + 3s^2)(10^3)ds - (2{,}50)(10^3)(9{,}81)s = \tfrac{1}{2}(2{,}50)(10^3)v^2$$

$$28(10^3)s + (10^3)s^3 - 24{,}525(10^3)s = 1{,}25(10^3)v^2$$

$$v = (2{,}78s + 0{,}8s^3)^{\frac{1}{2}}$$

Quando $s = 3$ m,

$$v = 5{,}47 \text{ m/s}$$ ***Resposta***

***Cinemática.*** Uma vez que pudemos expressar a velocidade como uma função do deslocamento, podemos determinar o tempo usando $v = ds/dt$. Nesse caso,

$$(2{,}78s + 0{,}8s^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt}$$

$$t = \int_0^3 \frac{ds}{(2{,}78s + 0{,}8s^3)^{\frac{1}{2}}}$$

A integração pode ser realizada numericamente usando-se uma calculadora. O resultado é

$$t = 1{,}79 \text{ s}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 14.4

A plataforma $P$, mostrada na Figura 14.12*a*, tem massa desprezível e está presa por cabos de 0,4 m que mantêm a mola de 1 m de comprimento comprimida de 0,6 m, quando *nada* se apóia na plataforma. Um bloco de 2 kg é colocado sobre a plataforma e é solto a partir do repouso, após a plataforma ter sido empurrada 0,1 m para baixo (Figura 14.12*b*). Determine a altura máxima $h$ (em relação ao piso) que o bloco sobe no ar.

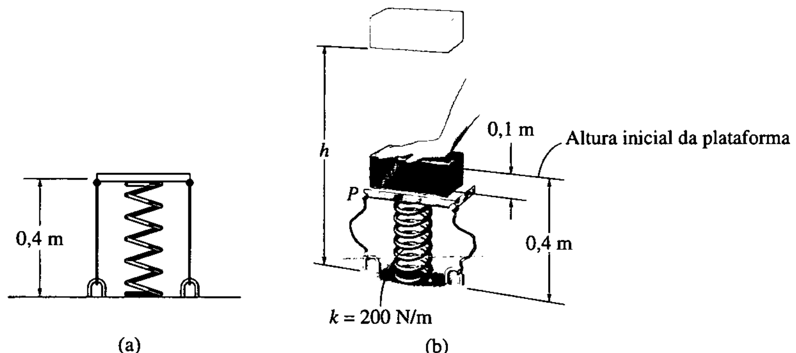
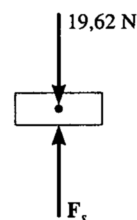



**Figura 14.12**

## SOLUÇÃO

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** As velocidades inicial (ao partir do repouso) e final (ao atingir a máxima altura) são nulas. A Figura 14.12c mostra o diagrama de corpo livre do bloco, quando ele ainda está em contato com a plataforma. Observemos que o peso realiza trabalho negativo e a força da mola, trabalho positivo. Por quê? Em particular, a *compressão inicial* da mola é $s_1 = 0{,}6\text{ m} + 0{,}1\text{ m} = 0{,}7\text{ m}$. Devido aos cabos, a *compressão final* da mola (no instante em que o bloco deixa a plataforma) é $s_2 = 0{,}6\text{ m}$. A base do bloco sobe, indo da altura $(0{,}4\text{ m} - 0{,}1\text{ m}) = 0{,}3\text{ m}$ até à altura final $h$.




(c)

**Figura 14.12**

***Princípio do Trabalho e Energia.***

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \{-(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) - W\Delta y\} = \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

Observemos que $s_1 = 0{,}7\text{ m} > s_2 = 0{,}6\text{ m}$ e, portanto, o trabalho da mola determinado pela Equação 14.4 será, de fato, positivo. Logo:

$$0 + \{-[\tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(0{,}6\text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(200\text{ N/m})(0{,}7\text{ m})^2] - (19{,}62\text{ N})[h - (0{,}3\text{ m})]\} = 0$$

Resolvendo, encontramos

$$h = 0{,}963\text{ m}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 14.5

Pacotes de 2 kg passam da esteira transportadora para uma rampa circular lisa com uma velocidade $v_0 = 1$ m/s, como mostrado na Figura 14.13*a*. Se o raio da rampa é de 0,5 m, determine o ângulo $\theta = \theta_{máx}$ para o qual cada pacote começa a perder contato com a superfície.

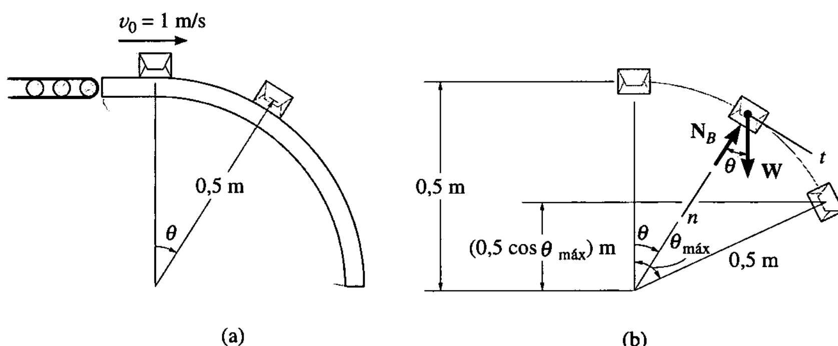



**Figura 14.13**

## SOLUÇÃO

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** A figura mostra o diagrama de corpo livre do bloco para uma posição intermediária $\theta$. O peso $W = 2(9{,}81) = 19{,}62$ N realiza trabalho positivo durante o deslocamento. Supondo que o pacote deixa a superfície quando $\theta = \theta_{máx}$, então o ponto de aplicação da força peso sofre um deslocamento vertical de $[0{,}5 - 0{,}5\cos\theta_{máx}]$ m, como mostrado na figura.

***Princípio do Trabalho e Energia.***

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(1\text{ m/s})^2 + \{19{,}62\text{ N}(0{,}5 - 0{,}5\cos\theta_{máx})\text{m}\} = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_2^2$$

$$v_2^2 = 9{,}81(1 - \cos\theta_{máx}) + 1 \qquad (1)$$

***Equação de Movimento.*** Há duas incógnitas na Equação 1, $\theta_{máx}$ e $v_2$. Para obter uma segunda equação que relaciona essas duas incógnitas vamos aplicar a equação de movimento na *direção normal* às forças consideradas no diagrama de corpo livre. (O princípio do trabalho e energia substituiu a aplicação de $\Sigma F_t = ma_t$, conforme observado na dedução.) Assim:

$$+\swarrow\Sigma F_n = ma_n; \qquad -N_B + 19{,}62\text{ N}\cos\theta = (2\text{ kg})\left(\frac{v^2}{0{,}5\text{ m}}\right)$$

Quando o pacote deixa a rampa em $\theta = \theta_{máx}$, $N_B = 0$ e $v = v_2$; logo, essa equação torna-se

$$\cos\theta_{máx} = \frac{v_2^2}{4{,}905}$$

Eliminando a incógnita $v_2^2$ entre as equações 1 e 2, temos

$$4{,}905\cos\theta_{máx} = 9{,}81(1 - \cos\theta_{máx}) + 1$$

Resolvendo, temos

$$\cos\theta_{máx} = 0{,}735$$
$$\theta_{máx} = 42{,}7° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Este problema foi resolvido no Exemplo 13.9. Comparando-se os dois métodos de solução, torna-se evidente que a abordagem pelo método do trabalho e energia fornece uma solução mais direta.

## EXEMPLO 14.6

Os blocos $A$ e $B$ mostrados na Figura 14.14*a* têm massa de 10 kg e 100 kg, respectivamente. Determine a distância percorrida por $B$ do ponto onde foi solto em repouso até o ponto onde sua velocidade se torna 2 m/s.

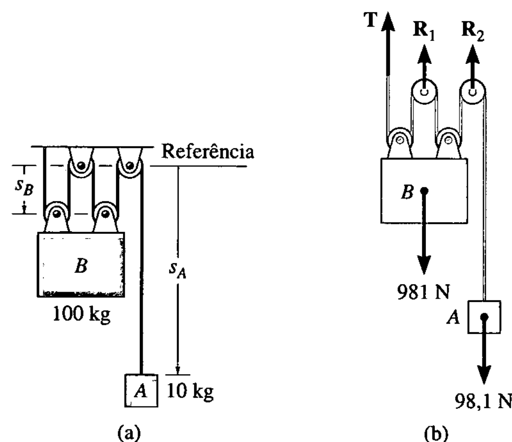



**Figura 14.14**

## SOLUÇÃO

Podemos resolver este problema considerando os blocos separadamente e aplicando o princípio do trabalho e energia a cada bloco. Todavia, o trabalho da força de tração (desconhecida) do cabo pode ser eliminado da análise considerando-se que os blocos $A$ e $B$ juntos formam um sistema. A solução exigirá a solução simultânea das equações do trabalho e energia *e* da *cinemática*. Para mantermos a consistência da convenção de sinal, vamos supor que ambos os blocos se movem no sentido positivo para baixo.

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** Como mostrado no diagrama de corpo livre do sistema (Figura 14.14*b*), a força do cabo $\mathbf{T}$ e as reações $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ *não realizam trabalho*, pois essas forças representam reações no suporte e conseqüentemente não se movem durante o movimento dos blocos. Os pesos realizam trabalho positivo, uma vez que, como foi estabelecido anteriormente, ambos movem-se para baixo.

***Princípio do Trabalho e Energia.*** Considerando que os blocos são abandonados a partir do repouso, temos

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$$

$$\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_1^2\} + \{W_A\,\Delta s_A + W_B\,\Delta s_B\} =$$

$$\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_2^2\}$$

$$\{0 + 0\} + \{98{,}1\text{ N}(\Delta s_A) + 981\text{ N}(\Delta s_B)\} =$$

$$\{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2\text{ m/s})^2\} \qquad (1)$$

***Cinemática.*** Usando os métodos da cinemática discutidos na Seção 12.9, podemos ver da Figura 14.14*a* que em qualquer instante o comprimento $l$ de todos os segmentos do cabo pode ser expresso em termos das coordenadas de posição $s_A$ e $s_B$ como

$$s_A + 4s_B = l$$

Logo, uma mudança de posição nos fornece a equação do deslocamento

$$\Delta s_A + 4\,\Delta s_B = 0$$

$$\Delta s_A = -4\,\Delta s_B \qquad (2)$$

Como estabelecido, ambos os deslocamentos são positivos no sentido para baixo. Tomando a derivada temporal temos

$$v_A = -4v_B = -4(2\text{ m/s}) = -8\text{ m/s}$$

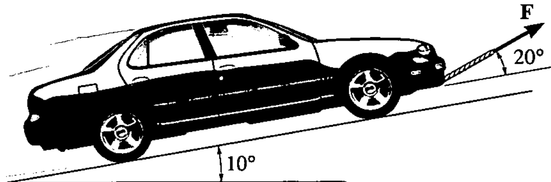
*Mantendo* o sinal negativo na Equação 2, obtemos após substituição na Equação 1

$$\Delta s_B = 0{,}883\text{ m}\downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

## PROBLEMAS

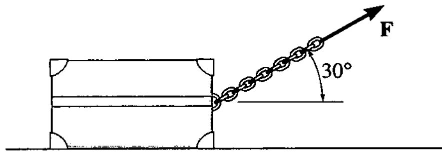
**14.1.** Uma mulher de 70 kg está num elevador que tem aceleração para baixo de 4 m/s$^2$. Supondo que o elevador tenha partido do repouso, determine o trabalho realizado pelo peso da mulher e o trabalho da força normal que o piso do elevador exerce nela quando o elevador chega ao fim de uma descida de 6 m. Explique por que os trabalhos dessas duas forças são diferentes.

**14.2.** O carro de 2 t está se movendo inicialmente a 2 m/s. Determine a distância que ele deve ser rebocado pela força $F$ = 4 kN para atingir uma velocidade de 5 m/s. Despreze o atrito e a massa das rodas.



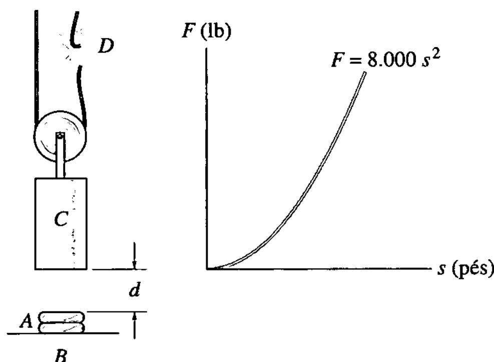

**Problema 14.2**

**14.3.** Submete-se a caixa de 20 kg a uma força de direção constante e intensidade $F$ = 100 N, onde $s$ é dado em metros. Quando $s$ = 15 m, a caixa tem velocidade de 8 m/s para a direita. Determine sua velocidade quando $s$ = 25 m. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o piso é $\mu_c$ = 0,25.



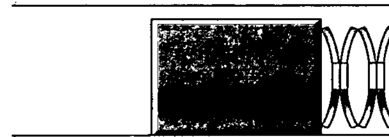

**Problema 14.3**

***14.4.** Usa-se a 'mola de ar' $A$ para proteger o piso $B$ e evitar danos ao 'peso' $C$, na eventualidade de uma ruptura da correia como aquela representada na figura. A força desenvolvida pela mola como função da deformação $s$ está indicada no gráfico à direita. O peso é de 50 lb e está suspenso a uma altura $d$ = 1,5 pé no momento em que ocorre uma ruptura em $D$. Determine a deformação máxima da mola. Despreze a massa da polia e a da correia.



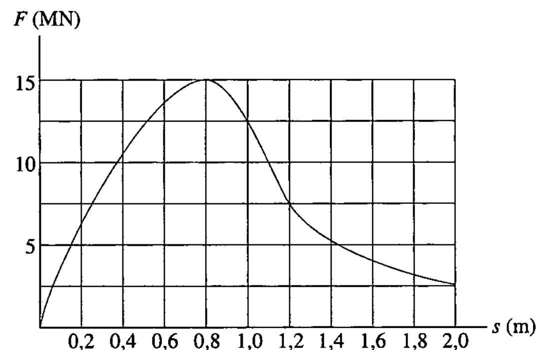

**Problema 14.4**

**14.5.** O bloco liso de 20 lb está empurrando a série de molas *Belleville* de modo que a compressão na série é $s$ = 0,05 pé. Se a força da mola composta é $F = (3s^{1/3})$ lb, onde $s$ é dado em pés, determine a velocidade do bloco imediatamente após ele ter perdido contato com a mola. Despreze os atritos.



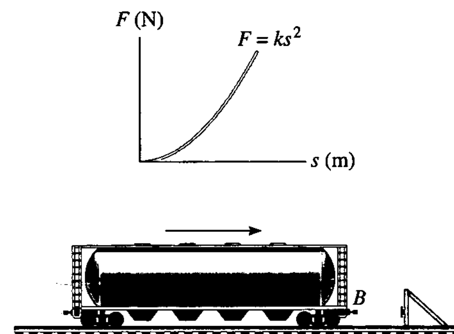
**Problema 14.5**

**14.6.** A figura mostra como varia a força que age num projétil de 7 kg, enquanto ele percorre o cano de 2 m de um canhão. Determine a velocidade aproximada do projétil no instante em que ele deixa o cano. Despreze o atrito e suponha que o cano é horizontal.



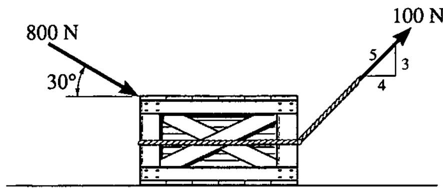

**Problema 14.6**

**14.7.** Desenvolva um projeto para o pára-choque B do vagão de S t, considerando uma mola não-linear que apresenta a relação carga-deformação mostrada na figura. Em seu projeto escolha o valor de $k$ para que a deformação máxima da mola fique limitada a 0,2 m quando o vagão atinge o pára-choque rígido a uma velocidade de 4 m/s. Despreze a massa das rodas do vagão.




**Problema 14.7**

*14.8. A caixa de 100 kg está submetida a duas forças, como mostrado na figura. Se a caixa está inicialmente em repouso, determine a distância que ela desliza até alcançar a velocidade de 6 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e o piso é $\mu_c = 0{,}2$.



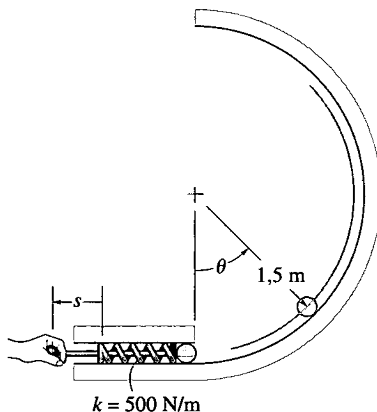

**Problema 14.8**

14.9. Quando o motorista aplica os freios da caminhonete que trafega a 40 km/h, ocorre um escorregamento de 3 m até a parada. Quanto escorregaria o veículo se a velocidade fosse de 80 km/h?



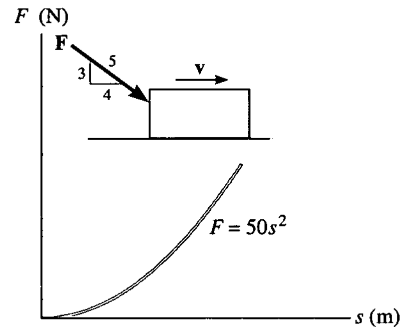
**Problema 14.9**

14.10. Deseja-se disparar uma bola de 0,5 kg e de dimensões desprezíveis num trilho circular. O disparador mantém a mola comprimida em 0,08 m quando $s = 0$. Determine o valor de $s$ necessário para que a bola comece a deixar o trilho quando $\theta = 135°$.



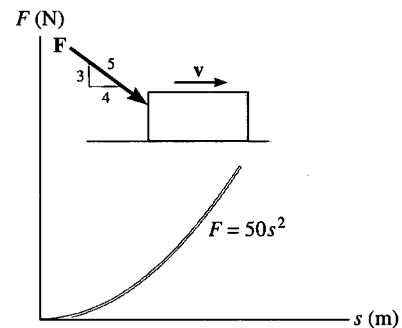

**Problema 14.10**

▪14.11. A força **F** agindo num bloco de 20 kg tem direção constante e sua intensidade varia com a posição $s$ de seu ponto de aplicação. Determine quanto o bloco desliza até que sua velocidade se torne igual a 5 m/s. Quando $s = 0$, o bloco tem velocidade de 2 m/s para a direita. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu_c = 0{,}3$.



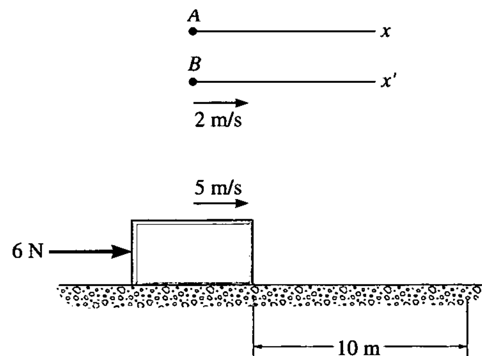

**Problema 14.11**

*14.12. A força **F** agindo num bloco de 20 kg tem direção constante e sua intensidade varia com a posição $s$ de seu ponto de aplicação. Determine a velocidade do bloco após um deslizamento de 3 m. Quando $s = 0$, o bloco está se movendo para a direita a uma velocidade de 2 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu_c = 0{,}3$.



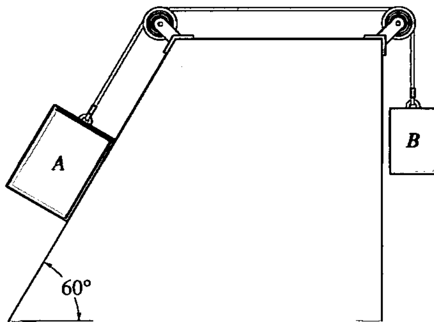

**Problema 14.12**

14.13. Como indicado na dedução, o princípio do trabalho e energia é válido para observadores em *qualquer* referencial inercial. Verifique esse resultado, considerando o bloco de 10 kg apoiado numa superfície horizontal lisa e submetido a uma força horizontal de 6 N. O observador $A$ está num referencial inercial *fixo* $x$. Determine a velocidade final do bloco se ele tem velocidade inicial de 5 m/s e se desloca 10 m para a direita nesse referencial. Compare o resultado com o de um observador $B$ num referencial $x'$ movendo-se com uma velocidade constante de 2 m/s relativamente a $A$. *Dica:* a distância percorrida pelo bloco deverá ser calculada para o observador $B$ antes da aplicação do princípio do trabalho e energia.



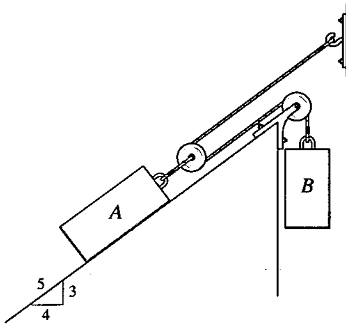

**Problema 14.13**

**14.14.** Determine a velocidade do bloco $A$ de 20 kg, inicialmente em repouso, depois que ele for solto e sofrer um deslocamento de 2 m plano abaixo. O bloco $B$ tem massa de 10 kg e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco $A$ e o plano é $\mu_c = 0{,}2$. Qual é a tensão na corda?



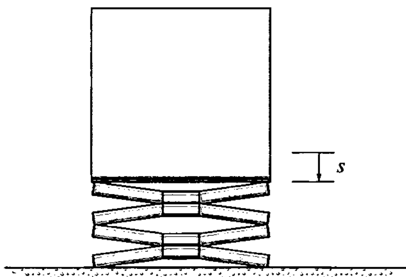

**Problema 14.14**

**14.15.** Os blocos $A$ e $B$ têm massa de 60 lb e 10 lb, respectivamente. Determine a velocidade do bloco $A$, inicialmente em repouso, após ele ter sofrido um deslocamento de 5 pés plano abaixo. Despreze os atritos e as massas das polias do cabo.



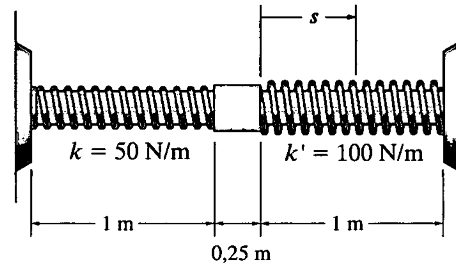

**Problema 14.15**

***14.16.** O bloco de 20 lb é empurrado contra uma série de molas *Belleville*, de modo que a mola composta apresenta uma deformação $s = 0{,}05$ pé. A força da mola sobre o bloco é dada por $F = (100s^{1/3})$ lb, onde $s$ é dado em pés. Determine a velocidade do bloco no momento em que ele perde contato com a mola, isto é, quando $s = 0$.



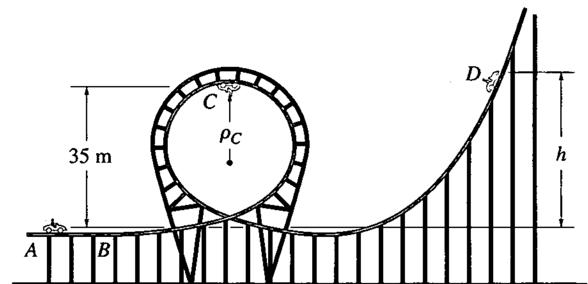

**Problema 14.16**

**14.17.** O cursor tem massa de 20 kg e a barra horizontal é lisa. As molas são presas no cursor e nas extremidades da barra e cada uma tem comprimento de 1 m, quando não deformada. Se o colar é deslocado para $s = 0{,}5$ m e abandonado a partir do repouso, determine sua velocidade no instante em que ele retorna ao ponto $s = 0$.



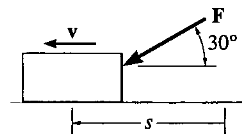

**Problema 14.17**

**14.18.** Determine a altura $h$ do ponto $D$ alcançado pelo carrinho de 200 kg, supondo que ele é lançado de $B$ com uma velocidade exatamente suficiente para fazer a volta sem perder contato com o trilho em $C$. O raio de curvatura em C é $\rho_C = 25$ m.



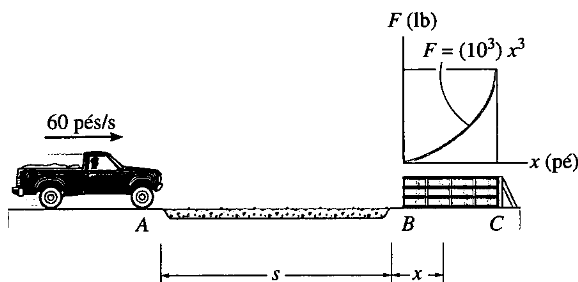

**Problema 14.18**

**14.19.** Submete-se o bloco de 2 kg a uma força de direção constante e módulo $F = (300/(1 + s))$ N, onde $s$ é dado em metros. Quando $s = 4$ m, o bloco está se movendo para a esquerda com uma velocidade de 8 m/s. Determine sua velocidade quando $s = 12$ m. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é $\mu_c = 0{,}25$.



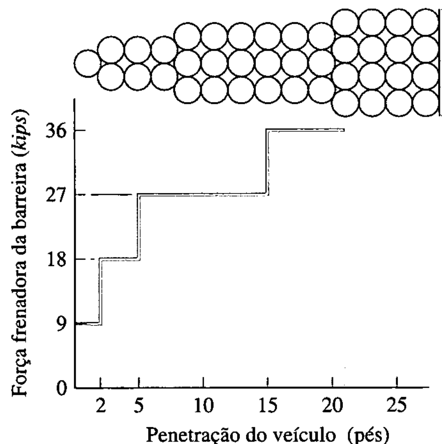

**Problema 14.19**

***14.20.** O movimento de uma caminhonete é detido por uma camada de pedregulhos $AB$ e barris $BC$. Os experimentos indicam que os pedregulhos oferecem uma resistência de rolamento de 160 lb por roda e que os barris fornecem a resistência indicada no gráfico. Determine a distância $x$ que o veículo de 4.500 lb penetra na barreira dos barris se a sua velocidade no instante em que atinge $A$ é de 60 pés/s. Considere $s = 50$ pés e despreze as dimensões da caminhonete.



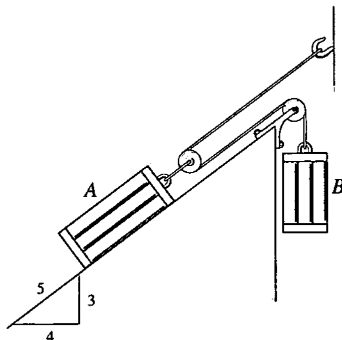

Problema 14.20

**14.21.** O amortecedor de impacto para uma barreira de uma rodovia consiste em barris preenchidos com um material absorvedor de impacto. A força de frenamento *versus* a penetração do veículo no amortecedor foi medida e está informada na figura. Determine a distância que um carro de 4.000 lb penetrará na barreira se a sua velocidade no início do impacto for de 55 pés/s.



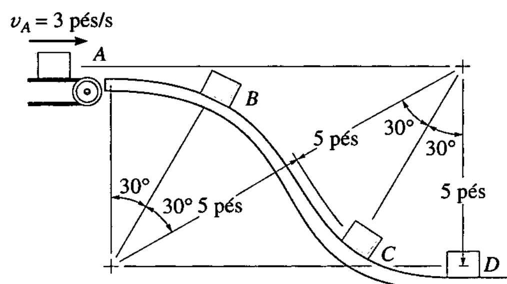

Problema 14.21

**14.22.** Os blocos $A$ e $B$ pesam 60 lb e 10 lb, respectivamente. Se o coeficiente de atrito cinético entre a rampa e o bloco $A$ é de 0,2, determine a velocidade de $A$ após um deslocamento de 3 pés rampa abaixo, partindo do repouso. Despreze a massa das polias e do cabo.




Problema 14.22

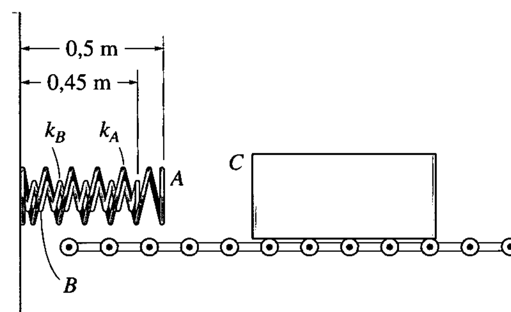
**14-23.** Pacotes de 50 lb são entregues a uma calha com velocidade $v_A$ = 3 pés/s. Determine a velocidade deles quando atingem os pontos $B$, $C$ e $D$. Calcule também a força normal da calha sobre os pacotes em $B$ e $C$. Despreze o atrito e a dimensão dos pacotes.




Problema 14.23

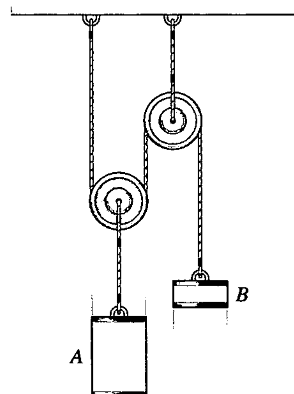
***14.24.** O lingote de aço de 1.800 kg transportado a uma velocidade $v$ = 0,5 m/s atinge um conjunto de molas. Determine a deformação máxima de cada mola supondo que elas sejam capazes de parar o lingote. Considere $k_A$ = 5 kN/m e $k_B$ = 3 kN/m.

**14.25.** O lingote de aço de 1.800 kg transportado a uma velocidade $v$ = 0,5 m/s atinge um conjunto de molas. Se a rigidez da mola externa é $k_A$ = 5 kN/m, determine a rigidez que a outra mola deve ter para que o lingote pare no momento em que sua face $C$ estiver a 0,3 m da parede.



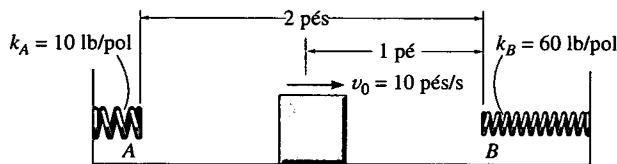

Problemas 14.24/25

**14.26.** Os pesos dos blocos $A$ e $B$ são 60 lb e 10 lb, respectivamente. Determine a distância que $A$ deve descer a partir do repouso antes de atingir a velocidade de 8 pés/s. Qual é a tensão na corda que suporta $A$? Despreze a massa das polias e dos cabos.



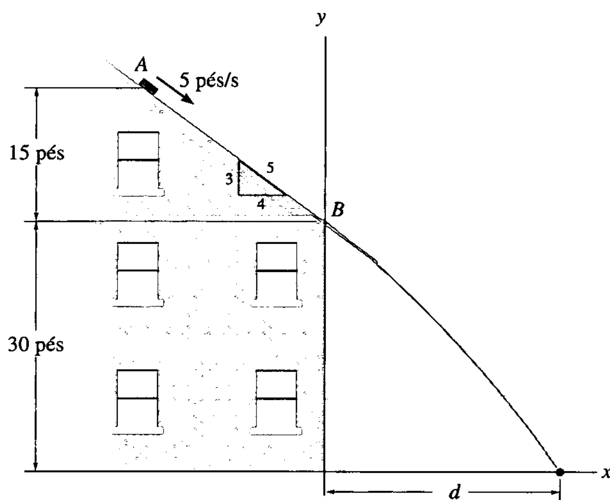

Problema 14.26

**14.27.** O bloco de 25 lb tem velocidade inicial $v_0 = 10$ pés/s quando está a meia distância das molas. Depois de colidir com $B$, o bloco retorna, indo colidir com $A$ etc. Se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é de 0,4, determine a distância total percorrida pelo bloco até ele atingir o repouso.



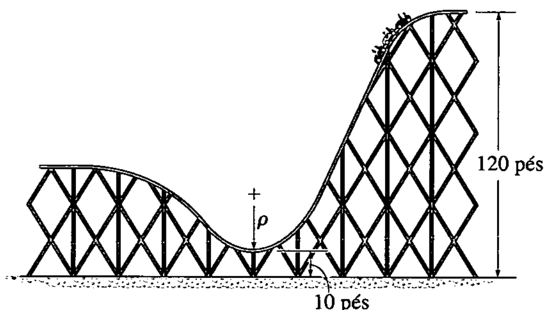

**Problema 14.27**

***14.28.** O tijolo de 2 kg escorrega para baixo no telhado liso. No ponto $A$ sua velocidade é de 5 pés/s. Determine a velocidade do bloco ao atingir $B$, a distância $d$ do ponto de impacto com o solo até a parede e a velocidade com que ele chega a esse ponto.



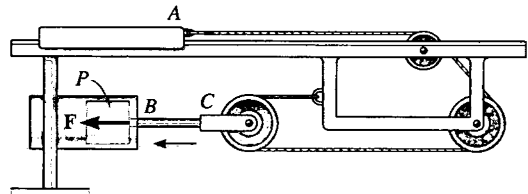

**Problema 14.28**

**14.29.** Os carrinhos foram projetados para que cada ocupante não experimente uma força normal contra seu assento com intensidade maior do que 3,5 vezes seu próprio peso. Determine o menor raio de curvatura $\rho$ que o trilho deve ter no seu ponto mais baixo, supondo que um carrinho tem uma velocidade de 5 pés/s no início da descida. Despreze os atritos.



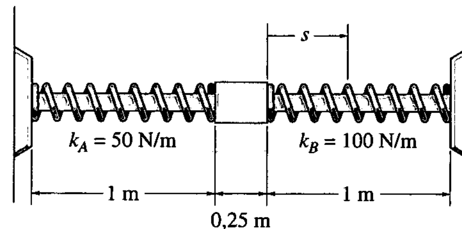

**Problema 14.29**

**14.30.** O mecanismo de lançamento é usado para impulsionar para a direita um cursor $A$ de 10 kg ao longo de um trilho liso. A ação é obtida ao se puxar rapidamente para a esquerda a polia ligada à barra $BC$, por meio de um pistão $P$. Se o pistão aplica uma força constante $F = 20$ kN à barra $BC$, movendo-a de 0,2 m, determine a velocidade atingida pelo cursor que estava inicialmente em repouso. Despreze a massa das polias, do cabo, do pistão e da barra $BC$.




**Problema 14.30**

**14.31.** O colar de 20 kg desliza ao longo da barra lisa. Duas molas estão ligadas a ele e às extremidades da barra. Cada mola tem, quando não deformada, um comprimento de 1 m e o colar tem velocidade de 2 m/s quando $s = 0$. Determine a deformação máxima de cada mola durante o movimento de vai-e-vem (movimento oscilatório) do colar.

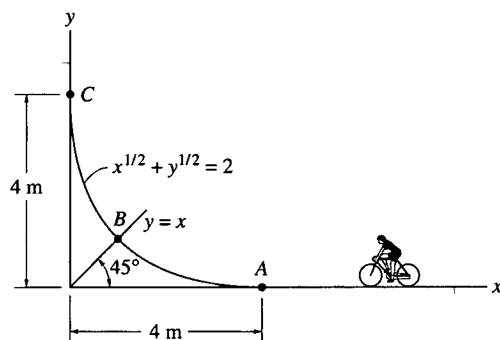



**Problema 14.31**

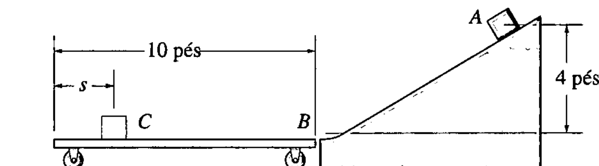
***14.32.** O ciclista dirige-se ao ponto $A$, pedalando até alcançar uma velocidade $v_A = 8$ m/s, nesse ponto. A partir daí a bicicleta segue livremente ao longo da trajetória curva. Determine a força normal que o ciclista exerce sobre a superfície curva quando ele chega a $B$. A massa total da bicicleta e do ciclista é de 75 kg. Despreze o atrito, a massa das rodas e o tamanho da bicicleta.

**14.33.** O ciclista dirige-se ao ponto $A$, pedalando até alcançar uma velocidade $v_A = 4$ m/s nesse ponto. A partir daí a bicicleta segue livremente ao longo da trajetória curva. Determine a altura máxima alcançada na superfície curva. Quais são os módulos da força normal sobre a superfície e da aceleração da bicicleta, no ponto de altura máxima? A massa total da bicicleta e do ciclista é de 75 kg. Despreze o atrito, a massa das rodas e o tamanho da bicicleta.

**14.34.** A caixa $A$ de 30 lb, inicialmente em repouso, é abandonada e escorrega ao longo da rampa lisa e da superfície do carrinho. Se o carrinho se mantém *fixo*, determine a posição $s$ do ponto $C$ em que a caixa pára. O coeficiente de atrito cinético entre o carrinho e a caixa é de $u_c = 0,6$.

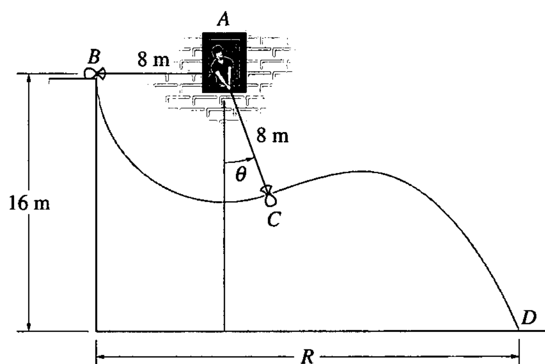



**Problemas 14.32/33**



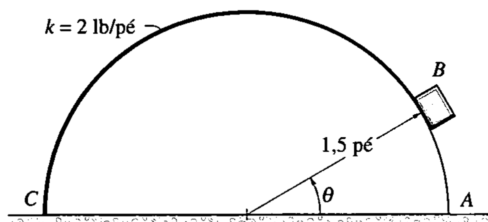

**Problema 14.34**

**14.35.** O homem à janela $A$ deseja arremessar o saco de 30 kg para o chão. Para tal fim ele permite um movimento pendular a partir do repouso em $B$ até o ponto $C$, onde ele solta a corda a um ângulo $\theta = 30°$. Determine a velocidade com que o saco atinge o solo e a distância $R$.



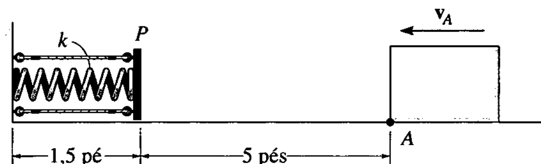

**Problema 14.35**

***14.36.** Um bloco de 2 kg está em repouso sobre uma superfície semicilíndrica lisa. Uma corda elástica de rigidez $k = 2$ lb/pé está presa no bloco em $B$ e na base do semicilindro em $C$. Se o bloco é solto a partir do repouso em A ($\theta = 0°$), determine o comprimento que a corda não deformada deve ter para que o bloco deixe a superfície no instante em que $\theta = 45°$. Despreze o tamanho do bloco.



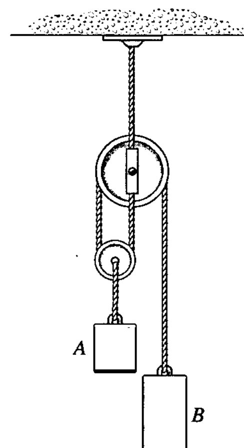

**Problema 14.36**

**14.37.** O pára-choque de mola é utilizado para deter o bloco de 4 lb que está deslizando em direção a ele com uma velocidade $v = 9$ pés/s. Como mostrado na figura, a mola está confinada entre uma placa $P$ e a parede por meio de cabos, de modo que seu comprimento é de 1,5 pé. Se a rigidez da mola é $k = 50$ lb/pé, determine o comprimento que a mola não deformada deve ter para que ela não seja deformada mais do que 0,2 pé depois de o bloco colidir com ela. Despreze os atritos, as massas da placa e da mola e a perda de energia entre a placa e o bloco durante a colisão.



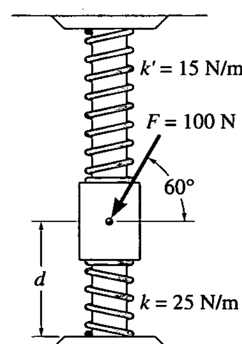

**Problema 14.37**

**14.38.** Os cilindros $A$ e $B$ têm massas de 3 kg e 8 kg, respectivamente. Determine a velocidade de $A$ após subir 2 m, partindo do repouso. Despreze a massa das cordas e das polias.



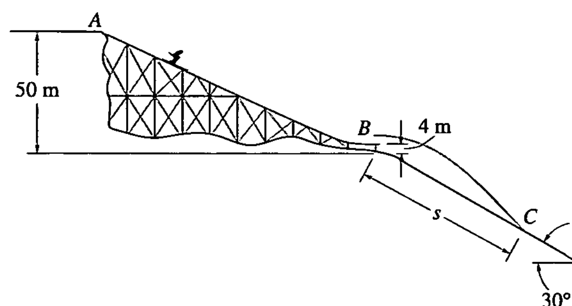

**Problema 14.38**

**14.39.** O cursor de 20 kg é suportado por uma barra vertical lisa. As molas estão não deformadas quando $d = 0,5$ m. Determine a velocidade do cursor após a força aplicada $F = 100$ N ter provocado um deslocamento tal que $d = 0,3$ m. Quando $d = 0,5$ m, o cursor está em repouso.




**Problema 14.39**

***14.40.** O esquiador parte do repouso em $A$ e desce pela rampa. Se o atrito com a rampa e com o ar for desprezado, determine a velocidade $v_B$ do esquiador quando ele alcança $B$. Determine também a posição $s$ do ponto $C$ onde o esquiador atinge o solo, sabendo que ele deixou a rampa com velocidade horizontal em $B$. O esquiador tem massa de 70 kg e suas dimensões podem ser desprezadas.




**Problema 14.40**

## 14.4 Potência e Rendimento



*O motor desta locomotiva produz a potência de saída necessária capaz de vencer a resistência de atrito dos vagões e elevar o peso nas subidas.*

***Potência.*** *Potência* é definida como a quantidade de trabalho realizado por unidade de tempo. Logo, a potência gerada por uma máquina ou motor que realiza um trabalho $dU$ num intervalo de tempo $dt$ é

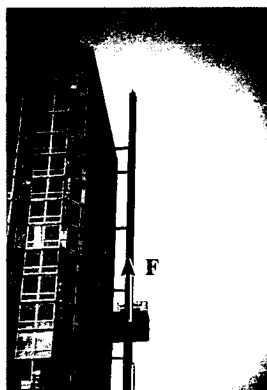
$$\boxed{P = \frac{dU}{dt}} \tag{14.9}$$

Considerando que o trabalho $dU$ se expressa como $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, também podemos escrever

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

ou

$$\boxed{P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} \tag{14.10}$$




*As exigências de potência deste elevador dependem da força vertical* **F** *que age no elevador para movê-lo para cima. Se a velocidade do elevador é* $v$*, então a potência de saída é* $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$.

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade com que o ponto de aplicação da força $\mathbf{F}$ se desloca. Observemos que a potência é uma grandeza *escalar*.

As unidades de potência nos sistemas SI e FPS são o watt (W) e o horsepower (hp), respectivamente. Essas unidades são definidas como

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s} = 1\ \text{N} \cdot \text{m/s}$$

$$1\ \text{hp} = 550\ \text{pés} \cdot \text{lb/s}$$

Neste livro adotaremos a seguinte relação para conversão das unidades: 1 hp = 746 W.

O termo 'potência' fornece uma base útil para a determinação do tipo de motor ou máquina que se exige para a realização de um certo trabalho num determinado tempo. Por exemplo, duas bombas podem ser capazes de esvaziar um reservatório se for considerado um tempo suficiente; todavia, a bomba de maior potência completará a tarefa em um tempo menor.

***Rendimento.*** O *rendimento mecânico* de uma máquina é definido como a razão entre a potência útil de saída produzida pela máquina e a potência de entrada que lhe é fornecida. Assim:

$$\epsilon = \frac{\text{potência de saída}}{\text{potência de entrada}} \tag{14.11}$$

Se o fornecimento de energia à máquina ocorre durante o mesmo intervalo de tempo em que se dá a sua remoção, então o rendimento pode ser expresso em termos da razão entre a energia de saída e a de entrada; isto é:

$$\epsilon = \frac{\text{energia de saída}}{\text{energia de entrada}} \tag{14.12}$$

Como as máquinas consistem numa série de partes móveis, sempre haverá desenvolvimento de forças de atrito numa máquina, o que torna necessário o uso de energia ou potência extra para vencer as dissipações que se devem a essas forças. Conseqüentemente, o *rendimento de uma máquina é sempre menor do que 1.*

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A potência suprida a um corpo pode ser calculada usando-se o seguinte procedimento.

- Primeiro determine a força externa **F** agente no corpo que provoca o movimento. Essa força geralmente é desenvolvida por uma máquina ou um motor colocado no interior do corpo ou fora dele.
- Se o corpo está se acelerando, pode ser necessário desenhar seu diagrama de corpo livre e aplicar a equação de movimento ($\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) para se determinar **F**.
- Determinadas a força **F** e a velocidade **v** do seu ponto de aplicação, a potência é calculada pelo produto escalar da força pela velocidade, isto é, pelo produto da intensidade da força pelo componente da velocidade na direção de **F** ($P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = F\,v\cos\theta$).
- Em alguns problemas a potência pode ser obtida calculando-se o trabalho realizado por **F**, por unidade de tempo ($P_{\text{méd}} = \Delta U/\Delta t$ ou $P = dU/dt$).

## EXEMPLO 14.7

O motor $M$ do guindaste mostrado na Figura 14.15$a$ opera com rendimento $\epsilon = 0{,}85$. Determine a potência que deve ser fornecida ao motor para que ele levante a caixa $C$ de 75 lb no instante em que o ponto $P$ no cabo tem aceleração de 4 pés/s$^2$ e velocidade de 2 pés/s. Despreze a massa das polias e do cabo.

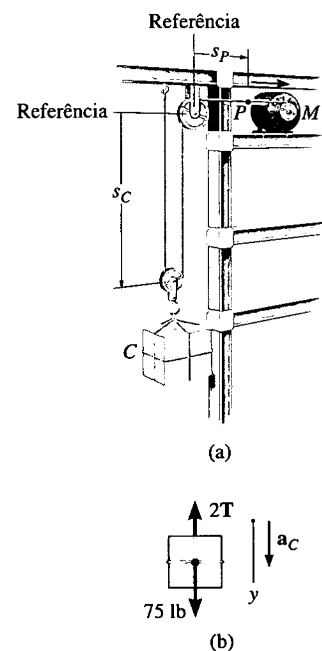


**Figura 14.15**

### SOLUÇÃO

Para calcular a potência de saída do motor, é necessário primeiro determinar a tensão no cabo, pois essa força é desenvolvida pelo motor.

Do diagrama de corpo livre (Figura 14.15$b$), temos

$$+\downarrow \;\Sigma F_y = ma_y; \qquad -2T + 75\text{ lb} = \frac{75\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}a_c \tag{1}$$

A aceleração da caixa pode ser obtida usando-se a cinemática para relacioná-la com a aceleração conhecida do ponto $P$ (Figura 14.15$a$). Usando-se os métodos da Seção 12.9, as coordenadas $s_C$ e $s_P$ na Figura 14.15$a$ podem ser relacionadas com o comprimento $l$ constante da porção do cabo que se modifica nas direções vertical e horizontal. Temos $2s_C + s_P = l$. Derivando duas vezes essa equação, em relação ao tempo, obtemos

$$2a_C = -a_P \tag{2}$$

Uma vez que $a_P = +4$ pés/s², então $a_C = (-4 \text{ pés/s}^2)/2 = -2$ pés/s². O que o sinal negativo está indicando? Substituindo esse resultado na Equação 1 e *mantendo* o sinal negativo, pois a aceleração tanto na equação 1 como na 2 é considerada positiva no sentido descendente, temos

$$-2T + 75 \text{ lb} = \frac{75 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}(-2 \text{ pés/s}^2)$$

$$T = 39{,}8 \text{ lb}$$

A potência de saída (medida em hp) necessária para puxar o cabo à taxa de 2 pés/s é, portanto,

$$P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = (39{,}8 \text{ lb})(2 \text{ pés/s})[1 \text{ hp}/(550 \text{ pés} \cdot \text{lb/s})]$$
$$= 0{,}145 \text{ hp}$$

Essa *potência de saída* exige que seja fornecida ao motor uma potência (*potência de entrada*)

$$\text{potência de entrada} = \frac{1}{\epsilon}(\text{potência de saída})$$
$$= \frac{1}{0{,}85}(0{,}145 \text{ hp}) = 0{,}170 \text{ hp} \quad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Observemos que essa potência exigida é *instantânea*, pois a velocidade da caixa se modifica continuamente.

## EXEMPLO 14.8

O carro esporte mostrado na Figura 14.16*a* tem massa de 2 t e está trafegando a uma velocidade de 25 m/s, quando a motorista aplica os freios às quatro rodas. Determine a potência desenvolvida pelo atrito quando o carro desliza. Calcule também a velocidade do carro ao fim de 10 m de escorregamento. O coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}35$.

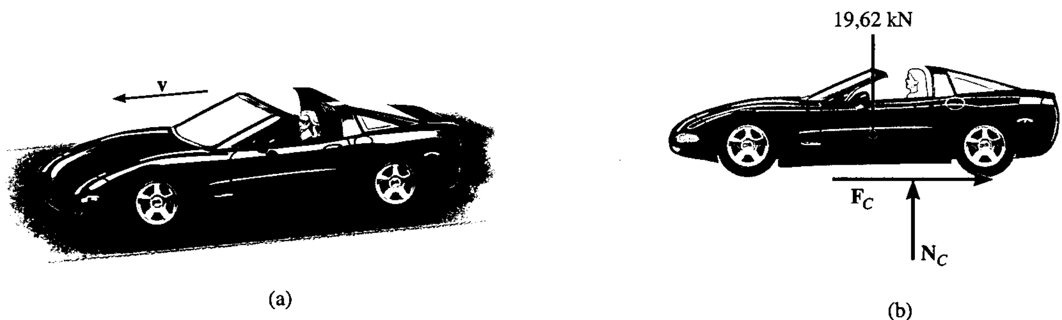



**Figura 14.16**

## SOLUÇÃO

Como mostrado no diagrama de corpo livre (Figura 14.16*b*), a força normal $\mathbf{N}_C$ e a força de atrito $\mathbf{F}_C$ representam as *forças resultantes* nas quatro rodas.

Aplicando a equação de equilíbrio na direção vertical *y*, podemos determinar $N_C$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_C = 19{,}62 \text{ kN}$

A força de atrito cinético é, portanto:

$$F_C = 0{,}35(19{,}62\text{ kN}) = 6{,}867\text{ kN}$$

Aplicando o princípio do trabalho e energia, podemos determinar a velocidade do carro para $s = 10$ m. Por quê?

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}(2.000\text{ kg})(25\text{ m/s})^2 - 6{,}867(10^3)\text{N}(10\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(2.000\text{ kg})v^2$$

$$v = 23{,}59\text{ m/s}$$

A potência da força de atrito no instante em que $s = 10$ m é, portanto:

$$P = |\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{v}| = 6{,}867(10^3)\text{N}(25\text{ m/s}) = 172\text{ kW}$$

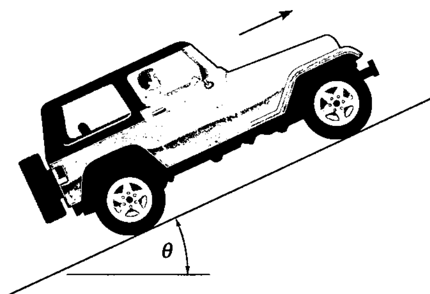
## PROBLEMAS

**14.41.** O motor a diesel de um trem de 400 t aumenta uniformemente a velocidade da composição, do repouso até 10 m/s, em 100 s ao longo de trilhos horizontais. Determine a potência média desenvolvida.

**14.42.** Determine a potência de entrada necessária para um motor elevar 300 lb a uma taxa constante de 5 pés/s. O rendimento do motor é $\epsilon = 0{,}65$.

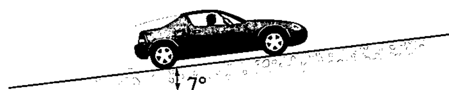
**14.43.** Um bonde elétrico de 15.000 lb, partindo do repouso, acelera ao longo de uma rua horizontal e reta de modo que a potência constante seja de 100 hp. Determine quanto tempo o bonde leva para alcançar uma velocidade de 40 pés/s.

***14.44.** O jipe de 2.500 lb tem um motor que transmite uma potência de 100 hp às suas *quatro* rodas. Supondo que as rodas não escorregam no solo, determine o valor máximo do ângulo $\theta$ para o qual o veículo sobe a uma velocidade constante $v = 30$ pés/s.




**Problema 14.44**

**14.45.** Um automóvel de 2 t sobe uma rampa de 7° mantendo uma velocidade constante $v = 100$ km/h. Se as resistências de atrito mecânico e do ar são desprezíveis, determine a potência desenvolvida pelo motor se o rendimento for $\epsilon = 0{,}65$.



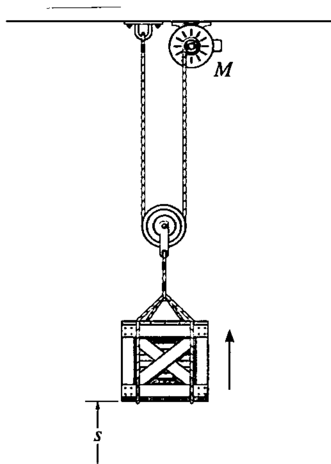

**Problema 14.45**

**14.46.** Um caminhão carregado pesando $16(10^3)$ lb acelera uniformemente num trecho horizontal de uma estrada, indo de 15 pés/s para 30 pés/s em 4 s. Se a resistência do atrito for de 325 lb, determine a potência máxima que deve ser entregue às rodas.

**14.47.** Um bonde elétrico de 15.000 lb, partindo do repouso, acelera ao longo de uma rua retilínea. A aceleração se dá com o desenvolvimento de uma potência constante de 100 hp. Determine a distância que ele deve percorrer para alcançar a velocidade de 40 pés/s.

***14.48.** Os degraus de uma escada rolante movem-se com velocidade de 0,6 m/s. Se os degraus têm 125 mm de altura e 250 mm de comprimento, determine a potência que um motor deve ter para elevar uma massa média de 150 kg por degrau. Há 32 degraus.

**14.49.** Ao engradado de 50 lb que parte do repouso dá-se uma velocidade de 10 pés/s em $t = 4$ s. Se a aceleração é constante, determine a potência que deve ser fornecida ao motor quando $t = 2$ s. O motor tem rendimento $\epsilon = 0{,}76$. Despreze a massa da polia e a do cabo.



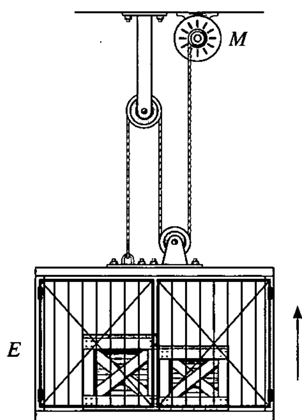

**Problema 14.49**

**14.50.** Um carro de massa $m$ parte do repouso e acelera ao longo de uma estrada reta. A potência $P$ permanece constante. Determine a distância que o carro deve percorrer até alcançar uma velocidade $v$.

**14.51.** Para ter uma idéia de quanto se perde de energia num automóvel, considere um carro de 5.000 lb trafegando a 35 mi/h. Se o carro é levado ao repouso, determine quanto tempo uma lâmpada de 100 W deve permanecer acesa para despender a mesma energia (1 mi = 5.280 pés).

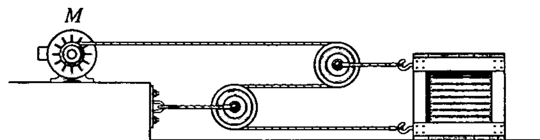
***14.52.** O motor $M$ é usado para erguer o elevador com velocidade constante $v_E = 8$ m/s. Se o motor exige 60 kW de potência elétrica, determine o seu rendimento. Despreze a massa das polias e do cabo.

**14.53.** O elevador de 500 kg parte do repouso e sobe com aceleração constante $a_c = 2$ m/s$^2$. Determine a potência de saída do motor $M$ quando $t = 3$ s. Despreze a massa das polias e do cabo.



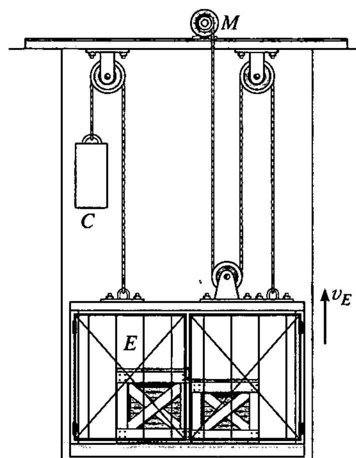

**Problemas 14.52/53**

**14.54.** O engradado de 150 kg apóia-se numa superfície para a qual os coeficientes de atrito estático e cinético são $\mu_e$ = 0,3 e $\mu_c$ = 0,2, respectivamente. O motor $M$ é responsável por uma tensão no cabo $F = (8t^2 + 20)$ N, onde $t$ é dado em segundos. Determine a potência de saída desenvolvida pelo motor quando $t = 5$ s.



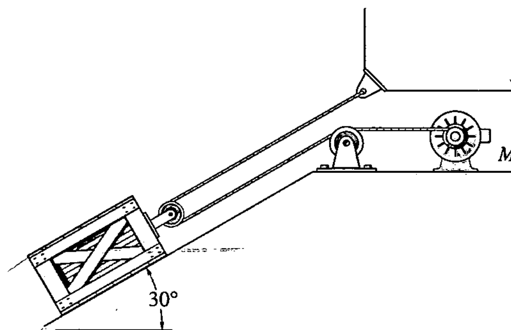

**Problema 14.54**

**14.55.** O elevador $E$ e sua carga têm massa de 400 kg. Para a sua movimentação empregam-se o motor $M$ e o bloco $C$ de 60 kg. Se o rendimento do motor é $\epsilon$ = 0,6, determine a potência fornecida ao motor quando o elevador sobe com velocidade constante $v_E$ = 4 m/s.




**Problema 14.55**

***14.56.** O engradado de 50 kg é puxado para cima numa rampa de 30°, por meio de um sistema de polias e de um motor $M$. O engradado parte do repouso e, com aceleração constante, atinge uma velocidade de 4 m/s após um deslocamento de 8 m ao longo do plano. Determine a potência que deve ser fornecida ao motor no instante em que essa velocidade é atingida. Despreze o atrito ao longo do plano e considere que o motor tem rendimento $\epsilon$ = 0,74.




**Problema 14.56**

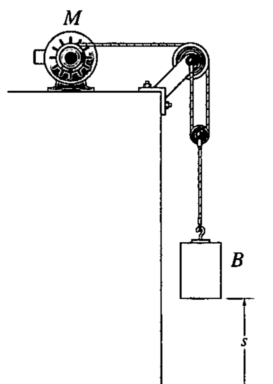
**14.57.** O carro esporte de 2,3 t está trafegando a 28 m/s quando o motorista impõe uma aceleração de 5 m/s$^2$. Se a força de arrasto do ar é $F_D = (0{,}3v^2)$ N, onde $v$ é a velocidade em m/s, determine a potência fornecida ao motor no instante da imposição da aceleração. O rendimento do motor é $\epsilon = 0{,}68$.

**14.58.** O carro esporte de 2,3 t acelera a 6 m/s$^2$, partindo do repouso. Se a força de arrasto sobre o veículo é $F_D = (10v)$ N, onde $v$ é a velocidade em m/s, calcule a potência fornecida ao motor quando $t = 5$ s. O motor tem rendimento $\epsilon = 0{,}68$.



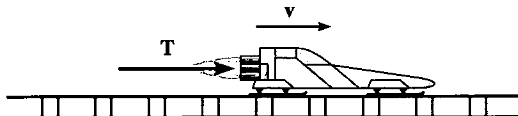

**Problemas 14.57/58**

**14.59.** A carga de 50 lb é içada por meio de um sistema formado pelas polias e pelo motor $M$. Se o motor exerce uma força constante de 30 lb sobre o cabo, determine a potência que deve ser fornecida ao motor se a carga, partindo do repouso, é elevada até $s = 10$ pés. O rendimento do motor é $\epsilon = 0{,}76$.



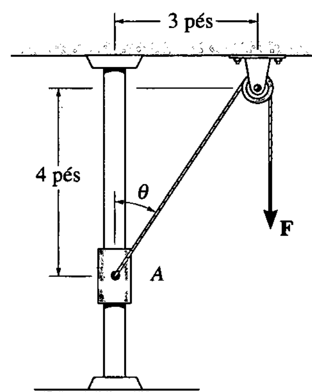

**Problema 14.59**

***14.60.** O veículo de 4 t com foguete propulsor desloca-se, a partir do repouso, sobre trilhos horizontais para os quais o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}20$. Se o motor fornece empuxo constante $T = 150$ kN, calcule a potência de saída do motor em função do tempo. Despreze a perda de massa de combustível e a resistência do ar.




**Problema 14.60**

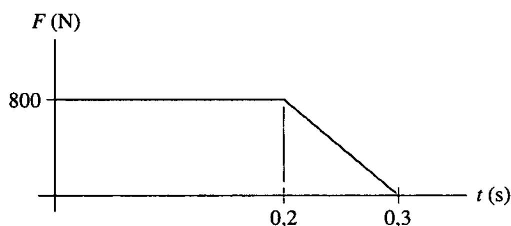
**14.61.** O colar de 10 lb parte do repouso em $A$ e é erguido graças à aplicação da força constante de intensidade $F = 25$ lb. Se a barra suporte é lisa, determine a potência desenvolvida pela força no instante em que $\theta = 60°$.

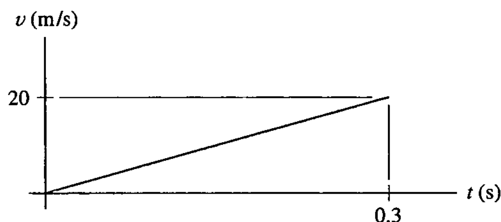



**Problema 14.61**

**14.62.** Um atleta exerce uma força contra um aparelho de ginástica cuja intensidade varia no tempo como mostra o primeiro gráfico. O segundo gráfico mostra como varia no tempo a velocidade do braço do atleta agindo na mesma direção e sentido da força. Determine a potência aplicada, em função do tempo, assim como o trabalho realizado até o instante $t = 0{,}3$ s.

**14.63.** Usando os dados do problema anterior, determine a potência máxima desenvolvida durante o intervalo de tempo de 0,3 s.




**Problemas 14.62/63**

## 14.5 FORÇAS CONSERVATIVAS E ENERGIA POTENCIAL

***Força Conservativa.*** Quando o trabalho realizado por uma força sobre um ponto material que se move de um ponto a outro é *independente da trajetória* seguida pelo ponto material, diz-se que a *força é conservativa.* O peso de um ponto material e a força de uma mola elástica são dois exemplos de forças conservativas encontradas com freqüência na mecânica. O trabalho realizado pelo peso de um ponto material é *independente da trajetória*, pois depende apenas do *deslocamento vertical* do ponto. O trabalho realizado por uma mola *agente num ponto material* é *independente da trajetória*, pois depende apenas da deformação $s$ da mola.

Em contraste com uma força conservativa, consideremos a força de atrito exercida por uma superfície fixa sobre um objeto *em escorregamento* sobre ela. O trabalho da força de atrito *depende da trajetória* — quanto mais extensa a trajetória, maior é o trabalho. Conseqüentemente, *forças de atrito não são conservativas.* O trabalho é 'dissipado' na forma de 'calor'.

***Energia Potencial.*** Energia pode ser definida como a capacidade de se realizar trabalho. A energia proveniente do *movimento* de um ponto material é denominada *energia cinética.* A energia associada à *posição* de um ponto material, medida em relação a uma linha ou plano de referência fixo, é chamada de *energia potencial.* Assim, a *energia potencial* é uma medida da quantidade de trabalho realizado por uma força conservativa, quando ela move seu ponto de aplicação de uma dada posição até a referência. Em mecânica, são importantes as energias potenciais devidas à gravidade (peso) e a uma mola elástica.

***Energia Potencial Gravitacional.*** Se um ponto material se situa a uma distância $y$ *acima* de uma referência escolhida arbitrariamente, como mostrado na Figura 14.17, pode-se associar a ele* uma *energia potencial gravitacional*, $V_g$, uma vez que o seu peso $\mathbf{W}$ 'tem a capacidade' de realizar um trabalho positivo quando o ponto *retorna* à linha de referência. Analogamente, se o ponto material se situa a uma distância $y$ *abaixo* da linha de referência, $V_g$ é negativo, pois o peso realiza trabalho negativo quando o ponto retorna à referência. Na linha de referência $V_g = 0$.

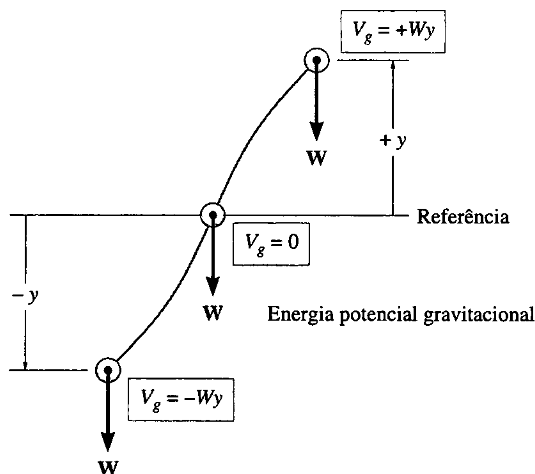



**Figura 14.17**

* Rigorosamente, a energia potencial gravitacional é associada ao sistema formado pelo ponto material e a Terra, com a qual ele interage (N. do T.).

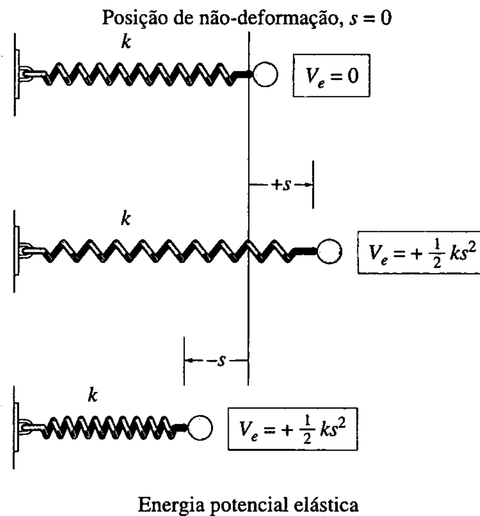
Em geral, se $y$ é *positivo para cima*, a energia potencial gravitacional do ponto material de peso $W$ é[3]

$$\boxed{V_g = Wy} \tag{14.13}$$

***Energia Potencial Elástica.*** Quando uma mola elástica sofre uma deformação $s$ (alongamento ou compressão relativa ao comprimento da mola não deformada), a energia potencial elástica $V_g$ associada a essa deformação pode ser expressa como

$$\boxed{V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2} \tag{14.14}$$

Nesse caso, $V_g$ é *sempre positivo*, pois, na configuração de mola deformada, a força elástica tem a *capacidade* de sempre realizar trabalho positivo sobre o ponto material quando a mola retorna ao seu estado de mola não deformada, isto é, não deformada (Figura 14.18).




Energia potencial elástica

**Figura 14.18**

***Função Potencial.*** No caso geral, se o ponto material está submetido simultaneamente a forças gravitacionais e elásticas, a energia potencial do ponto pode ser expressa como uma *função potencial*, que é a soma algébrica

$$\boxed{V = V_g + V_e} \tag{14.15}$$

A medida de $V$ depende da localização do ponto material em relação às referências escolhidas de acordo com as equações 14.13 e 14.14.

Se o ponto material se situa num ponto $(x, y, z)$ do espaço, a função potencial é $V = V(x, y, z)$. O trabalho realizado por uma força conservativa que desloca seu ponto de aplicação da posição $(x_1, y_1, z_1)$ à posição $(x_2, y_2, z_2)$ é medido pela diferença da função potencial; isto é:

$$U_{1\text{-}2} = V_1 - V_2 \tag{14.16}$$

[3] Nesse caso, supõe-se que o peso é *constante*. Essa hipótese é adequada para pequenas diferenças de cota $\Delta y$. Se a mudança de altura é significativa, a variação do peso com a posição tem de ser levada em conta.

Por exemplo, a função potencial para um ponto material de peso $W$ suspenso por uma mola pode ser expressa em termos de sua posição, $s$, medida em relação a uma referência situada na posição correspondente à mola não deformada (Figura 14.19). Temos

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Ws + \tfrac{1}{2}ks^2 \end{aligned}$$

Se o ponto se move de $s_1$ a uma posição inferior $s_2$, então segue da Equação 14.16 que o trabalho de $\mathbf{W}$ e $\mathbf{F}_s$ é

$$\begin{aligned} U_{1\text{-}2} = V_1 - V_2 &= (-Ws_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2) - (-Ws_2 + \tfrac{1}{2}ks_2^2) \\ &= W(s_2 - s_1) - (\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) \end{aligned}$$

Quando o deslocamento ao longo da trajetória é infinitesimal, isto é, de $(x, y, z)$ a $(x + dx, y + dy, z + dz)$, a Equação 14.16 se torna

$$\begin{aligned} dU &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= -dV(x, y, z) \end{aligned} \qquad (14.17)$$

Se a força e o deslocamento são expressos em coordenadas cartesianas, então o trabalho pode ser expresso como

$$\begin{aligned} dU &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

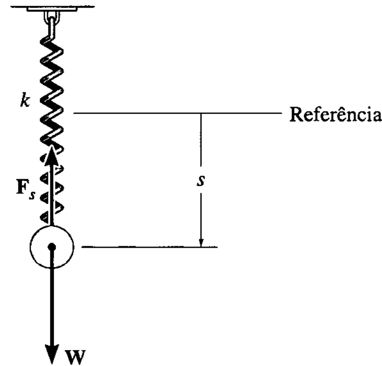



**Figura 14.19**

Substituindo esse resultado na Equação 14.17 e expressando a diferencial $dV(x, y, z)$ em termos de suas derivadas parciais, temos

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

Uma vez que mudanças em $x, y, z$ são todas independentes umas das outras, essa equação é satisfeita se

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (14.18)$$

Assim:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$
$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V$$

ou

$$\mathbf{F} = -\nabla V \tag{14.19}$$

onde $\nabla$ representa o operador vetorial $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$.

A Equação 14.19 relaciona a força **F** com a função potencial $V$ e, portanto, fornece um critério matemático para garantir que **F** seja conservativa. Por exemplo, a função potencial gravitacional para um peso situado a uma distância $y$ acima de uma referência é $V_g = W\,y$. Para provar que **W** é conservativo, é necessário mostrar que a Equação 14.19 (ou a Equação 14.18) é satisfeita, caso em que

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad F = -\frac{\partial}{\partial y}(Wy) = -W$$

O sinal negativo indica que **W** aponta para baixo, sendo, portanto, oposto ao sentido de $y$ positivo, que é para cima.

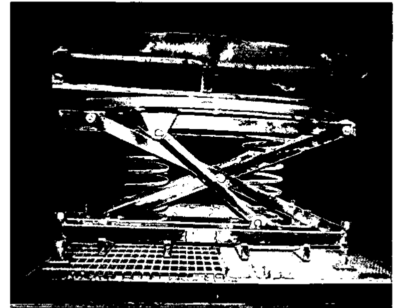
# 14.6 Conservação da Energia

Quando um ponto material é submetido *simultaneamente* a forças conservativas e não conservativas, a parcela do trabalho realizado pelas *forças conservativas* pode ser escrita em termos das diferenças das respectivas energias potenciais, usando-se a Equação 14.16, isto é, $(\Sigma U)_{\text{cons.}} = V_1 - V_2$. Como resultado, o princípio do trabalho e energia pode ser escrito como

$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1\text{-}2})_{\text{não cons.}} = T_2 + V_2 \tag{14.20}$$

Nessa equação, $(\Sigma U)_{\text{não cons.}}$ representa o trabalho das forças não conservativas agindo no ponto material. Se somente forças conservativas agem no ponto material, a Equação 14.20 se reduz a

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2} \tag{14.21}$$



*O peso dos sacos sobre a plataforma gera uma energia potencial armazenada nas molas de apoio. À medida que os sacos são removidos um a um, a plataforma sobe ligeiramente e alguma energia potencial armazenada nas molas é convertida em energia gravitacional dos sacos restantes. Esse dispositivo é útil para a remoção dos sacos sem que seja necessário virá-los ao serem descarregados.*

Essa equação expressa a *conservação da energia mecânica*, ou para simplificar, *conservação da energia*, ao estabelecer que durante o movimento a soma das energias cinética e potencial permanece *constante*. Para isso ocorrer, a energia cinética deve ser transformada em potencial, e vice-versa. Por exemplo, se deixamos cair uma bola de peso **W** de uma altura $h$ acima do solo (tomado como referência) como mostrado na Figura 14.20, a energia potencial da bola é máxima na posição inicial, quando, então, a energia cinética é nula. A energia mecânica, isto é, a soma das energias cinética e potencial, nessa posição inicial, é

$$E = T_1 + V_1 = 0 + Wh = Wh$$

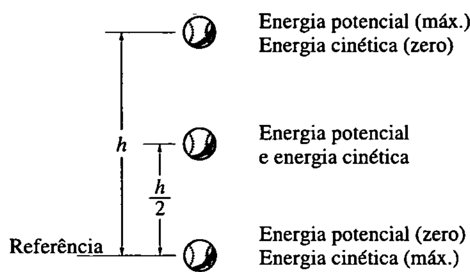



**Figura 14.20**

Quando a bola cai de uma distância $h/2$, sua velocidade pode ser determinada por $v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0)$, o que nos fornece $v = \sqrt{2g(h/2)} = \sqrt{gh}$. A energia da bola na posição de meia altura é, portanto:

$$E = T_2 + V_2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(\sqrt{gh})^2 + W\frac{h}{2} = Wh$$

No momento em que a bola atinge o solo, sua energia potencial é nula e sua velocidade é $v = \sqrt{2gh}$. Novamente, a energia mecânica da bola é

$$E = T_3 + V_3 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(\sqrt{2gh})^2 + 0 = Wh$$

Observemos que quando a bola começa a entrar em contato com o solo, ela começa a se deformar, e considerando que o solo seja bem duro, a bola finalmente é rebatida, alcançando uma nova altura $h'$, que será menor do que a altura inicial $h$. Desprezando o atrito com o ar, a diferença de alturas contabiliza a perda de energia ocorrida durante a colisão com o solo, $E_{perda} = W(h - h')$. Parcelas dessa energia correspondem ao ruído, às deformações localizadas da bola e do solo e ao 'calor'.

***Sistema de Pontos Materiais.*** Se um sistema de pontos materiais está *submetido apenas a forças conservativas*, então uma equação semelhante à Equação 14.21 pode ser escrita para o sistema. Aplicando as idéias da discussão precedente, a Equação 14.8 ($\Sigma T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = \Sigma T_2$) se torna

$$\boxed{\Sigma T_1 + \Sigma V_1 = \Sigma T_2 + \Sigma V_2} \qquad (14.22)$$

Nessa equação, a soma das energias cinéticas e potenciais iniciais do sistema é igual à soma das energias cinéticas e potenciais finais do sistema. Em símbolos, $\Sigma T_1 + \Sigma V_1 = \Sigma T_2 + \Sigma V_2 =$ constante.

É importante lembrar que somente problemas que envolvem forças conservativas (pesos e molas, por exemplo) podem ser resolvidos pelo teorema da conservação da energia. Conforme discutido anteriormente, forças de atrito ou forças de arrasto dependentes da velocidade ou aceleração são não conservativas. A parcela do trabalho realizado por essas forças é transformada em energia térmica e, conseqüentemente, essa energia se dissipa pelas vizinhanças e não pode ser recuperada.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Usa-se a equação da conservação da energia para se resolverem problemas que envolvem *velocidade, deslocamento* e *sistemas conservativos*. Geralmente sua aplicação é *mais fácil* do que a do princípio do trabalho e energia, porque a equação da energia exige apenas a especificação das energias cinética e potencial em apenas *dois pontos* da trajetória, em vez de se determinar o trabalho quando o ponto se desloca por toda a *trajetória* ligando os dois pontos. Para aplicações sugere-se o seguinte procedimento:

***Energia Potencial***

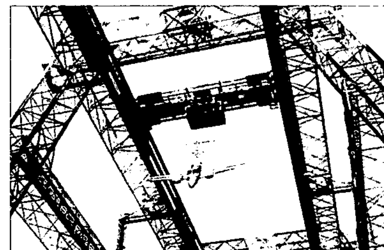
- Desenhe dois diagramas mostrando as posições inicial e final do ponto material em sua trajetória.
- Se o ponto material está sujeito a um deslocamento vertical, estabeleça uma linha de referência fixa horizontal para medir a energia potencial gravitacional $V_g$.
- Dados referentes à elevação $y$ do ponto material e a deformação $s$ de molas ligadas ao ponto podem ser determinados a partir da geometria associada aos dois diagramas.
- Lembre-se de que $V_g = Wy$, onde $y$ é positivo acima da linha de referência e negativo abaixo da linha. Lembre-se também de que $V_e = \frac{1}{2}KS^2$, que é sempre positivo.

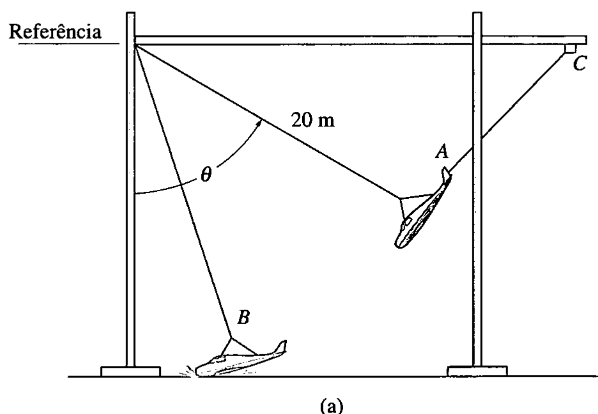
***Conservação da Energia***

- Aplique a equação $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.
- Ao se determinar a energia cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$, a velocidade $v$ do ponto material deve ser medida num referencial inercial.

## EXEMPLO 14.9

A estrutura de pórtico mostrada na foto é usada para testar a resposta de um avião durante um impacto. Como mostrado na Figura 14.21*a*, o avião de massa 8 t é suspenso até um ângulo $\theta = 60°$ e, estando ele em repouso, solta-se o cabo *AC*. Determine a velocidade do avião no instante imediatamente anterior ao impacto com o solo, $\theta = 15°$. Qual é o valor máximo da tensão no cabo durante o movimento do avião? Despreze o efeito de sustentação provocado pela asas durante o movimento e as dimensões do avião.



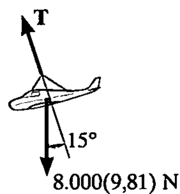


(a)

**Figura 14.21**

## SOLUÇÃO

Como a força do cabo *não realiza trabalho*, ela deve ser obtida pelo uso da equação de movimento. Todavia, primeiro devemos determinar a velocidade do avião em *B*.




(b)

**Figura 14.21**

***Energia Potencial.*** Por conveniência, a linha de referência é estabelecida no topo do pórtico.

***Conservação da Energia.***

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$0 - 8.000 \text{ kg } (9{,}81 \text{ m/s}^2)(20 \cos 60° \text{ m}) =$$

$$\tfrac{1}{2}(8.000 \text{ kg})v_B^2 - 8.000 \text{ kg } (9{,}81 \text{ m/s}^2)(20 \cos 15° \text{ m})$$

$$v_B = 13{,}5 \text{ m/s}$$ ***Resposta***

***Equação de Movimento.*** Usando os dados fornecidos no diagrama de corpo livre quando o avião está em $B$ (Figura 14.21$b$), temos:

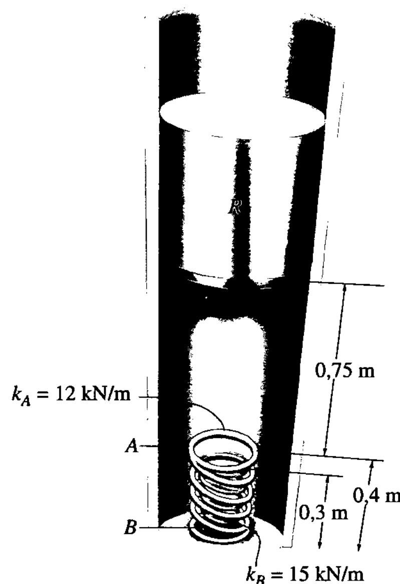
$$+\nwarrow \quad \Sigma F_n = ma_n;$$

$$T - 8.000\,(9{,}81)\text{N} \cos 15° = (8.000 \text{ kg})\frac{(13{,}5 \text{ m/s})^2}{20 \text{ m}}$$

$$T = 149 \text{ kN}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 14.10

O cilindro de bate-estaca $R$ de 100 kg mostrado na Figura 14.22$a$ é abandonado a partir do repouso a 0,75 m do topo de uma mola $A$ de rigidez $k_A = 12$ kN/m. Se uma segunda mola $B$ de rigidez $k_B = 15$ kN/m está no interior de $A$, determine a deformação máxima que $A$ deve ter para barrar o movimento para baixo do cilindro. Os comprimentos das molas não deformadas estão indicados na figura. Despreze a massa das molas.




(a)

**Figura 14.22**

## SOLUÇÃO

***Energia Potencial.*** *Vamos supor* que o cilindro comprime *ambas* as molas no instante em que a velocidade se anula (deformação máxima). Tomemos a linha de referência coincidente com a posição inicial do centro de massa do cilindro (Figura 14.22*b*). Quando a energia cinética se reduz a zero ($v_2 = 0$), $A$ está comprimida em uma distância $s_A$ e $B$, $s_B = s_A - 0{,}1$ m.

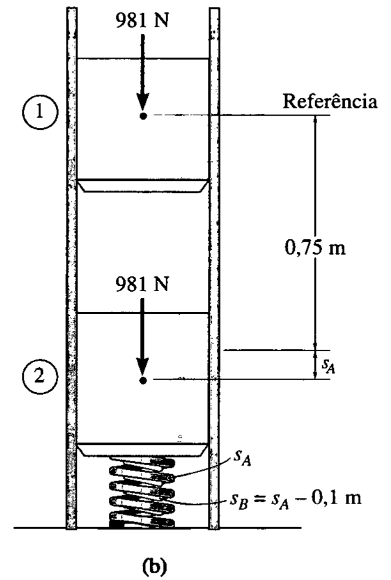



**Figura 14.22**

***Conservação da Energia.***

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 + \{\tfrac{1}{2}k_A s_A^2 + \tfrac{1}{2}k_B(s_A - 0{,}1)^2 - Wh\}$$

$$0 + 0 = 0 + \{\tfrac{1}{2}(12.000\ \text{N/m})s_A^2 + \tfrac{1}{2}(15.000\ \text{N/m})(s_A - 0{,}1\text{m})^2$$
$$- 981\ \text{N}(0{,}75\ \text{m} + s_A)\}$$

Rearranjando os termos,

$$13.500 s_A^2 - 2.481 s_A - 660{,}75 = 0$$

Resolvendo a equação e tomando-se a raiz positiva,[4] temos

$$s_A = 0{,}331\ \text{m}$$

Como $s_B = 0{,}331$ m $- 0{,}1$ m $= 0{,}231$ m, que é uma quantidade positiva, confirma-se a hipótese de que *ambas* as molas são comprimidas pelo cilindro.

## EXEMPLO 14.11

O colar $C$ de 2 kg, mostrado na Figura 14.23*a*, ajusta-se no eixo vertical. Se a mola encontra-se não deformada na posição $A$, determine a velocidade do colar para $y = 1$ m, considerando que (a) ele é abandonado a partir do repouso em $A$ e (b) é solto de $A$ com velocidade vertical $v_A = 2$ m/s.

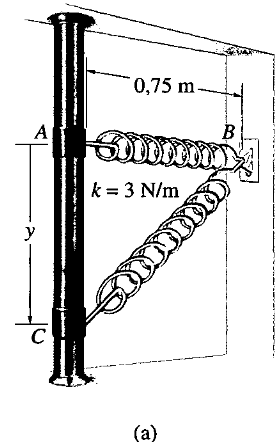



**Figura 14.23**

## SOLUÇÃO

### *Parte (a)*

***Energia Potencial.*** Por conveniência, tomemos a linha $AB$ como referência para a energia potencial gravitacional. Assim, a energia potencial gravitacional do colar em $C$ é $-(mg)y$, pois o colar está *abaixo* da linha de referência. Por sua vez, a energia potencial elástica para o colar em $C$ é $\frac{1}{2}ks_{CB}^2$, onde $s_{CB} = 0{,}5$ m, que representa a *deformação* (no caso, alongamento) da mola.

***Conservação da Energia.***

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$0 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \{\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\}$$

$$0 + 0 = \{\tfrac{1}{2}(2\ \text{kg})v_C^2\} + \{\tfrac{1}{2}(3\ \text{N/m})(0{,}5\ \text{m})^2 - 2(9{,}81)\ \text{N}(1\ \text{m})\}$$

$$v_C = 4{,}39\ \text{m/s}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

[4] A outra raiz, $s_A = -0{,}148$ m, não representa a situação física. Como $s$ positivo é medido para baixo, o sinal negativo indica que a mola estaria 'esticada' 0,148 m para anular a velocidade do cilindro.

Este problema também pode ser resolvido usando-se a equação de movimento ou o princípio do trabalho e energia. Observemos que, em *ambos* os casos, a variação do módulo e da direção da força da mola deve ser levada em conta (veja o Exemplo 13.4). Por outro lado, o uso da equação da conservação da energia mostra-se claramente vantajoso, pois os cálculos dependem *somente* dos valores nas posições inicial e final.

***Parte (b)***

***Conservação da Energia.*** Sendo $v_A = 2$ m/s e usando os valores indicados na Figura 14.23*b*, temos

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + \{\frac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\}$$

$$\frac{1}{2}(2\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \frac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2 + \{\frac{1}{2}(3\text{ N/m})(0{,}5\text{ m})^2 - 2(9{,}81)\text{ N}(1\text{ m})\}$$

$$v_C = 4{,}82\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resposta}$$

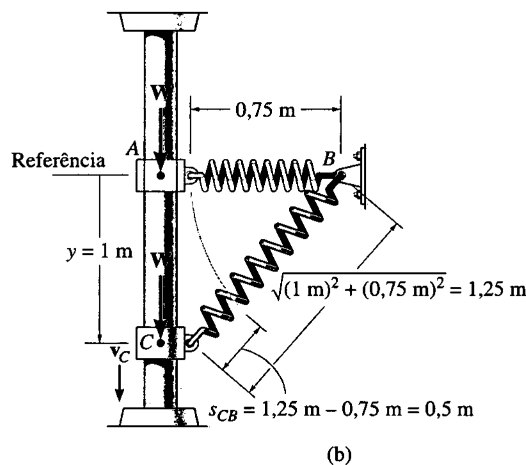



**Figura 14.23**

Observemos que a energia cinética do colar depende somente do *módulo* da velocidade, portanto é irrelevante se o colar se move a 2 m/s para cima ou para baixo quando solto de $A$.

## PROBLEMAS

***14.64.** Resolva o Problema 14.18 usando a equação da conservação da energia.

**14.65.** Resolva o Problema 14.15 usando a equação da conservação da energia.

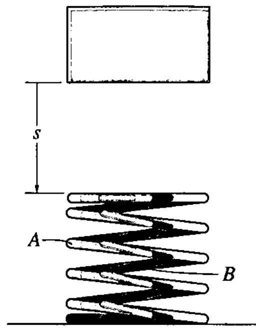
**14.66.** Resolva o Problema 14.17 usando a equação da conservação da energia.

**14.67.** Resolva o Problema 14.31 usando a equação da conservação da energia.

***14.68.** Resolva o Problema 14.36 usando a equação da conservação da energia.

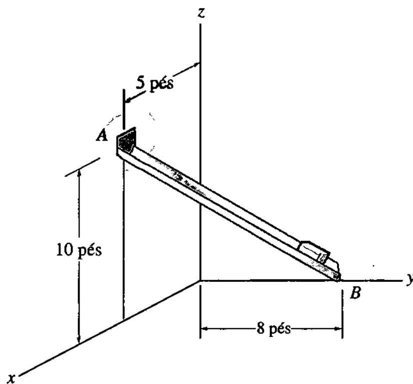
**14.69.** Resolva o Problema 14.23 usando a equação da conservação da energia.

**14.70.** Duas molas de mesmo comprimento são arranjadas de modo a constituírem um absorvedor de impacto, como mostrado na figura. O dispositivo deve ser projetado para deter um bloco de 2 kg que, solto a partir do repouso da posição $s = 0{,}5$ m acima do topo das molas, produz nelas uma compressão máxima de 0,2 m. Determine a rigidez da mola interna, $k_B$, considerando que a externa tem rigidez $k_A = 400$ N/m.



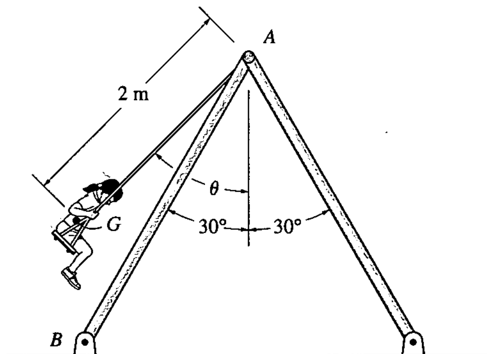

Problema 14.70

**14.71.** O bloco de 1,5 lb escorrega pela calha $AB$. Ele é solto a partir do repouso em $A$, que tem coordenadas (5 pés, 0, 10 pés). Determine a velocidade com que ele deixa a extremidade $B$, cujas coordenadas são (0, 8 pés, 0).




Problema 14.71

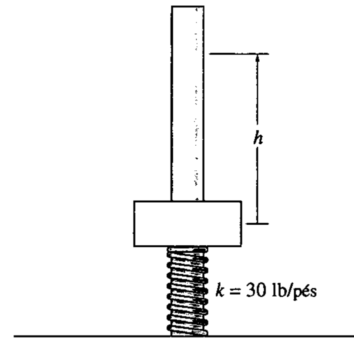
***14.72.** A menina tem massa de 40 kg e centro de massa $G$, como indicado na figura. Se o desvio máximo em seu movimento oscilatório é de $\theta = 60°$, determine a força desenvolvida ao longo de cada um dos quatro suportes, tal como o suporte $AB$, no instante em que $\theta = 0°$. O movimento é simétrico relativamente aos suportes.




Problema 14.72

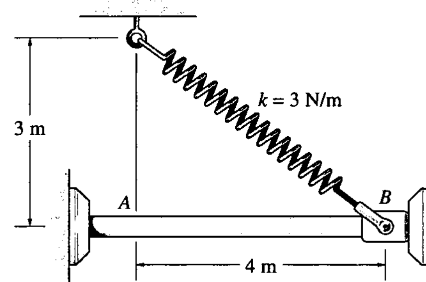
**14.73.** O cursor mostrado na figura pesa 8 lb. Ele é empurrado para baixo de modo a produzir na mola uma compressão de 2 pés e, então, é solto a partir do repouso ($h = 0$). Determine sua velocidade quando ele é deslocado $h = 4{,}5$ pés. A mola não está presa no cursor.

**14.74.** O cursor mostrado na figura pesa 8 lb. Ele é solto do repouso a uma altura $h = 2$ pés do topo de uma mola não comprimida. Determine a velocidade do cursor no instante em que ele está comprimindo a mola de 0,3 pé.




Problemas 14.73/74

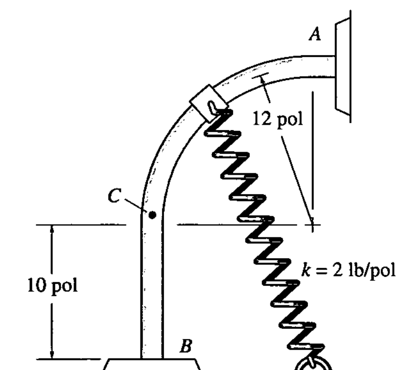
**14.75.** O colar de 2 kg está preso a uma mola de 3 m de comprimento (mola não deformada). Se o colar é puxado para o ponto $B$ e solto a partir do repouso, determine sua velocidade quando ele atinge o ponto $A$.




Problema 14.75

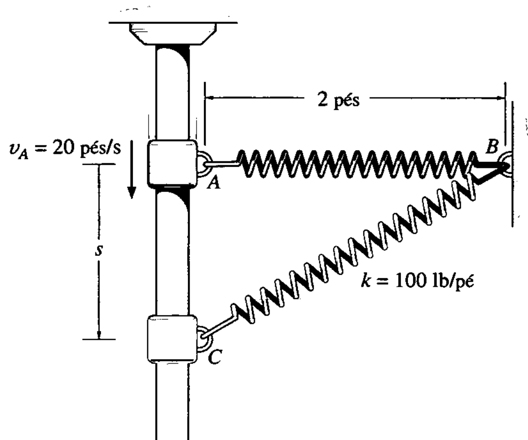
***14.76.** O colar de 5 lb, solto a partir do repouso em $A$, desloca-se ao longo do guia liso. Determine a velocidade do colar no momento em que ele atinge $B$. O comprimento da mola não deformada é 12 pol.

**14.77.** O colar de 5 lb, solto a partir do repouso em $A$, desloca-se ao longo do guia liso. Determine a velocidade do colar e a força normal que ele exerce na barra, no momento em que seu centro atinge o ponto $C$. O comprimento da mola não deformada é de 12 pol e o ponto $C$ situa-se exatamente no fim do trecho curvo da barra.




Problemas 14.76/77

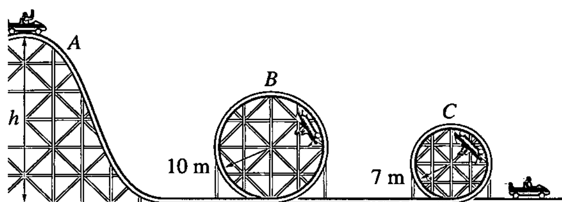
**14.78.** O bloco de 2 lb parte de $A$ com uma velocidade de 20 pés/s. Se o comprimento da mola não deformada é de 2 pés e a rigidez da mola é $k = 100$ lb, determine a velocidade do bloco quando $s = 1$ pé.




**Problema 14.78**

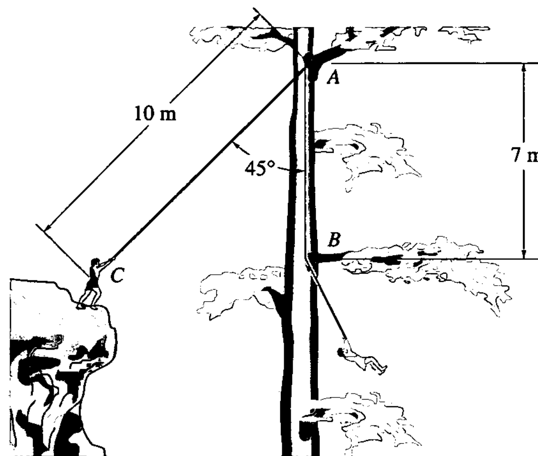
**14.79.** O carrinho, incluindo os passageiros, tem massa de 800 kg e parte do topo dos trilhos em $A$, com uma velocidade de 3 m/s. Determine o valor mínimo da altura $h$ que a 'crista da montanha' deve ter para que o carrinho percorra internamente as voltas, sem deixar os trilhos. Despreze os atritos, as massas das rodas e as dimensões do carrinho. Quanto vale a reação normal sobre o carrinho quando ele passa por $B$ e por $C$?

***14.80.** O mesmo carrinho do problema anterior é abandonado do repouso no topo $A$ da montanha-russa. Determine o valor mínimo da altura $h$ da 'crista da montanha' para que o carrinho percorra internamente as voltas, sem deixar os trilhos. Despreze os atritos, a massa das molas e o tamanho do carrinho. Quanto vale a reação normal sobre o carrinho quando ele passa por $B$ e por $C$?



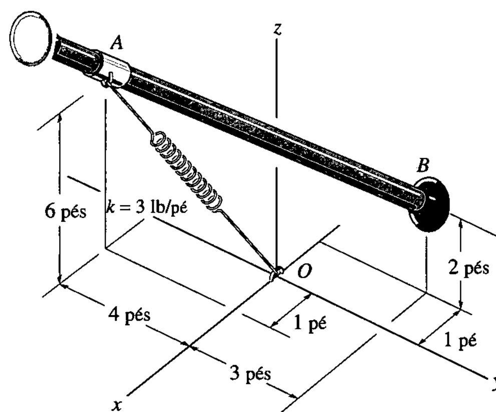

**Problemas 14.79/80**

**14.81.** Tarzan, com massa de 100 kg, parte do repouso na borda do penhasco segurando-se num cipó cujo comprimento somado à distância de suas mãos ao seu centro de massa $C$ resulta numa distância $CA$ de 10 m. Determine sua velocidade no exato momento em que o cipó atinge o galho em $B$. Que força Tarzan exerce no cipó imediatamente antes e imediatamente após o contato com o galho em $B$?



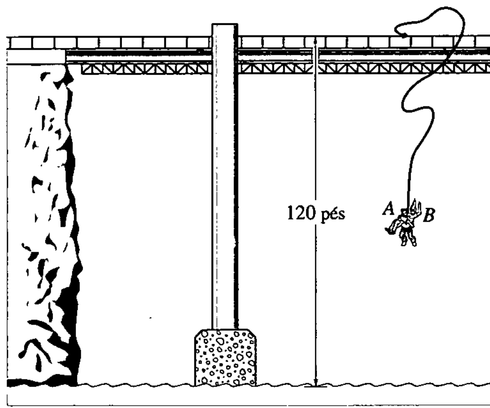

**Problema 14.81**

**14.82.** A mola tem rigidez $k = 3$ lb/pé e seu comprimento quando não deformada é de 2 pés. Se ela é ligada a um cursor liso, que é solto a partir do repouso em $A$, determine a velocidade do cursor exatamente quando ele atinge a extremidade $B$ da barra. Despreze o tamanho do cursor.



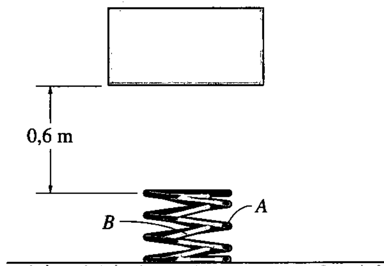

**Problema 14.82**

**14.83.** Por pura diversão, dois estudantes de engenharia de 150 lb, $A$ e $B$, usando uma corda elástica, pulam de uma ponte, com velocidade inicial nula. A corda tem rigidez $k = 80$ lb/pé. Determine o comprimento que a corda não deformada deve ter para que eles apenas toquem a superfície do rio. Quando eles atingem a superfície do rio, $A$, preso na corda, solta $B$. Calcule a altura máxima (a partir do nível da água) alcançada por $A$ na volta e a sua aceleração máxima. A partir dos seus resultados, faça um comentário sobre a exeqüibilidade dessa diversão.



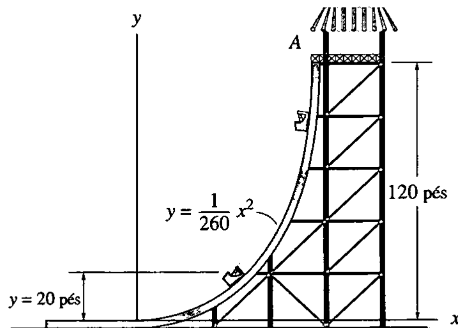

**Problema 14.83**

*14.84. Duas molas de mesmo comprimento e de valores de rigidez $k_A = 300$ N/m e $k_B = 200$ N/m são arranjadas de modo a formarem um absorvedor de impacto. Se um bloco de 2 kg é solto a partir do repouso numa posição 0,6 m acima do topo das molas, determine a deformação máxima produzida pelo bloco.



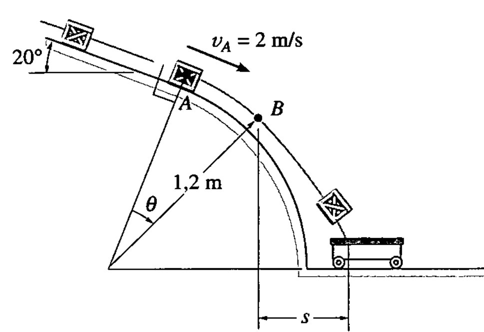

**Problema 14.84**

**14.85.** O brinquedo de um parque de diversões consiste numa gôndola que é elevada a uma posição $A$ a 120 pés de altura. Se a gôndola parte do repouso e segue pelo trilho parabólico, determine a velocidade no instante em que $y = 20$ pés, assim como a reação normal do trilho sobre a gôndola nesse instante. A gôndola e os passageiros têm peso total de 500 lb. Despreze o atrito e a massa das rodas.




**Problema 14.85**

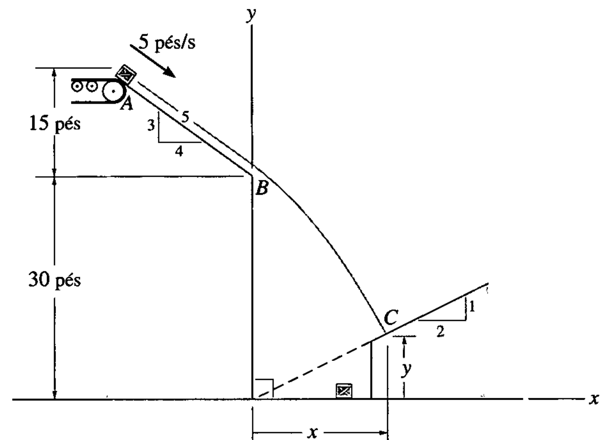
**14.86.** Quando a caixa de 6 kg chega ao ponto $A$, sua velocidade é de 2 m/s. Determine o ângulo $\theta$ para o qual ela deixa a rampa circular e a posição $s$ do ponto em que ela cai no carrinho. Despreze os atritos.




**Problema 14.86**

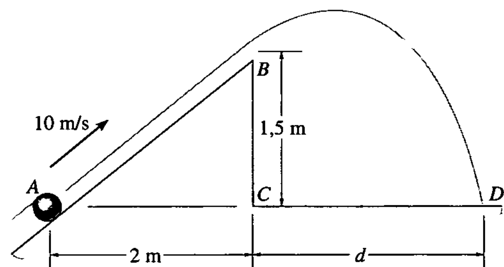
**14.87.** A caixa de 2 lb tem velocidade de 5 pés/s no ponto $A$, onde ela começa a escorregar pela superfície inclinada. Determine o ponto $C(x,y)$ onde ela atinge a rampa inferior.

*14.88. Agora determine a velocidade da caixa ao atingir $C$ e o tempo gasto no percurso $AC$. As coordenadas de $C$ são $x = 17{,}66$ pés e $y = 8{,}832$ pés.



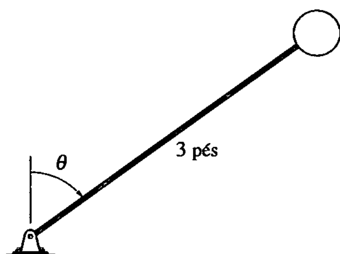

**Problemas 14.87/88**

**14.89.** A bola de 2 kg e de tamanho desprezível é arremessada de $A$ com velocidade inicial de 10 m/s, subindo pelo plano inclinado. Determine a distância do ponto $D$ até $C$. Qual é a velocidade da bola quando ela atinge a superfície horizontal?




**Problema 14.89**

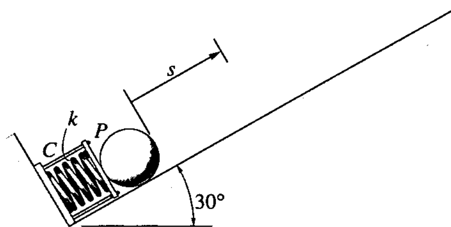
**14.90.** A bola pesa 15 lb e está fixada numa das extremidades da haste de massa desprezível. Se a bola é solta a partir do repouso na posição $\theta = 0°$, determine o ângulo $\theta$ para o qual a força compressiva na haste se torna zero.




Problema 14.90

**14.91.** A bola de 0,5 lb é disparada por meio de um dispositivo que contém uma mola comprimida. A mola tem rigidez $k = 10$ lb/pol e as quatro cordas $C$ e a placa $P$ mantêm a mola comprimida 2 pol, quando nenhuma carga é apoiada na placa. A placa é empurrada 3 pol de sua posição inicial e, a seguir, é solta a partir do repouso. Determine a velocidade da bola ao fim de um percurso de 30 pol sobre o plano liso.

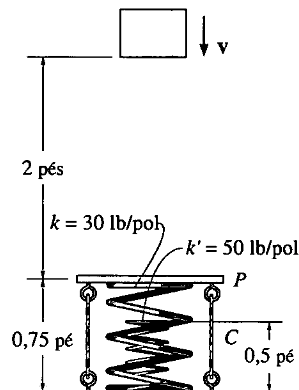
***14.92.** A bola de 0,5 lb é disparada por meio de um dispositivo que contém uma mola comprimida. Determine o menor valor da rigidez $k$ para se atirar a bola a uma distância máxima de 30 pol plano acima, após a mola ter sido empurrada 3 pol e a bola ser solta a partir do repouso. As quatro cordas $C$ e a placa $P$ mantêm a mola comprimida 2 pol quando nenhuma carga está sobre a placa.



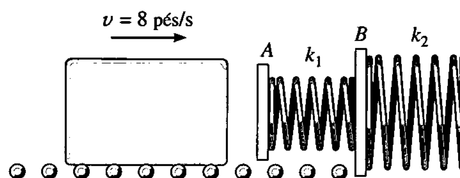

Problemas 14.91/92

**14.93.** Quatro cabos inelásticos $C$ ligados a uma placa $P$ mantêm uma mola (de 1 pé de comprimento) comprimida 0,25 pé, quando nenhum peso está sobre a placa. No interior da mola comprimida há uma mola não deformada. Se o bloco de 10 lb tem velocidade de queda de 4 pés/s quando está 2 pés acima da placa, determine a compressão máxima em cada mola após o bloco atingir a placa. Despreze a massa da placa e das molas e as perdas de energia durante a colisão.

**14.94.** Usa-se o pára-choque de mola dupla para deter um bloco sobre rolamentos. Calcule a deformação máxima da placa $A$, supondo que o bloco a atinge com velocidade de 8 pés/s. Despreze a massa das molas, dos rolamentos e das placas $A$ e $B$. Considere $k_1 = 3.000$ lb/pé e $k_2 = 4.500$ lb/pé.



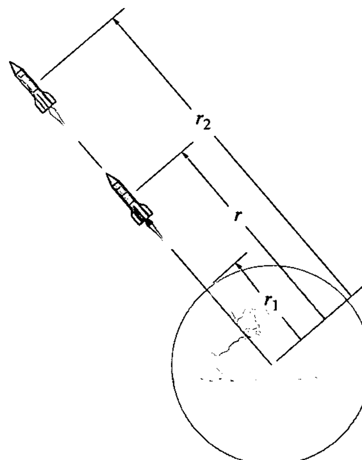

Problema 14.93




Problema 14.94

**14.95.** Se a massa da Terra é $M_e$, mostre que a energia potencial gravitacional de um corpo de massa $m$ situado a uma distância $r$ do centro da Terra é $V_g = -GM_em/r$. Lembre-se de que a força gravitacional no corpo que se deve à Terra é $F = G(M_em/r^2)$ (Equação 13.1). Em seu cálculo situe a referência em $r \rightarrow \infty$. Prove que a força é conservativa.

***14.96.** Da superfície da Terra (isto é de $r = r_1$), dispara-se verticalmente um foguete de massa $m$. Desprezando a perda de massa durante o seu movimento de subida, determine o trabalho que deve ser feito contra a gravidade para o foguete alcançar uma distância $r_2$. A força gravitacional é $F = G(M_em/r^2)$ (Equação 13.1), onde $M_e$ é a massa da Terra e $r$, a distância entre o foguete e o centro da Terra.




Problema 14.96

# ESTUDO DE PROJETOS

## 14.1P PROJETO DE UM PÁRA-CHOQUE DE CARRO

O corpo de um carro deve ser protegido por um pára-choque com molas, preso ao chassi do veículo. Desenvolva um projeto de pára-choque que possa deter um carro de 3.500 lb movendo-se livremente a 5 mi/h. A deformação das molas não deve ultrapassar 3 pol. Proponha um esboço do seu projeto indicando a localização das molas e o valor da rigidez delas. Desenhe um diagrama carga-deformação para o pára-choque durante uma colisão frontal com uma parede rígida. Desenhe também um gráfico da desaceleração do veículo em função da deformação das molas.

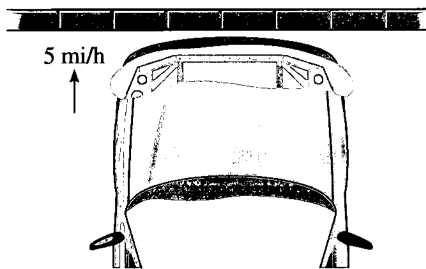



**Figura 14.1P**

## 14.2P PROJETO DE UM ELEVADOR

Deseja-se que um elevador e sua carga, que têm um peso máximo de 500 lb, sejam erguidos $y = 20$ pés, partindo do repouso, e parem após 6 s. Um motor e um tambor para enrolamento do cabo devem ser usados na operação. O valor da aceleração na subida ou descida não deve ultrapassar 10 pés/s$^2$. Projete um sistema de cabos e polias para o elevador e estime o custo do material se os preços são de US$ 1,30/pé para o cabo e de US$ 3,50 para cada polia. Proponha um esboço do seu projeto, incluindo gráficos da potência de saída e da velocidade do elevador *versus* a sua altura *y*.

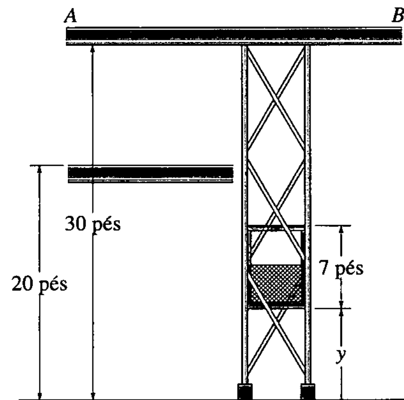



**Figura 14.2P**

### REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Trabalho de uma Força.*** Uma força realiza trabalho sempre que o deslocamento do seu ponto de aplicação tem um componente não-nulo na direção desta. Se a força varia com o deslocamento, então $U = \int F\,ds$. Graficamente, isso representa a área sob o diagrama $F-s$. Se a força é constante, para um deslocamento $\Delta s$ na direção da força, $U = F\,\Delta s$.

  Um exemplo típico desse caso é o trabalho do peso, $U = W\,\Delta y$.

  Aqui $\Delta y$ é o deslocamento vertical. A força de uma mola elástica, $F = ks$, depende da deformação $s$ da mola. O trabalho pode ser calculado por integração, resultando em $U = \frac{1}{2}ks^2$.

- ***Princípio do Trabalho e Energia.*** Se combinarmos a equação de movimento na direção tangencial, $\Sigma F_t = ma_t$, com a equação cinemática, $a_t\,ds = v\,dv$, obteremos o princípio do trabalho e energia.

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

  Nessa equação a energia cinética inicial do ponto material ($T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$) mais o trabalho ($\Sigma U_{1\text{-}2}$) realizado por todas as forças agentes no ponto material que se move da sua posição inicial até sua posição final é igual à energia cinética final ($T_1 = \frac{1}{2}mv_2^2$).

  O princípio do trabalho e energia é útil para resolver problemas que envolvem força, velocidade e deslocamento. Em aplicações, deve-se traçar o diagrama de corpo livre para identificar as forças que realizam trabalho.

## REVISÃO DO CAPÍTULO (CONTINUAÇÃO)

- ***Potência e Rendimento.*** Potência é a taxa temporal de realização de trabalho e é dada por $P = dU/dt$ ou $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Em aplicações, a força **F** que desenvolve a potência e a velocidade **v** devem ser especificadas. O rendimento representa a razão entre a potência de saída e a de entrada. Devido às perdas por atrito, o rendimento é sempre menor do que um.

- ***Conservação da Energia.*** Força conservativa é toda força cujo trabalho realizado independe do caminho ao longo do qual o seu ponto de aplicação se desloca. Dois exemplos são a força peso e força de uma mola elástica. A força de atrito é não conservativa, pois seu trabalho depende do caminho percorrido. Quanto maior for o caminho percorrido entre uma posição inicial e uma final, maior será o trabalho realizado. O trabalho realizado por uma força conservativa depende da sua posição relativamente a uma referência. Quando esse trabalho é computado a partir da referência, ele é denominado energia potencial. Para o peso a energia potencial é $V_g = W\,y$ e para a força de uma mola é $V_e = \frac{1}{2}kx^2$.

  A energia mecânica é a soma das energias cinética $T$ e potencial (por exemplo, energia potencial elástica e/ou gravitacional) $V$. Essa soma é constante, tendo, portanto, o mesmo valor em quaisquer duas posições na trajetória. Assim:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

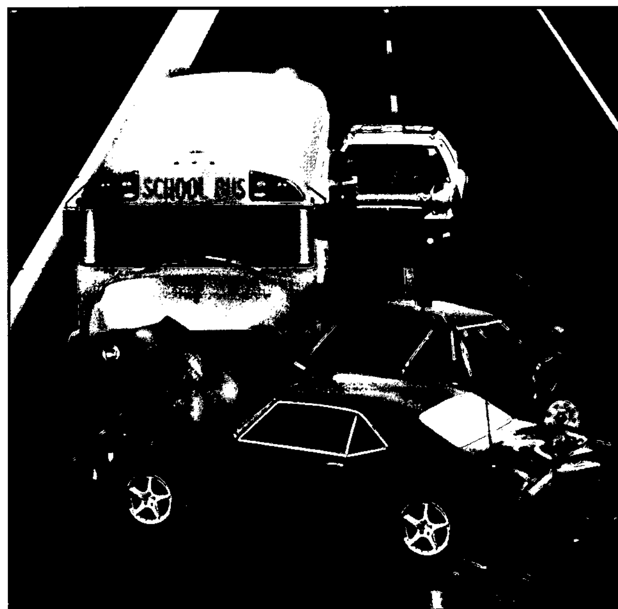
  Se o movimento do ponto material se deve apenas a forças gravitacionais e de molas elásticas, então a equação acima pode ser usada para resolver problemas que envolvem deslocamento e velocidade.




# Dinâmica de um Ponto Material: Impulso e Quantidade de Movimento

## Objetivos do Capítulo

- Desenvolver o princípio do impulso e quantidade de movimento.
- Estudar a conservação da quantidade de movimento para pontos materiais.
- Analisar a mecânica de colisões.
- Introduzir o conceito de impulso angular e momento angular.
- Resolver problemas que envolvem escoamento de fluidos em estado estacionário e propulsão com massa variável.




*As velocidades dos veículos envolvidos no acidente podem ser estimadas usando-se o princípio do impulso e quantidade de movimento.*

## 15.1 Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento

Nesta seção integraremos no tempo a equação de movimento, obtendo, assim, o princípio do impulso e quantidade de movimento. Mostraremos, então, a utilidade da equação resultante para a resolução de problemas que envolvem força, velocidade e tempo.

A equação de movimento para um ponto material de massa $m$ pode ser escrita como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{15.1}$$

onde a aceleração $\mathbf{a}$ e a velocidade $\mathbf{v}$ são medidas num referencial inercial. Rearranjando os termos e integrando entre os limites $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ em $t = t_1$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ em $t = t_2$, temos

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$



*Utiliza-se a ferramenta de impacto para desamassar o pára-lama do veículo. Para tal fim, sua extremidade é parafusada num orifício feito no pára-lama, e, então, o peso é puxado para cima, batendo no anel. Transfere-se o impulso desenvolvido ao longo do eixo da ferramenta, puxando subitamente a região amassada.*

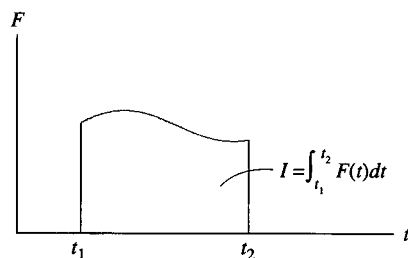
ou

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \tag{15.2}$$

Essa equação traduz o *princípio do impulso e quantidade de movimento.* Esse princípio, resultado da integração da equação de movimento, fornece um *meio direto* de se obter a velocidade final $\mathbf{v}_2$ do ponto material ao fim de um dado intervalo de tempo, quando se conhece a velocidade inicial do ponto, e as forças agindo nele são constantes ou podem ser expressas como funções do tempo. Por comparação, se desejássemos obter $\mathbf{v}_2$ usando a equação de movimento, seriam necessárias duas etapas: primeiro aplicar $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para obter $\mathbf{a}$ e, então, integrar $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.

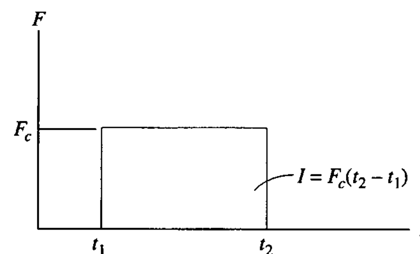
***Quantidade de Movimento.*** Cada um dos vetores da forma $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ na Equação 15.2 é denominado *quantidade de movimento* do ponto material. Como $m$ é um escalar positivo, o vetor quantidade de movimento tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v}$, e seu módulo $mv$ tem unidades de massa vezes velocidade, como por exemplo kg · m/s ou slug · pés/s.

***Impulso.*** A integral $\mathbf{I} = \int \mathbf{F}\,dt$ na Equação 15.2 é denominada *impulso.* Esse termo é uma quantidade vetorial que mede o efeito da força durante o intervalo de tempo de sua ação. Como o tempo é um escalar e a integração é efetuada entre um dado instante $t_1$ e outro posterior $t_2$, o impulso tem a mesma direção e sentido da força e seu módulo tem unidades de força vezes tempo, por exemplo, N · s ou lb · s.[1] Se a força é expressa como função do tempo, o impulso pode ser determinado por integração direta. Em particular, o módulo do impulso $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt$ pode ser representado pela área sombreada sob a curva da força *versus* tempo (Figura 15.1). Quando o vetor força é constante, o impulso se torna $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_c\,dt = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$, cujo módulo é dado pela área do retângulo mostrado na Figura 15.2.




Força variável

**Figura 15.1**




Força constante

**Figura 15.2**

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento.*** Para a resolução de problemas é conveniente reescrever a Equação 15.2 na forma

$$\boxed{m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2} \tag{15.3}$$

Segundo a Equação 15.3, a quantidade de movimento inicial do ponto no instante $t_1$ mais a soma de todos os impulsos aplicados de $t_1$ a $t_2$ é equivalente à quantidade de movimento final do ponto no instante $t_2$. Os três termos da equação estão ilustrados graficamente nos *diagramas de impulso e de quanti-*

[1] Embora as unidades de impulso e de quantidade de movimento sejam definidas diferentemente, pode-se mostrar que a Equação 15.2 é dimensionalmente homogênea.

*dade de movimento*, mostrados na Figura 15.3. Os dois *diagramas de quantidade de movimento* são simplesmente esquemas indicativos dos módulos, direções e sentidos das quantidades de movimento inicial e final do ponto material, $m\mathbf{v}_1$ e $m\mathbf{v}_2$, respectivamente (Figura 15.3). Analogamente ao diagrama de corpo livre, o *diagrama de impulso* é um esquema representativo do ponto material que mostra todos os impulsos que agem no ponto quando este está situado em alguma posição intermediária em sua trajetória. Em geral, toda vez que a força *varia* com o tempo, o impulso é representado no diagrama de impulso como $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt$. Se a força é *constante*, o impulso aplicado ao ponto material é $\mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$ e age na mesma direção e sentido da força $\mathbf{F}_c$.

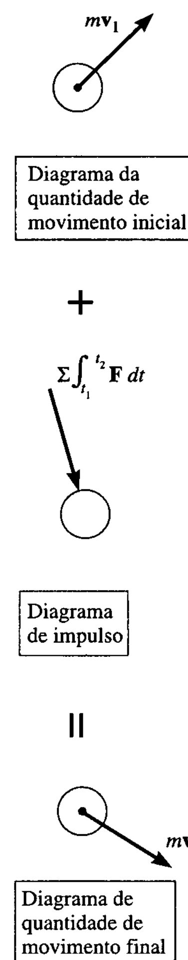
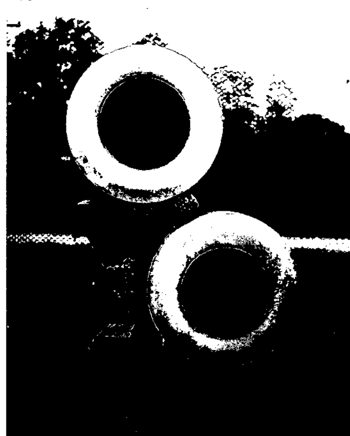


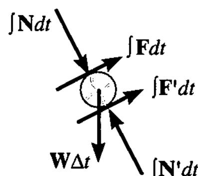

**Figura 15.3**

***Equações Escalares.*** Expressando cada um dos vetores na Equação 15.3 em termos de seus componentes cartesianos $x$, $y$, $z$, temos o seguinte sistema de equações escalares

$$m(v_x)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$
$$m(v_y)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_y)_2 \qquad (15.4)$$
$$m(v_z)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt = m(v_z)_2$$

Essas equações representam o princípio do impulso e quantidade de movimento para o ponto material nas direções $x$, $y$, $z$, respectivamente.






*À medida que as rodas do dispositivo lançador giram, impulsos de atrito são comunicados à bola, fornecendo-lhe quantidade de movimento. Esses impulsos estão no diagrama de impulso. Tanto o impulso da força de atrito quanto o da normal variam no tempo. Comparativamente, o impulso do peso, que é constante, é muito pequeno, pois o tempo* $\Delta t$ *de contato da bola com as rodas é muito pequeno.*

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Usa-se o princípio do impulso e quantidade de movimento para a resolução de problemas que envolvem *força*, *tempo* e *velocidade*, pois esses três termos estão envolvidos na formulação. Para as aplicações, sugere-se o seguinte procedimento.[2]

***Diagrama de Corpo Livre***

- Estabeleça o sistema de referência inercial $x, y, z$ e desenhe o diagrama de corpo livre levando em conta todas as forças que produzem impulsos no ponto material.
- A direção e o sentido das velocidades inicial e final do ponto material devem ser estabelecidos.

[2] Este procedimento será seguido nas demonstrações e na teoria desenvolvida no texto.

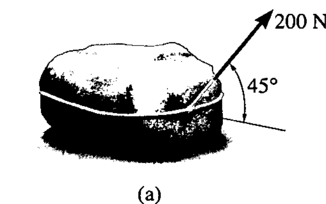
## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (CONTINUAÇÃO)

- Se um vetor é desconhecido, suponha que o sentido de seus componentes seja o sentido positivo dos eixos coordenados.
- Como um procedimento alternativo, desenhe os diagramas de impulso e quantidade de movimento conforme se discutiu relativamente à Figura 15.3.

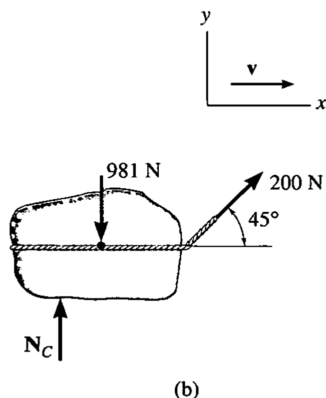
***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento***

- Aplique o princípio do impulso e quantidade de movimento, $m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$, de acordo com o sistema de coordenadas escolhido. Se o movimento ocorre no plano $x$–$y$, duas equações escalares podem ser formuladas decompondo cada força **F** no diagrama de corpo livre ou usando os dados dos diagramas de impulso e quantidade de movimento.
- Lembre-se de que cada força no diagrama de corpo livre cria um impulso, mesmo que algumas delas não realizem trabalho.
- Forças que são funções do tempo devem ser integradas para se obterem os respectivos impulsos. Graficamente, o impulso é igual à área sob a curva força contra tempo.
- Se o problema envolve o movimento dependente de vários pontos materiais, use o método desenvolvido na Seção 12.9 para relacionar suas velocidades. Certifique-se de que os sentidos positivos adotados ao se escreverem as equações cinemáticas são os *mesmos* usados para as equações de impulso e quantidade de movimento.

## EXEMPLO 15.1



(a)



(b)

**Figura 15.4**

A pedra de 100 kg mostrada na Figura 15.4*a* está inicialmente em repouso sobre a superfície horizontal lisa. Se uma força de tração de 200 N, a um ângulo de 45°, age por 10 s sobre a pedra, determine a velocidade final e a força normal que a superfície exerce na pedra durante o intervalo de tempo considerado.

### SOLUÇÃO

Este problema pode ser resolvido usando-se o princípio do impulso e quantidade de movimento, porque ele envolve força, tempo e velocidade.

***Diagrama de Corpo Livre.*** Observemos a Figura 15.4*b*. Como todas as forças aplicadas são *constantes*, os impulsos são simplesmente o produto das forças e os 10 s $[\mathbf{I} = \mathbf{F}_c\,(t_2 - t_1)]$. Consideremos o procedimento alternativo que utiliza os diagramas de impulso e quantidade de movimento (Figura 15.4*c*).

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento.*** Decompondo os vetores na Figura 15.4*b* nas direções $x$, $y$ e aplicando as equações 15.4, temos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_x)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$

$$0 + 200\text{ N}(10\text{ s})\cos 45° = (100\text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 14{,}1\text{ m/s}$$ ***Resposta***

$$(+\uparrow) \qquad m(v_y)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_y)_2$$

$$0 + N_C(10\text{ s}) - 981\text{ N}(10\text{ s}) + 200\text{ N}(10\text{ s})\text{ sen }45° = 0$$

$$N_C = 840\text{ N}$$ ***Resposta***

Uma vez que não há movimento na direção $y$, a aplicação direta da equação do equilíbrio $\Sigma F_y = 0$ nos fornece o mesmo resultado para $N_C$.

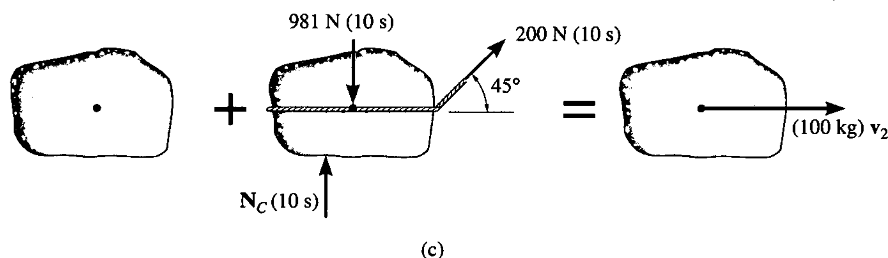



**Figura 15.4**

## EXEMPLO 15.2

Ao engradado de 50 lb mostrado na Figura 15.5*a* aplica-se uma força de intensidade variável $P = (20t)$ lb, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade do engradado 2 s após o início da aplicação de **P**. A velocidade inicial do engradado é $v_1 = 3$ pés/s, plano abaixo, e o coeficiente de atrito cinético entre o engradado e o plano é $\mu_c = 0{,}3$.

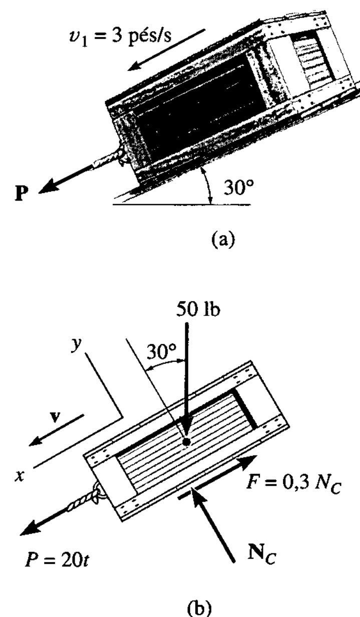



**Figura 15.5**

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Observemos a Figura 15.5*b*. Como a intensidade da força $P = 20t$ varia no tempo, o impulso tem de ser calculado por integração considerando o intervalo de 2 s. As forças peso, normal e de atrito são *constantes*, de modo que os respectivos impulsos são dados simplesmente pelos produtos das intensidades das forças e o intervalo de 2 s.

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento.*** Aplicando as equações 15.4 na direção $x$, temos

$$(+\swarrow) \qquad m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$

$$\frac{50\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}(3\text{ pés/s}) + \int_0^2 20t\,dt - 0{,}3N_C(2\text{ s}) + (50\text{ lb})(2\text{ s})\text{ sen }30° = \frac{50\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}v_2$$

$$4{,}66 + 40 - 0{,}6N_C + 50 = 1{,}55v_2$$

A equação para o equilíbrio pode ser aplicada na direção $y$. Por quê?

$$+\nwarrow\Sigma F_y = 0; \qquad N_C - 50\cos 30°\text{ lb} = 0$$

Resolvendo:

$$N_C = 43{,}3\text{ lb}$$
$$v_2 = 44{,}2\text{ pés/s} \swarrow$$

***Resposta***

*Observação:* Também podemos resolver o problema usando a equação de movimento. Da Figura 15.5*b*:

$$+\swarrow\Sigma F_x = ma_x; \qquad 20t - 0{,}3(43{,}3) + 50\text{ sen }30° = \frac{50}{32{,}2}a$$

$$a = 12{,}88t + 7{,}734$$

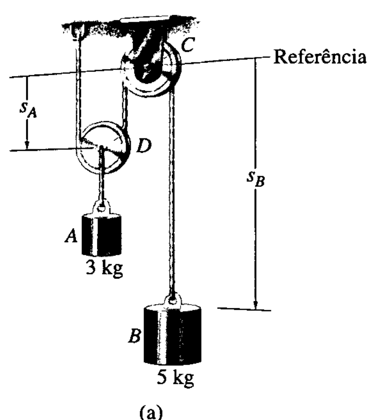
Usando a cinemática

$$+\swarrow dv = a\,dt; \qquad \int_3^v dv = \int_0^2 (12{,}88t + 7{,}734)\,dt$$

$$v = 44{,}2 \text{ pés/s}$$ ***Resposta***

Por comparação, aplicando o princípio do impulso e quantidade de movimento, elimina-se a necessidade do uso da cinemática ($a = dv/dt$), resultando num método de solução mais fácil.

## EXEMPLO 15.3



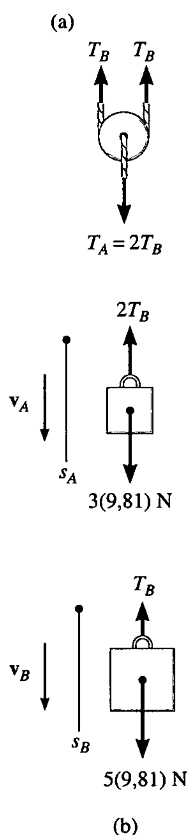




**Figura 15.6**

Os blocos $A$ e $B$ mostrados na Figura 15.6*a* têm massas de 3 kg e 5 kg, respectivamente. Se o sistema parte do repouso, determine a velocidade do bloco $B$ 6 s após o início do movimento. Despreze a massa das polias e dos cabos.

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Observemos a Figura 15.6*b*. Como o peso de cada bloco é constante, as tensões no cabo serão constantes. Mais ainda, visto que a massa da polia $D$ é desprezível, temos $T_A = 2T_B$. Supõe-se que os blocos estão descendo no sentido positivo dos eixos coordenados, $s_A$ e $s_B$.

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento.***

*Bloco A:*

$$(+\downarrow) \qquad m(v_A)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_A)_2$$

$$0 - 2T_B(6\text{ s}) + 3(9{,}81)\text{ N}(6\text{ s}) = (3\text{ kg})(v_A)_2 \tag{1}$$

*Bloco B:*

$$(+\downarrow) \qquad m(v_B)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_B)_2$$

$$0 + 5(9{,}81)\text{ N}(6\text{ s}) - T_B(6\text{ s}) = (5\text{ kg})(v_B)_2 \tag{2}$$

***Cinemática.*** Como os blocos têm movimento dependente, a velocidade de $A$ pode ser relacionada com a de $B$, usando-se a análise apresentada na Seção 12.9. Estabelecemos uma referência horizontal pelo ponto fixo $C$ (Figura 15.6*a*). As coordenadas de posição $s_A$ e $s_B$ estão relacionadas com o comprimento total constante $l$ dos trechos verticais do cabo pela equação

$$2s_A + s_B = l$$

Tomando a derivada temporal, temos

$$2v_A = -v_B \tag{3}$$

Como o sinal negativo indica, quando $B$ se move para baixo, $A$ se desloca para cima.[3] Substituindo esse resultado na Equação 1 e resolvendo as equações 1 e 2, temos

$$(v_B)_2 = 35{,}8\ \text{m/s} \downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$T_B = 19{,}2\ \text{N}$$

## 15.2 PRINCÍPIO DO IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO PARA UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS

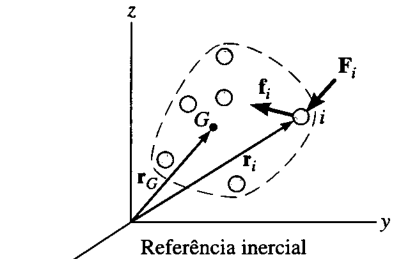



**Figura 15.7**

O princípio do impulso e quantidade de movimento para um sistema de pontos materiais que se movem relativamente a um referencial inercial (Figura 15.7) é obtido da equação de movimento aplicada a todos os pontos materiais do sistema, isto é,

$$\Sigma\mathbf{F}_i = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \tag{15.5}$$

O termo no primeiro membro representa somente a soma das *forças externas* agindo no sistema de pontos materiais. Lembremos que, pela terceira lei de Newton, as forças internas aparecem aos pares (ação e reação) que se anulam ao serem somadas. Multiplicando por $dt$ ambos os membros da Equação 15.5 e integrando entre os limites $t = t_1$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_1$ e $t = t_2$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_2$, temos

$$\boxed{\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2} \tag{15.6}$$

Essa equação estabelece que a quantidade de movimento inicial do sistema mais os impulsos de todas as *forças externas* de $t_1$ a $t_2$ é igual à quantidade de movimento final do sistema.

Como a localização do centro de massa $G$ do sistema é determinada por $m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i\mathbf{r}_i$, onde $m = \Sigma m_i$ é a massa total do sistema de pontos materiais (Figura 15.7), então a derivada temporal nos fornece

$$m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i\mathbf{v}_i$$

Essa equação estabelece que a quantidade de movimento total do sistema é equivalente à quantidade de movimento de um ponto material 'fictício' de massa igual à massa total $m$ do sistema, cuja posição em cada instante coincide com a do centro de massa $G$; logo, o ponto material se move com velocidade $\mathbf{v}_G$. Substituindo a equação anterior na Equação 15.6, temos

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \tag{15.7}$$

Podemos interpretar a Equação 15.7 como a equação do impulso e quantidade de movimento para um ponto de massa $m = \Sigma m_i$ coincidente com o centro de massa $G$ e submetido às mesmas forças externas aplicadas aos diver-

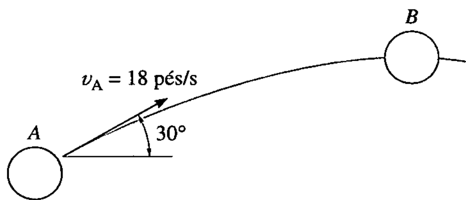
[3] Lembremos que o sentido *positivo* (para baixo) de $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ é *consistente* nas figuras 15.6*a* e 15.6*b*. Por que isso é importante?

sos pontos materiais do sistema, servindo, portanto, para se obter a velocidade final do centro de massa, conhecida sua velocidade inicial e o impulso total de forças externas no intervalo de tempo considerado.

# PROBLEMAS

**15.1.** Um bloco de 20 lb escorrega num plano com inclinação de 30°. Se a velocidade inicial é de 2 pés/s, determine a velocidade do bloco após 3 s de escorregamento. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_c$ = 0,25.

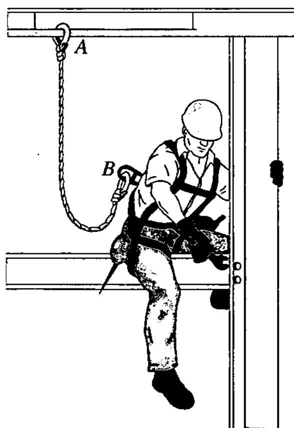
**15.2.** Arremessa-se uma bola com velocidade inicial $v_A$ = 18 pés/s, como mostrado na figura. Determine o tempo necessário para ela alcançar o ponto mais alto da sua trajetória, $B$, e a velocidade correspondente. Use o princípio do impulso e quantidade de movimento para resolver este problema.




**Problema 15.2**

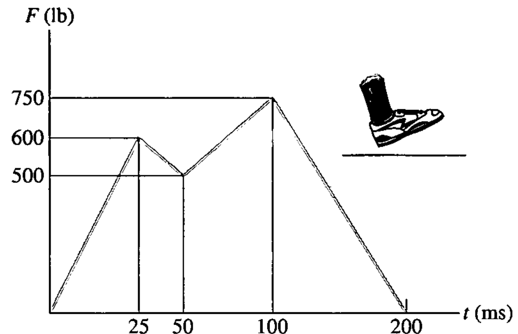
**15.3.** A um bloco de 5 lb apoiado num plano a 45° dá-se uma velocidade inicial de 10 pés/s para cima. Determine o tempo que o bloco leva para atingir a posição mais alta. Suponha que o plano seja liso.

***15.4.** Um trabalhador de 180 lb está preso por um sistema de segurança, como indica a figura. Se a corda $AB$ tem um comprimento de 4 pés, determine a tensão impulsiva média desenvolvida na corda na eventualidade de ocorrer uma queda do operário. Despreze o tamanho do operário e suponha uma duração de 0,6 s para o impulso.



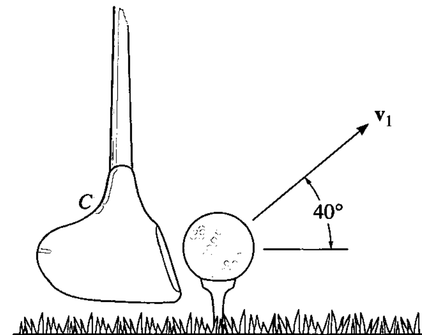

**Problema 15.4**

**15.5.** O gráfico mostra a força de reação vertical da interação tênis-solo, como função do tempo. O primeiro pico 'age' no calcanhar e o segundo na parte dianteira do pé. Determine o impulso total agindo no calçado durante a interação.



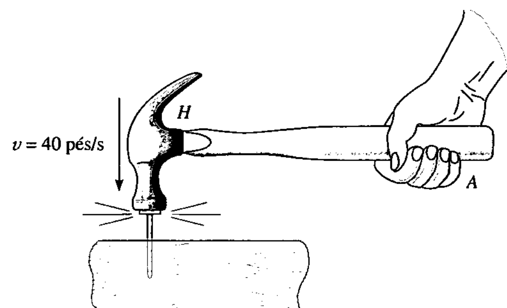

**Problema 15.5**

**15.6.** Um homem bate numa bola de golfe de 50 g, atirando-a a um ângulo de 40° em relação à horizontal. A bola retorna ao solo num ponto de mesma elevação e a 20 m de distância. Determine o impulso do taco sobre a bola. Despreze o impulso do peso da bola durante a ação do taco.



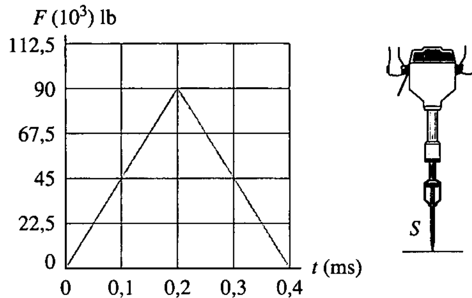

**Problema 15.6**

**15.7.** A cabeça $H$ de um martelo com peso de 0,25 lb está descendo verticalmente a 40° pés/s quando atinge um prego de massa desprezível. Obtenha o impulso sobre o prego, supondo que o cabo tem massa desprezível e está solto em $A$ durante a martelada. Suponha também que o martelo permaneça em contato com o prego até que este fique em repouso. Despreze o impulso provocado pelo peso da cabeça do martelo durante o contato.



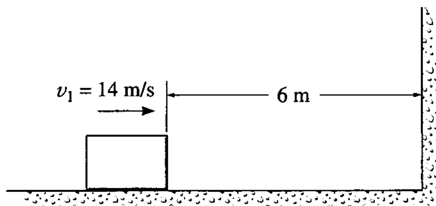

**Problema 15.7**

*15.8. Durante a operação a britadeira desenvolve na superfície de concreto uma força como se mostra na figura. Para se ter tal força a ponta $S$ de 2 lb é disparada a 200 pés/s contra a superfície. Determine a velocidade de recuo de $S$ no instante em que ocorre perda de contato com o concreto.



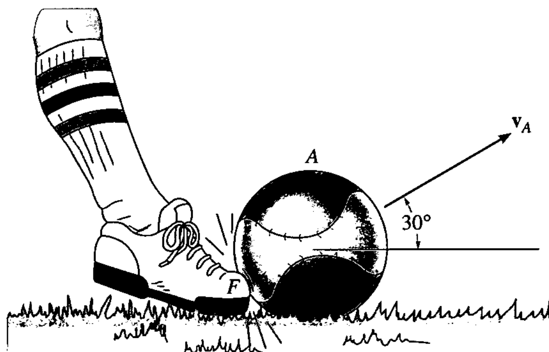

**Problema 15.8**

15.9. Quando o bloco de 5 kg está a 6 m da parede, sua velocidade é de 14 m/s. Se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso horizontal é $\mu_c = 0{,}3$, determine o impulso que a parede deve exercer sobre o bloco para detê-lo. Despreze o impulso do atrito durante a colisão.



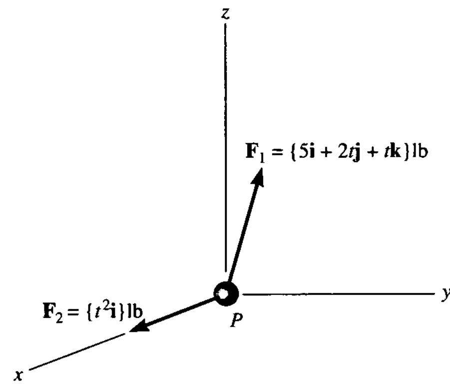

**Problema 15.9**

15.10. Um homem chuta uma bola fazendo-a partir do chão a 30° da horizontal. A bola retorna ao solo num ponto de mesma elevação e a 15 m de distância. Determine o impulso de seu pé sobre a bola. Despreze o impulso do peso da bola durante o chute.



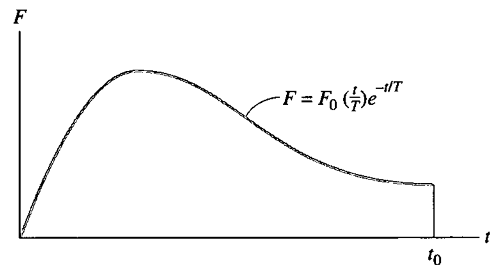

**Problema 15.10**

15.11. O ponto material $P$ está submetido ao seu peso de 3 lb e às forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ indicadas na figura, onde $t$ é dado em segundos. Se inicialmente o ponto material tem velocidade $\mathbf{v}_1 = \{3\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}$ pés/s, determine sua velocidade após 2 s de ação das forças.



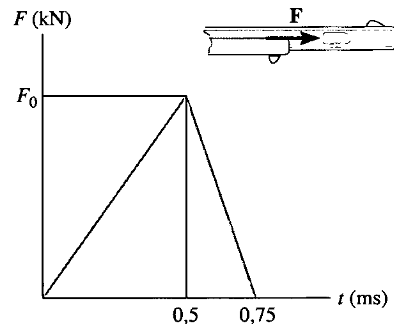

**Problema 15.11**

*15.12. A contração num músculo do braço desenvolve uma força que pode ser medida como uma função do tempo, como mostrado no gráfico. Se a contração efetiva do músculo ocorre num tempo $t_0$, determine o impulso desenvolvido pelo músculo.



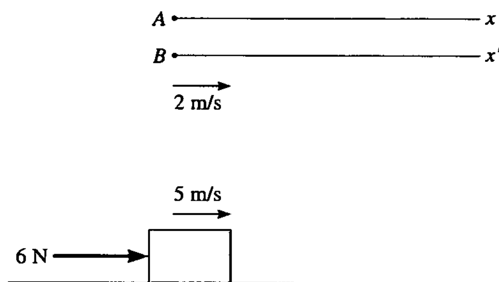

**Problema 15.12**

15.13. Supondo que a força que age num projétil de 2 g, quando ele percorre horizontalmente o cano de um rifle, varia com o tempo como se mostra na figura, determine a força líquida máxima $F_0$ aplicada à bala durante o disparo. A velocidade da bala ao sair do cano, em $t = 0{,}75$ ms, é de 500 m/s.



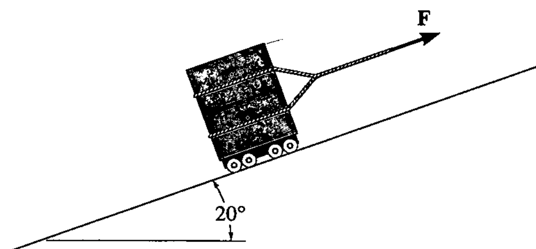

**Problema 15.13**

15.14. Como indicado na dedução, o princípio do impulso e quantidade de movimento é válido para observadores em *quaisquer* referenciais inerciais. Mostre que isso realmente ocorre, considerando o bloco de 10 kg que se apóia numa superfície horizontal lisa e está submetido a uma força horizontal de 6 N. Se o observador $A$ está fixo no referencial $x$, determine a velocidade final do bloco em 4 s, se ele tem uma velocidade inicial de 5 m/s, medida no referencial fixo. Compare o resultado com aquele obtido por um observador $B$, ligado ao referencial $x'$, que se move a uma velocidade constante de 2 m/s em relação a $A$.



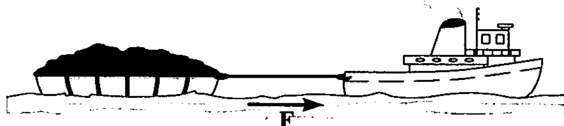

**Problema 15.14**

**15.15.** O armário de 4 lb está submetido à força $F = 12/(t + 1)2$ lb, onde $t$ é expresso em segundos e **F**, em lb. Se o armário está se movendo inicialmente para cima com uma velocidade de 10 pés/s, determine quanto tempo leva para ele parar. A força **F** se mantém sempre paralela ao plano. Despreze o tamanho das rodinhas.



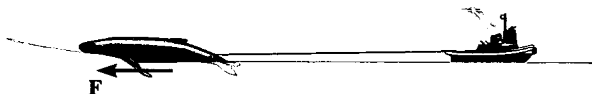

**Problema 15.15**

***15.16.** Se o rebocador de 50 t leva 35 s para aumentar uniformemente sua velocidade para 25 km/h, partindo do repouso, determine a força do cabo sobre o rebocador. A hélice fornece uma força de propulsão **F** ao rebocador, enquanto a barcaça se move livremente. A barcaça tem massa de 75 t.



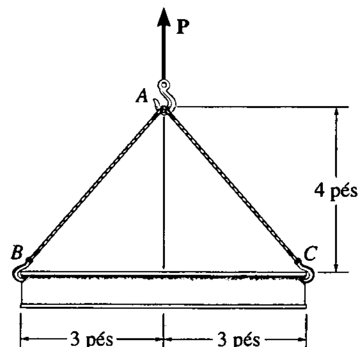

**Problema 15.16**

**15.17.** A baleia de 5,5 t encalhou na praia devido a mudanças na maré. Para salvar a baleia, um rebocador de 12 t é empregado para puxá-la de volta ao mar, usando um cabo inextensível. Para superar a força de atrito da areia sobre a baleia, deixa-se a corda frouxa e o rebocador se move com velocidade de 3 m/s. Se o motor do rebocador é desligado, determine a força de atrito média **F** sobre a baleia se o escorregamento ocorre por 1,5 s antes de o rebocador parar e depois de a corda se tornar tensa. Qual é a força média sobre a corda durante o reboque?




**Problema 15.17**

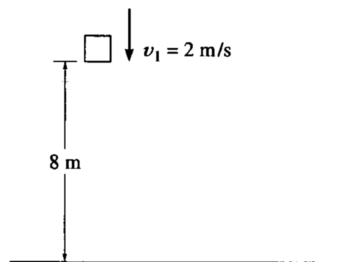
**15.18.** O vergalhão tem um peso de 5.000 lb. Determine a tensão média em cada um dos cabos $AB$ e $AC$ se o vergalhão adquire uma velocidade de 8 pés/s para cima, partindo do repouso. Despreze a massa dos cabos.




**Problema 15.18**

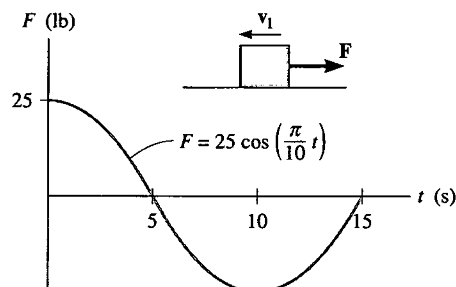
**15.19.** A velocidade do bloco de 5 kg quando está a 8 m da superfície da areia é de 2 m/s. Determine o impulso da areia sobre o bloco necessário para detê-lo. Despreze a distância de penetração do bloco na areia e suponha que ele não ricocheteia. Despreze também o impulso do peso do bloco durante a colisão.

***15.20.** A velocidade do bloco de 5 kg quando está a 8 m da superfície da areia é de 2 m/s. Determine a força impulsiva média exercida pela areia sobre o bloco, se o impacto tem uma duração de 0,9 s. Despreze a distância de penetração do bloco na areia e suponha que ele não ricocheteia. Despreze também o impulso do peso do bloco durante a colisão.



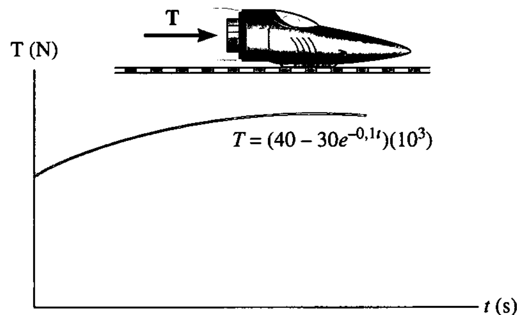

**Problemas 15.19/20**

**15.21.** Um bloco de 30 lb está se movendo para a esquerda sobre uma superfície horizontal lisa, com velocidade inicial de 6 pés/s. Se a força horizontal **F** que age no bloco varia no tempo como indicado no gráfico, calcule a velocidade do bloco ao fim de 15 s.



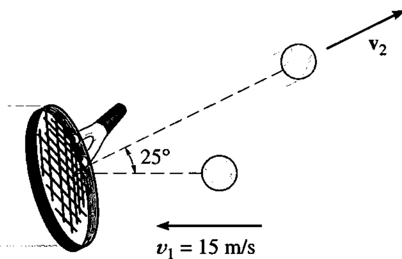

**Problema 15.21**

**15.22.** O trenó-foguete de 3 t parte do repouso no instante $t = 0$. Se os motores fornecem um empuxo $T$ que varia como mostrado na figura, determine a velocidade do veículo em $t = 4$ s. Despreze a resistência do ar, o atrito e a perda de massa durante o movimento.



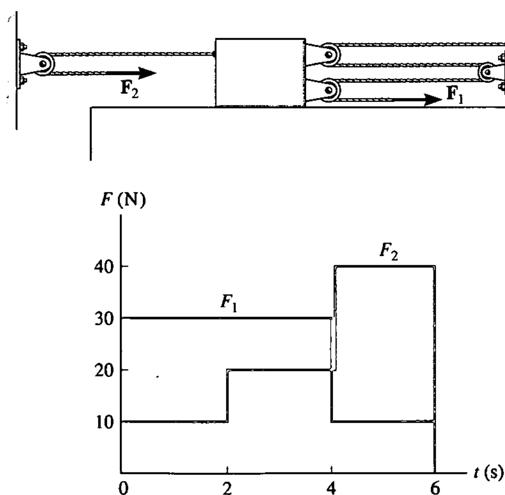

**Problema 15.22**

**15.23.** A bola de tênis tem velocidade de 15 m/s quando é atingida pela raquete. Se ela volta numa direção a 30° com a horizontal e atinge uma altura máxima de 10 m, medida acima da altura da raquete, determine o módulo do impulso líquido da raquete sobre a bola. A bola tem massa de 180 g. Despreze o peso da bola durante o tempo de contato com a raquete.



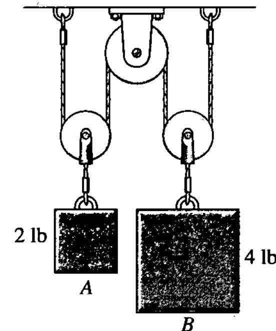

**Problema 15.23**

***15.24.** O bloco de 40 kg está se movendo para a direita com uma velocidade de 1,5 m/s, quando sobre ele passam a agir as forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$. Se essas forças variam no tempo indicado no gráfico, determine a velocidade do bloco em $t = 6$ s. Despreze o atrito e a massa das polias e cabos.



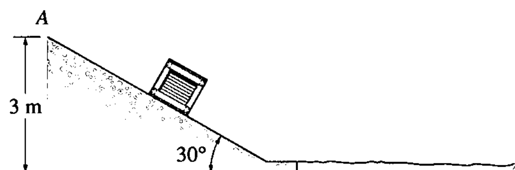

**Problema 15.24**

**15.25.** Determine as velocidades dos blocos $A$ e $B$ 2 s após eles terem sido soltos a partir do repouso. Despreze a massa das polias e cabos.




**Problema 15.25**

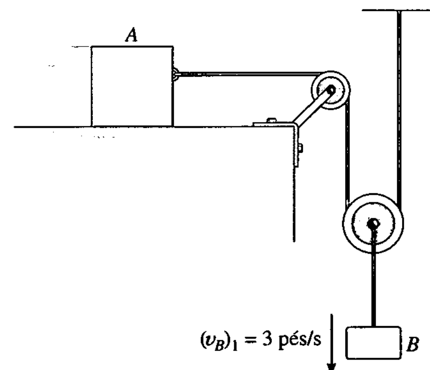
**15.26.** O pacote de 5 kg, inicialmente em repouso, é abandonado em $A$. Ele escorrega inicialmente sobre o plano liso inclinado de 30° e continua pelo plano horizontal áspero (coeficiente de atrito cinético $\mu_c = 0{,}2$). Determine o tempo total de escorregamento até o repouso. Despreze o tamanho do pacote.




**Problema 15.26**

**15.27.** O bloco $A$ pesa 10 lb e o bloco $B$, 3 lb. Se no instante $t = 0$ $B$ se move para baixo com velocidade de 3 pés/s, determine a velocidade de $A$ quando $t = 1$ s. Suponha que o plano horizontal seja liso. Despreze a massa das polias e das cordas.

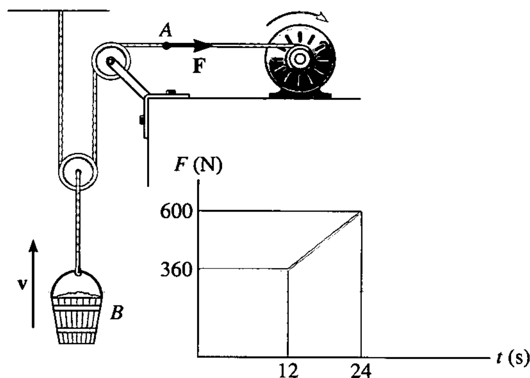
***15.28.** O bloco $A$ pesa 10 lb e o bloco $B$, 3 lb. Se no instante $t = 0$ $B$ se move para baixo com velocidade de 3 pés/s, determine a velocidade de $A$ quando $t = 1$ s. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é $\mu_c = 0{,}15$.




**Problemas 15.27/28**

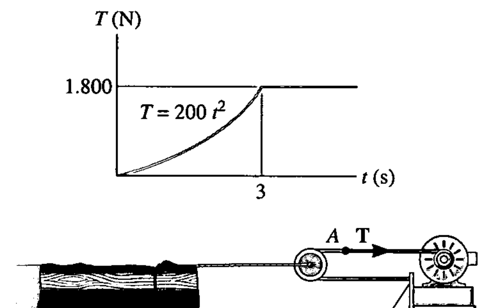
**15.29.** A força horizontal $F$ no ponto $A$ do cabo varia no tempo como indicado no gráfico. Determine a velocidade do balde $B$ de 70 kg quando $t = 18$ s. Inicialmente o balde tem velocidade de 3 m/s para cima.

**15.30.** A força horizontal $F$ no ponto $A$ do cabo varia com o tempo como se indica no gráfico. Determine a velocidade do balde $B$ de 80 kg quando $t = 24$ s. Inicialmente o balde tem velocidade de 20 m/s para baixo.




**Problemas 15.29/30**

**15.31.** A tora de 500 kg apóia-se no solo, para o qual os coeficientes de atrito estático e cinético são $\mu_e = 0{,}5$ e $\mu_c = 0{,}4$, respectivamente. A força horizontal F no ponto $A$ do cabo varia com o tempo como se indica no gráfico. Determine a velocidade da tora quando $t = 5$ s. Inicialmente, a tensão no cabo é nula. *Dica:* primeiro determine a força necessária para iniciar o movimento da tora.




**Problema 15.31**



*O malho no topo da foto aplica uma força impulsiva na estaca. Durante o tempo extremamente pequeno do contato, o peso da estaca pode ser considerado não impulsivo, e contanto que a estaca seja introduzida em solo mole, o impulso do solo sobre a estaca também pode ser considerado não impulsivo. Em contraste, se a estaca é usada numa britadeira para quebrar concreto, então, duas forças impulsivas devem ser consideradas sobre a estaca: uma superior devida à britadeira e outra inferior devida ao concreto.*

## 15.3 Conservação da Quantidade de Movimento para um Sistema de Pontos Materiais

Quando a soma dos *impulsos externos* que agem num sistema de pontos materiais é *nula*, a Equação 15.6 se reduz à seguinte forma simplificada:

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \qquad (15.8)$$

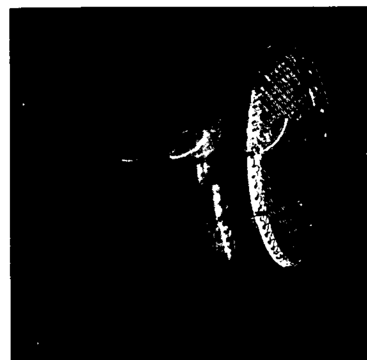
Essa equação expressa a *conservação da quantidade de movimento*. Ela estabelece que a quantidade de movimento total para um sistema de pontos materiais permanece constante durante o intervalo de tempo $t_1$ a $t_2$. Substituindo $m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$ na Equação 15.8, podemos escrever

$$(\mathbf{v}_G)_1 = (\mathbf{v}_G)_2 \qquad (15.9)$$

indicando que a velocidade do centro de massa não varia quando a soma dos impulsos externos é nula.

A conservação da quantidade de movimento é aplicada com freqüência a problemas para os quais os pontos materiais colidem ou interagem. Para aplicações, devemos fazer um estudo cuidadoso do diagrama de corpo livre para o sistema *inteiro* a fim de identificar as forças que criam os impulsos externos ou internos, e, portanto, determinar em que direção(ões) a quantidade de movimento é conservada. Como visto anteriormente, os *impulsos internos* para um sistema sempre se cancelam, pois sempre decorrem de pares de forças opostas (ação e reação). Se o intervalo de tempo durante o qual se estuda o movimento é *muito curto*, alguns dos impulsos externos podem ser desprezados ou considerados aproximadamente nulos. As forças responsáveis por esses impulsos desprezíveis são chamadas de *forças não impulsivas*. Por comparação, forças que são muito intensas e agem por pouco tempo produzem uma variação significativa de quantidade de movimento, sendo denominadas *forças impulsivas*. Certamente, essas forças não podem ser desprezadas na análise de problemas de impulso e quantidade de movimento.

Forças impulsivas ocorrem normalmente em explosões e em colisões entre dois corpos, enquanto forças não impulsivas podem incluir o peso de um corpo, a força de uma mola ligeiramente deformada que tem uma rigidez relativamente pequena, e forças que sejam pequenas em comparação com outras intensas (impulsivas). Ao se fazer essa distinção, é importante observar que isso ocorre apenas durante o tempo $t_1$ a $t_2$. Como ilustração, consideremos o efeito de se bater numa bola de tênis com uma raquete, como se mostra na foto. Durante o *breve intervalo de tempo* em que ocorre a interação, a força da raquete sobre a bola é impulsiva, pois modifica drasticamente a quantidade de movimento desta. Por comparação, o peso da bola tem efeito desprezível na variação da quantidade de movimento, portanto, é uma força não impulsiva. Conseqüentemente, o peso pode ser desprezado na análise do problema do impulso e quantidade de movimento durante a colisão. No entanto, se uma análise de impulso-quantidade de movimento for considerada para o tempo bem maior de vôo da bola após a interação com a raquete, então o impulso do peso será importante, pois ele e a resistência do ar são os responsáveis pela variação da quantidade de movimento da bola.



## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Geralmente, aplica-se o princípio do impulso e quantidade de movimento ou a conservação da quantidade de movimento a sistemas de pontos materiais para se determinarem as velocidades finais dos pontos imediatamente após o intervalo de tempo considerado. Ao se aplicar essas equações ao sistema inteiro, os impulsos internos, que podem ser desconhecidos, são *eliminados* da análise. Para aplicação sugere-se o seguinte procedimento.

***Diagrama de Corpo Livre.***

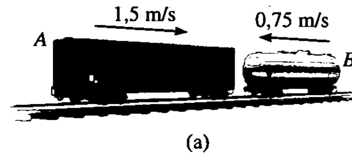
- Estabeleça um referencial inercial $x$, $y$, $z$ e desenhe o diagrama de corpo livre para cada ponto material do sistema para identificar as forças internas e externas.
- A conservação da quantidade de movimento aplica-se ao sistema numa dada direção quando não há forças externas (ou melhor, a soma dos impulsos é nula) ou se forças não impulsivas agem sobre o sistema naquela direção.
- Estabeleça a direção e o sentido das velocidades iniciais e finais dos pontos materiais. Se o sentido for desconhecido, suponha que ele é o do eixo positivo.
- Como um procedimento alternativo, desenhe os diagramas de impulso e quantidade de movimento para cada ponto material do sistema.

***Equações da Quantidade de Movimento.***

- Aplique o princípio do impulso e quantidade de movimento ou a conservação da quantidade de movimento nas direções apropriadas.
- Se for necessário determinar o *impulso interno* $\int F\,dt$ agindo em apenas um ponto material do sistema, então o ponto material deverá ser *'isolado'* (diagrama de corpo livre) e o princípio do impulso e quantidade de movimento deverá ser aplicado *ao ponto material.*
- Após calcular o impulso, e contanto que o tempo $\Delta t$ para o qual ocorre a ação do impulso seja conhecido, a *força impulsiva média* $F_{méd}$ pode ser determinada pela equação $F_{méd} = \int F\,dt\,/\,\Delta t$.

## EXEMPLO 15.4

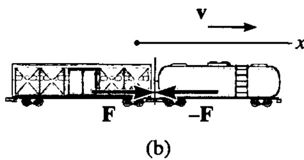
O vagão de carga $A$ de 15 t que se desloca a 1,6 m/s ao longo dos trilhos horizontais encontra um vagão tanque $B$ de 12 t que se desloca a 0,75 m/s no sentido oposto, como mostra a Figura 15.18*a*. Se os vagões se acoplam, determine (a) a velocidade dos vagões imediatamente após o acoplamento e (b) a força média entre eles se o processo de acoplamento ocorre em 0,8 s.



(a)

## SOLUÇÃO

***Parte (a) Diagrama de Corpo Livre.***[4] Consideremos *ambos* os vagões como um único sistema (Figura 15.8*b*). Por inspeção, a quantidade de movimento é conservada na direção $x$, pois as forças de acoplamento **F** e **−F** são internas ao sistema e, portanto, se cancelam. Suponhamos que ambos os vagões, quando acoplados, se movam com velocidade $\mathbf{v}_2$ no sentido positivo do eixo.



(b)

***Conservação da Quantidade de Movimento.***

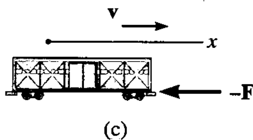
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$$

$$(15.000\ \text{kg})(1{,}5\ \text{m/s}) - 12.000\ \text{kg}(0{,}75\ \text{m/s}) = (27.000\ \text{kg})v_2$$

$$v_2 = 0{,}5\ \text{m/s} \rightarrow$$ ***Resposta***

***Parte (b).*** A força média de acoplamento, $\mathbf{F}_{méd}$, pode ser determinada aplicando-se o princípio do impulso e quantidade de movimento a *qualquer um* dos vagões.

***Diagrama de Corpo Livre.*** Como mostra a Figura 15.8*c*, isolando-se o vagão de carga, a força de acoplamento é *externa* ao vagão.



(c)

**Figura 15.8**

***Princípio do Impulso e da Quantidade de Movimento.*** Como $\int F\,dt = F_{méd}\Delta t = F_{méd}(0{,}8)$, temos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + \Sigma\int F\,dt = m_A v_2$$

$$(15.000\ \text{kg})(1{,}5\ \text{m/s}) - F_{méd}(0{,}8\ \text{s}) = (15.000\ \text{kg})(0{,}5\ \text{m/s})$$

$$F_{méd} = 18{,}8\ \text{kN}$$ ***Resposta***

A solução foi possível porque a velocidade final do vagão foi obtida na Parte (a). Tente obter $F_{méd}$, aplicando o princípio do impulso e quantidade de movimento ao outro vagão.

## EXEMPLO 15.5

O canhão de 1.200 lb mostrado na Figura 15.9*a* dispara um projétil de 8 lb com velocidade de 1.500 pés/s (na boca do canhão) relativamente ao solo. Se o disparo ocorre em 0,03 s, determine (a) a velocidade de recuo do canhão imediatamente após o disparo e (b) a força impulsiva média que age no projétil. O suporte do canhão é fixo no solo e o recuo horizontal é absorvido por duas molas.

[4] Somente as forças horizontais estão sendo mostradas no diagrama de corpo livre.

## SOLUÇÃO

***Parte (a) Diagrama de Corpo Livre.***[5] Como mostrado na Figura 15.9*b*, consideremos o projétil e o canhão como um único sistema, pois as forças impulsivas **F** e −**F** que agem no projétil e no canhão são *internas* e, portanto, se cancelam nesta análise. Além disso, durante o tempo $\Delta t = 0{,}03$ s, as duas molas de recuo que são ligadas ao suporte exercem cada uma delas uma *força não impulsiva* $\mathbf{F}_s$ no canhão. Essa aproximação é boa porque $\Delta t$ é muito pequeno, de modo que durante esse tempo o canhão sofre apenas um pequeno deslocamento.[6] Conseqüentemente, $F_m = ks \approx 0$, onde $k$ é a rigidez de cada mola. Logo, pode-se concluir que a quantidade de movimento para o sistema é conservada na *direção horizontal*. Supõe-se que, após o disparo, o canhão se move para a esquerda e o projétil, para a direita.

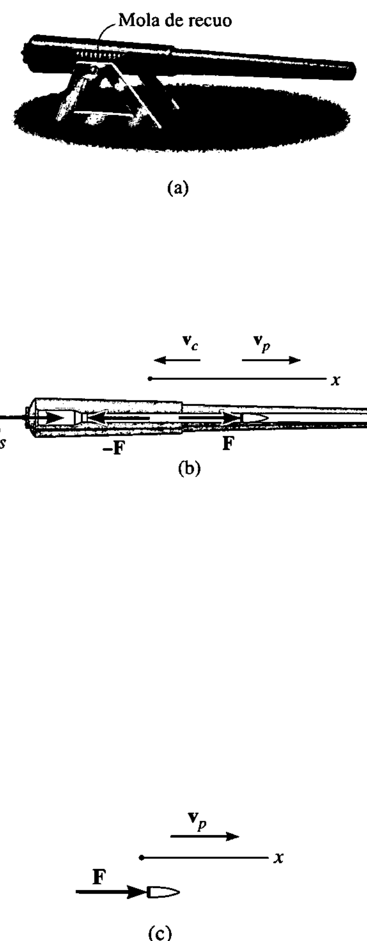


**Figura 15.9**

***Conservação da Quantidade de Movimento.***

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_c(v_c)_1 + m_p(v_p)_1 = -m_c(v_c)_2 + m_p(v_p)_2$$

$$0 + 0 = -\frac{1.200 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}(v_c)_2 + \frac{8 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}(1.500 \text{ pés/s})$$

$$(v_c)_2 = 10 \text{ pés/s} \leftarrow$$ ***Resposta***

***Parte (B).*** A força média impulsiva exercida pelo canhão sobre o projétil pode ser determinada pela aplicação do princípio do impulso e quantidade de movimento para o projétil (ou para o canhão). Por quê?

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento.*** Usando os dados da Figura 15.9*c* e observando que $\int F\,dt = F_{\text{méd}}\,\Delta t = F_{\text{méd}}(0{,}03)$, temos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_p)_1 + \Sigma\int F\,dt = m(v_p)_2$$

$$0 + F_{\text{méd}}(0{,}03 \text{ s}) = \frac{8 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}(1.500 \text{ pés/s})$$

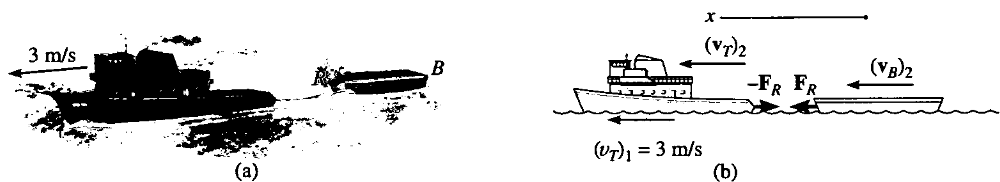
$$F_{\text{méd}} = 12{,}4(10^3) \text{ lb} = 12{,}4 \text{ kip}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 15.6

Usa-se o rebocador $T$ de 350 t para puxar a barcaça $B$ de 50 t, por meio de um cabo $R$ (Figura 15.10*a*). Se a barcaça está inicialmente em repouso e o rebocador está navegando livremente com velocidade de 3 m/s enquanto o cabo está frouxo, determine a velocidade do rebocador *imediatamente depois* de a corda se retesar. Suponha que o cabo não se deforma e que o atrito com a água é desprezível.

[5] Somente as forças horizontais estão sendo mostradas no diagrama de corpo livre.

[6] Se o canhão estivesse fixado firmemente no seu suporte (sem molas), a força de reação do suporte deveria ser considerada como uma força impulsiva externa ao sistema, pois o suporte não permitiria qualquer movimento do canhão (certamente o movimento da Terra seria considerado desprezível).




## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.***[7] Como mostrado na Figura 15.10*b*, consideramos o sistema inteiro (rebocador e barcaça). Logo, as forças impulsivas $\mathbf{F}_R$ e $-\mathbf{F}_R$ criadas entre o rebocador e a barcaça são *internas* ao sistema e, portanto, a quantidade de movimento do sistema se conserva durante o tempo de aplicação da força de reboque.

O procedimento alternativo para desenhar os diagramas de impulso e quantidade de movimento do sistema está indicado na Figura 15.10*c*.

***Conservação da Quantidade de Movimento.*** Observando que $(v_B)_2 = (v_T)_2$, temos

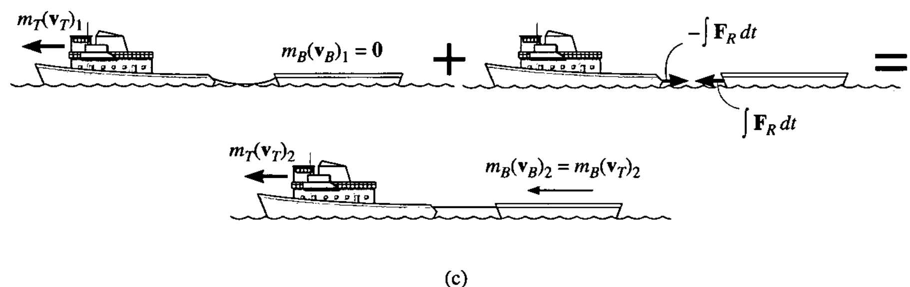
$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad m_T(v_T)_1 + m_B(v_B)_1 = m_T(v_T)_2 + m_B(v_B)_2$$

$$350(10^3)\text{ kg}(3\text{ m/s}) + 0 = 350(10^3)\text{ kg}(v_T)_2 + 50(10^3)\text{ kg}(v_T)_2$$

Resolvendo

$$(v_T)_2 = 2{,}62\text{ m/s}\leftarrow$$ ***Resposta***

Esse resultado representa a velocidade do rebocador *imediatamente após* a tração impulsiva de reboque. Use esse resultado e mostre que o impulso de reboque é 131 kN · s.




(c)

**Figura 15.10**

## EXEMPLO 15.7

Uma estaca rígida *P* de 800 kg mostrada na Figura 15.11*a* está sendo cravada no solo usando-se o bate-estaca *H* de 300 kg. O bate-estaca, inicialmente em repouso, cai de uma altura $y_0 = 0{,}5$ m e atinge o topo da estaca. Determine o impulso que o bate-estaca imprime à estaca, supondo que esta esteja imersa em areia fofa, de modo que, após o impacto, o bate-estaca *não* perde contato com a estaca.

[7] Somente as forças horizontais estão sendo mostradas no diagrama de corpo livre.

## SOLUÇÃO

***Conservação da Energia.*** A velocidade com que o bate-estaca atinge a estaca pode ser determinada pela equação da conservação da energia aplicada ao bate-estaca. Com a referência no topo da estaca (Figura15.11*a*), temos



$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\tfrac{1}{2}m_H(v_H)_0^2 + W_H y_0 = \tfrac{1}{2}m_H(v_H)_1^2 + W_H y_1$$

$$0 + 300(9{,}81)\,\text{N}(0{,}5\,\text{m}) = \frac{1}{2}(300\,\text{kg})(v_H)_1^2 + 0$$

$$(v_H)_1 = 3{,}13\,\text{m/s}$$

***Diagrama de Corpo Livre.*** Dos aspectos físicos do problema, o diagrama de corpo rígido do bate-estaca e da estaca (Figura 15.11*b*), indica que, durante o *pequeno intervalo de tempo* entre *imediatamente antes* e *imediatamente depois* da *colisão*, o peso do bate-estaca e o da estaca, bem como a força $\mathbf{F}_s$ de resistência da areia, são *não impulsivos*. As forças impulsivas **R** e $-$**R** são internas ao sistema e se cancelam. Conseqüentemente, a quantidade de movimento se conserva na direção vertical durante esse breve intervalo de tempo.

***Conservação da Quantidade de Movimento.*** Uma vez que o bate-estaca não perde contato com a estaca imediatamente após a colisão, $(v_H)_2 = (v_P)_2 = v_2$.

$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + m_P(v_P)_1 = m_H v_2 + m_P v_2$$

$$(300\,\text{kg})(3{,}13\,\text{m/s}) + 0 = (300\,\text{kg})v_2 + (800\,\text{kg})v_2$$

$$v_2 = 0{,}854\,\text{m/s}$$

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento.*** O impulso que a estaca impõe ao bate-estaca pode ser determinado, pois $\mathbf{v}_2$ é conhecido. Do diagrama de corpo livre para o bate-estaca (Figura 15.11*c*), temos

$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m_H v_2$$

$$(300\,\text{kg})(3{,}13\,\text{m/s}) - \int R\,dt = (300\,\text{kg})(0{,}854\,\text{m/s})$$

$$\int R\,dt = 683\,\text{N}\cdot\text{s}$$ ***Resposta***

Um impulso oposto age na estaca. Tente obter esse impulso, aplicando o princípio do impulso e quantidade de movimento à estaca.

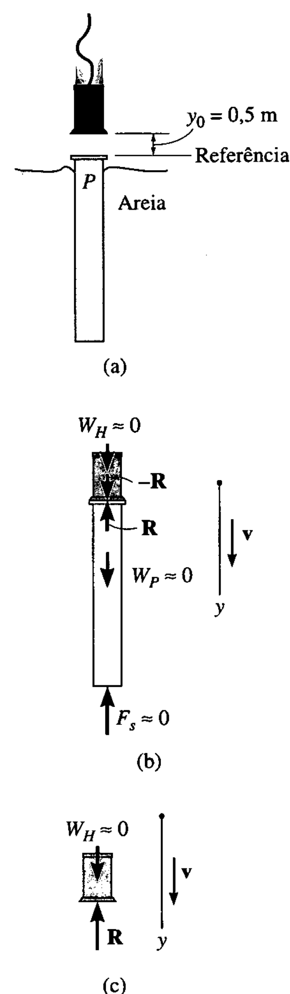



**Figura 15.11**

## EXEMPLO 15.8

Um menino de 40 kg está em pé na parte de trás de um tobogã de 15 kg inicialmente em repouso no ponto *A* (Figura 15.12*a*). Se o menino caminha para o ponto *B* e pára, determine o deslocamento do tobogã. Despreze o atrito entre o tobogã e o piso (gelo).

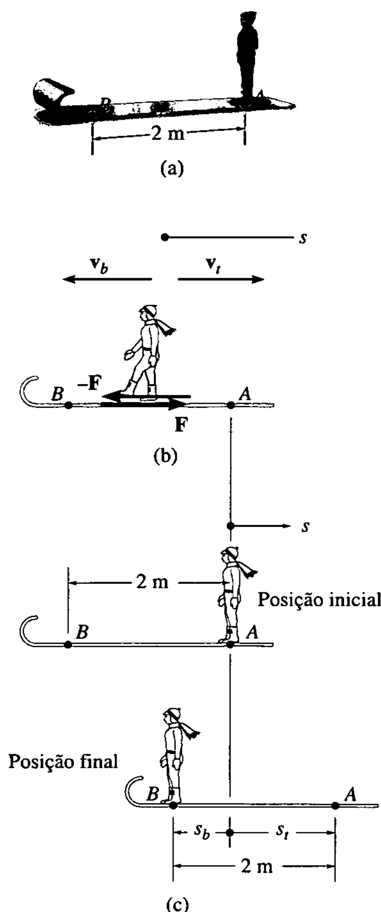


Figura 15.12

## SOLUÇÃO I

***Diagrama de Corpo Livre.*** A força de atrito (desconhecida) dos sapatos do menino com o tobogã poderá ser *excluída* da análise se o tobogã e o menino forem considerados um único sistema. Nesse caso, a força de atrito é força *interna*, e a conservação da quantidade de movimento pode ser aplicada (Figura 15.12*b*).

***Conservação da Quantidade de Movimento.*** Como tanto a quantidade de movimento inicial quanto a final do sistema são nulas (as velocidades inicial e final são nulas), então, o mesmo vale para qualquer outro instante. Assim para um ponto qualquer entre A e *B*, tem-se

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad -m_b v_b + m_t v_t = 0 \qquad (1)$$

onde as incógnitas $v_b$ e $v_t$ representam as velocidades do menino movendo-se para a esquerda e do tobogã, para a esquerda, respectivamente. Ambas as velocidades são medidas num *referencial inercial* fixo no solo.

Em qualquer instante, a *posição* do ponto *A* no tobogã e a *posição* do menino devem ser determinadas por integração. Como $v = ds/dt$, então $-m_b\, ds_b + m_t\, ds_t = 0$. Supondo que a posição de *A* é a origem (Figura 15-12*c*), então na posição final tem-se $-m_b\, s_b + m_t\, s_t = 0$. Como $s_b + s_t = 2$ m ou $s_b = (2 - s_t)$, então

$$-m_b(2 - s_t) + m_t s_t = 0 \qquad (2)$$

$$s_t = \frac{2m_b}{m_b + m_t} = \frac{2(40)}{40 + 15} = 1{,}45 \text{ m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## SOLUÇÃO II

O problema também pode ser resolvido considerando-se o movimento do menino em relação ao tobogã, $\mathbf{v}_{b/t}$. Essa velocidade relaciona-se com as velocidades do menino e do tobogã: $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_{b/t}$ (Equação 12.34). Como na Equação 1 se supõe movimento positivo para a direita, $\mathbf{v}_b$ e $\mathbf{v}_{b/t}$ são negativas, pois o movimento do menino se dá para a esquerda. Logo, na forma escalar, $-v_b = v_t - v_{b/t}$, e a Equação 1 se torna $m_b(v_t - v_{b/t}) + m_t v_t = 0$. Integrando,

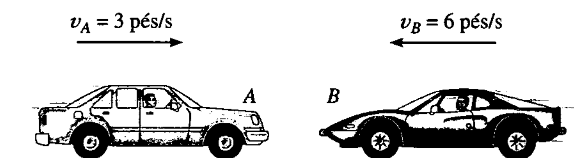
$$m_b(s_t - s_{b/t}) + m_t s_t = 0$$

Observando que $s_{b/t} = 2$ m, obtemos a Equação 2.

# PROBLEMAS

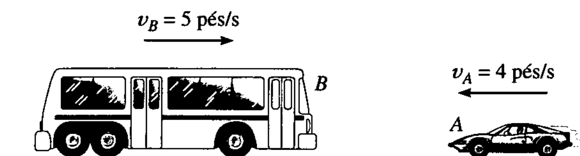
***15.32.** Um vagão de trem com massa de 15 t movimenta-se livremente a 1,5 m/s num trecho horizontal da estrada. Ao mesmo tempo um outro vagão de 12 t se move a 0,75 m/s em sentido oposto. Se os vagões se acoplam ao se encontrarem, determine a velocidade de ambos imediatamente após o engate. Obtenha a diferença entre as energias cinéticas totais antes e depois do acoplamento e explique qualitativamente o que aconteceu com essa energia.

**15.33.** O carro *A* de 4.500 lb trafega para a direita a 3 pés/s, enquanto o carro *B* se desloca a 6 pés/s no sentido contrário. Se os carros colidem frontalmente e se tornam unidos, determine sua velocidade comum imediatamente após a colisão. Suponha que os freios não sejam usados durante a colisão.



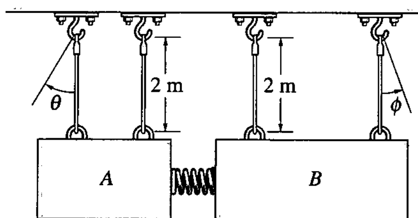
**Problema 15.33**

**15.34.** O ônibus $B$ pesa 15.000 lb e trafega para a direita a 5 pés/s, enquanto o carro $A$, que pesa 3.000 lb, desloca-se a 4 pés/s para a esquerda. Se os veículos colidem frontalmente e permanecem unidos, determine sua velocidade comum imediatamente após a colisão. Suponha que os veículos possam rodar livremente durante o choque.



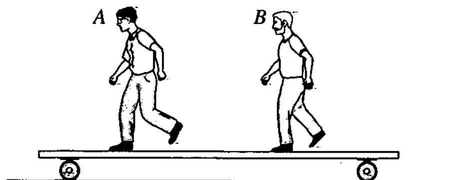

**Problema 15.34**

**13.35.** Os blocos $A$ e $B$, cada um deles com 5 kg, estão suspensos por cordas paralelas. Uma mola de rigidez $k = 60$ N/m está ligada a $B$ e é comprimida 0,3 m por $A$ contra $B$. Determine os ângulos máximos $\theta$ e $\phi$ das cordas quando os blocos são soltos a partir do repouso e a mola se torna não deformada.



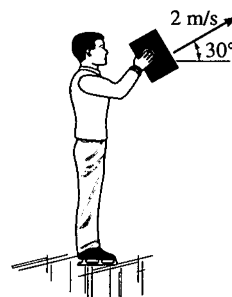

**Problema 15.35**

***15.36.** Os homens $A$ e $B$, cada um deles com 160 lb, estão sobre um carrinho de 200 lb. Cada homem se desloca com uma velocidade de 3 pés/s, medida em relação ao carrinho. Determine a velocidade final do carrinho se (a) $A$ corre e salta, e, então, $B$ corre e salta a partir da mesma extremidade e (b) ambos correm ao mesmo tempo e saltam simultaneamente. Despreze a massa das rodas e suponha que os saltos são realizados horizontalmente.



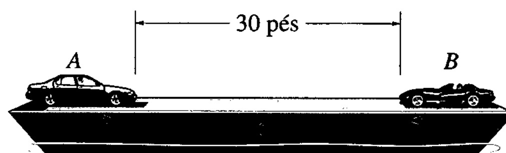

**Problema 15.36**

**15.37.** Um homem usando patins para gelo atira um bloco de 8 kg com velocidade de 2 m/s, medida em relação a ele mesmo, na direção mostrada na figura. O homem está originalmente em repouso e completa o lançamento do bloco em 1,5 s, mantendo suas pernas rígidas. Determine a velocidade horizontal do homem imediatamente depois de soltar o bloco. Qual é a reação vertical de ambos os patins sobre o gelo durante o lançamento? A massa do homem é de 70 kg. Despreze o atrito e o movimento dos braços.



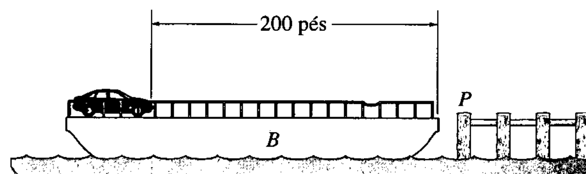

**Problema 15.37**

**15.38.** A barcaça de 45.000 lb suporta os carros $A$ e $B$, que pesam 4.000 lb e 3.000 lb, respectivamente. Os carros partem do repouso, um em direção ao outro, com acelerações $a_A = 4$ pés/s$^2$ e $a_B = 8$ pés/s$^2$, até alcançarem uma velocidade constante de 6 pés/s, relativamente à barcaça. Determine a velocidade desta, imediatamente antes de os veículos colidirem. Quanto tempo leva para ocorrer a colisão? A barcaça está inicialmente em repouso. Despreze a resistência da água.




**Problema 15.38**

**15.39.** A barcaça $B$ pesa 30.000 lb e sustenta um carro de 3.000 lb. Se a barcaça não está amarrada no píer $P$ e alguém dirige o carro para o outro lado da barcaça para desembarque, determine quanto a barcaça se afasta do píer. Despreze a resistência da água.

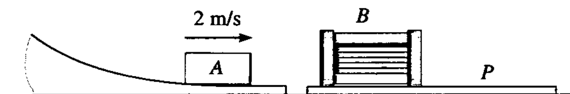



**Problema 15.39**

***15.40.** O bloco $A$ de 2 kg escorrega sem atrito com velocidade de 2 m/s em direção a uma caixa $B$ aberta de lado. Se $B$ tem 3 kg e está em repouso numa placa $P$ com 3 kg, determine a distância que a placa se move antes de parar. Quanto tempo se passa desde imediatamente após o impacto até a cessação de todos os movimentos? O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a placa é $\mu_c = 0{,}2$ e entre a placa e o piso é $\mu'_c = 0{,}4$. O coeficiente de atrito estático entre a placa e o piso é $\mu'_e = 0{,}5$.

**15.41.** O bloco $A$ de 2 kg escorrega sem atrito com velocidade de 2 m/s em direção a uma caixa $B$ aberta de lado. Se $B$ tem 3 kg e está em repouso numa placa $P$ com 3 kg, determine a distância que a placa se move antes de parar. Quanto tempo se passa desde imediatamente após o impacto até a cessação de todos os movimentos? O coeficiente de atrito cinético entre a caixa e a placa é $\mu_c = 0{,}2$ e entre a placa e o piso é $\mu'_c = 0{,}1$. O coeficiente de atrito estático entre a

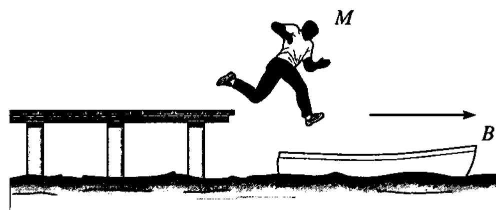
placa e o piso é $\mu'_s = 0{,}12$. Despreze o atrito no interior da caixa.




**Problemas 15.40/41**

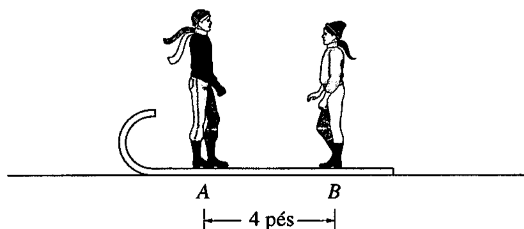
**15.42.** O homem $M$ de 150 lb salta para um bote $B$ de 200 lb. Se o homem tem um componente horizontal de velocidade de 3 pés/s, *relativamente ao bote*, imediatamente antes de tocá-lo, e o bote está se afastando do píer com velocidade de 2 pés/s no momento do salto, determine a velocidade comum ao homem e bote imediatamente após o salto.

**15.43.** O homem $M$ de 150 lb salta para um bote $B$ inicialmente em repouso. Se o homem tem um componente horizontal de velocidade de 3 pés/s imediatamente antes de tocar o bote, determine o peso deste se sua velocidade é de 2 pés/s assim que o homem entra nele.




**Problemas 15.42/43**

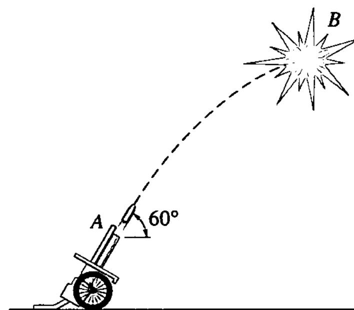
***15.44.** Um menino $A$ de 80 lb e uma menina $B$ de 65 lb estão em repouso nas extremidades de um tobogã de 20 lb. Se $A$ se encaminha até $B$ e pára e a seguir ambos se dirigem para a posição inicial de $A$, determine a posição final do tobogã ao cessar o movimento. Despreze o atrito.



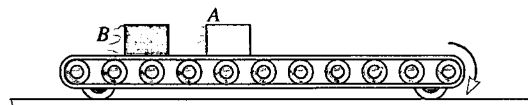

**Problema 15.44**

**15.45.** Um projétil de 10 lb é disparado do nível do solo, com uma velocidade de 80 pés/s na direção mostrada na figura. Quando o projétil alcança seu ponto mais alto, $B$, ele se parte em dois fragmentos de 5 lb. Se um fragmento sobe verticalmente com velocidade de 12 pés/s, determine a distância entre os fragmentos após atingirem o solo. Despreze o tamanho da peça de artilharia.

**15.46.** As caixas $A$ e $B$, cada uma com 160 lb, apóiam-se numa esteira transportadora de 500 lb que pode 'rodar' livremente sobre o piso. Se a esteira parte do repouso e começa a 'rodar' com velocidade de 3 pés/s, determine a velocidade final da esteira transportadora se (a) as caixas não estão empilhadas e $A$ cai antes de $B$ e (b) $A$ está empilhada sobre $B$ e ambas caem juntas.

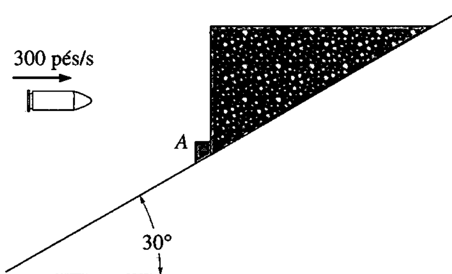



**Problema 15.45**



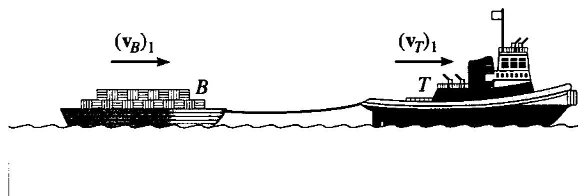

**Problema 15.46**

**15.47.** O bloco de 10 kg é mantido em repouso sobre o plano inclinado liso por meio de um pequeno bloco em $A$. Se a bala de 10 g tem uma velocidade de 300 m/s quando penetra no bloco de 10 kg, determine a distância máxima que o bloco subirá no plano.




**Problema 15.47**

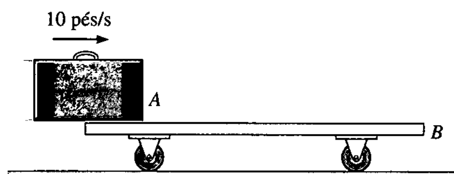
***15.48.** Um rebocador $T$ de 19 t é ligado a uma barcaça $B$ de 75 t. Se o cabo é 'elástico', com rigidez $k = 600$ kN/m, determine a deformação máxima do cabo durante o reboque inicial. Inicialmente, o rebocador e a barcaça estão se movendo na mesma direção e sentido com velocidades $(v_T)_1 = 15$ km/h e $(v_B)_1 = 10$ km/h, respectivamente. Despreze a resistência da água.




**Problema 15.48**

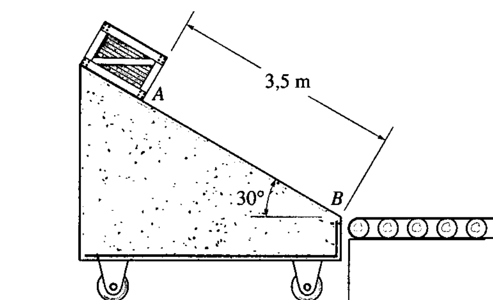
**15.49.** Considere um carrinho $B$ de 20 lb montado sobre rodas de tamanho desprezível. Se uma mala $A$ de 10 lb é arremessada horizontalmente sobre o carrinho, a uma velocidade de 10 pés/s, determine o intervalo de tempo em que $A$ escorrega relativamente a $B$ e a velocidade final de $A$ e $B$. O coeficiente de atrito cinético entre $A$ e $B$ é $\mu_c = 0{,}4$.

**15.50.** Considere um carrinho $B$ de 20 lb montado sobre rodas de tamanho desprezível. Se uma mala $A$ de 10 lb é arremessada horizontalmente sobre o carrinho, a uma velocidade de 10 pés/s, determine o tempo $t$ e a distância percorrida por $B$ antes que $A$ pare relativamente a $B$. O coeficiente de atrito cinético entre $A$ e $B$ é $\mu_c = 0{,}4$.




**Problemas 15.49/50**

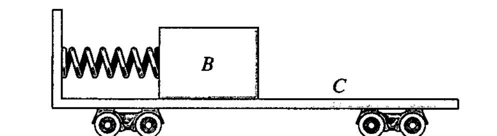
**15.51** A rampa móvel tem massa de 40 kg. Um engradado de 10 kg é solto a partir do repouso em $A$ e escorrega 3,5 m para baixo. Se a superfície da rampa é lisa, determine a sua velocidade quando o engradado chega a $B$. Qual é, então, a velocidade do engradado?




**Problema 15.51**

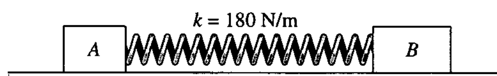
***15.52.** O bloco de 50 kg apóia-se sobre a superfície do carrinho de 75 kg. Se a mola que é presa no carrinho mas não no bloco está comprimida 0,2 m, e o sistema é abandonado a partir do repouso, determine a velocidade do bloco depois que a mola se descomprime. Despreze a massa das rodas do carrinho e da mola. Despreze também o atrito e considere $k = 300$ N/m.

**15.53.** O bloco de 50 kg apóia-se sobre a superfície do carrinho de 75 kg. Se a mola que é presa no carrinho mas não no bloco está comprimida 0,2 m, e o sistema é abandonado a partir do repouso, determine a velocidade do bloco em relação ao carrinho depois que a mola se descomprime. Despreze as massas das rodas do carrinho e da mola. Despreze também o atrito e considere $k = 300$ N/m.




**Problemas 15.52/53**

**15.54.** Os blocos $A$ e $B$ de massa 40 kg e 60 kg, respectivamente, são colocados sobre uma superfície lisa. A mola conectada a eles está esticada 2 m. Se os blocos são soltos a partir do repouso, determine a velocidade de cada um deles no instante em que a mola recupera seu comprimento original.




**Problema 15.54**

# 15.4 COLISÃO

Uma *colisão*, *choque* ou *impacto* entre dois corpos ocorre quando estes entram em contato durante um *breve* intervalo de tempo, desenvolvendo forças de relativa alta intensidade (forças impulsivas). A batida de um martelo num prego ou de um taco de golfe numa bola são exemplos comuns.

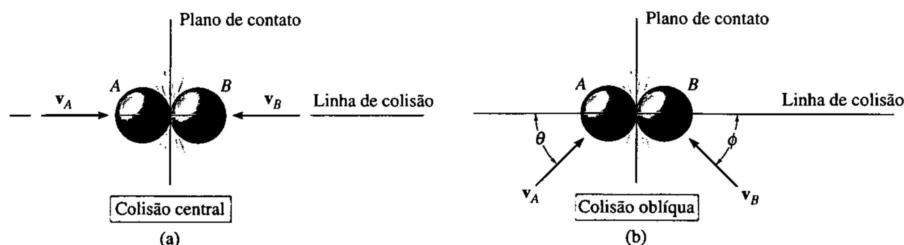



**Figura 15.13**

Em geral, as colisões podem ser classificadas como colisão *central* e colisão *oblíqua*. Uma *colisão central* ocorre quando as direções das velocidades dos centros de massa dos corpos em colisão coincidem com a linha que une esses centros de massa. Essa linha (Figura 15.13*a*) é denominada *linha de colisão*. Quando uma ou ambas as velocidades dos centros de massa formam um

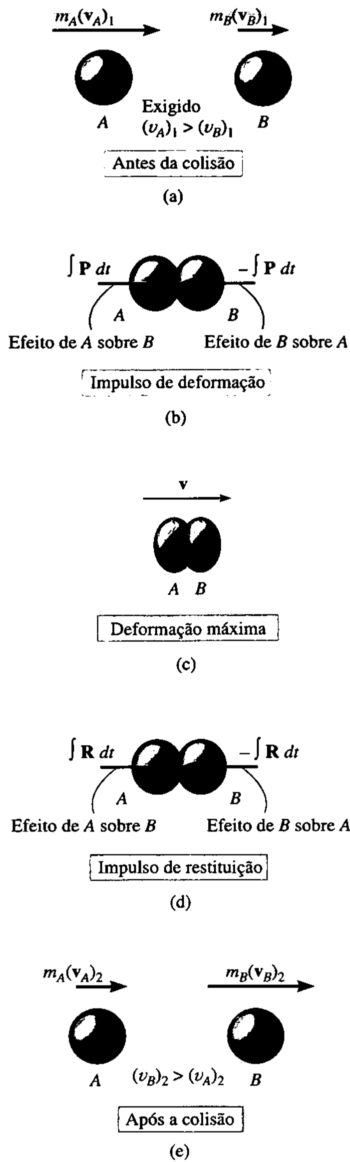



**Figura 15.14**

ângulo com a linha de colisão (Figura 15.13*b*), a colisão é denominada *colisão oblíqua*.

***Colisão Central.*** Para ilustrar o método de análise da mecânica de colisões, consideremos o caso em que há colisão central de dois pequenos corpos representados por pequenas esferas *lisas* $A$ e $B$, como mostrado na Figura 15.14.

- Os corpos têm as quantidades de movimento iniciais mostradas na Figura 15.14*a*. Sendo $(v_A)_1 > (v_B)_1$, ocorrerá uma colisão entre eles.
- Durante a colisão, os corpos devem ser pensados como *deformáveis* ou não-rígidos. Durante o *tempo de deformação*, eles exercem mutuamente impulsos de deformação opostos $\int \mathbf{P}\, dt$ (mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos) (Figura 15.14*b*).
- Somente no instante de *deformação máxima* ambos os corpos se movem com a mesma velocidade **v**, pois seu movimento relativo é nulo (Figura 15.14*c*).
- A seguir, ocorre um *tempo de restituição*, no qual os corpos retornam às suas formas originais ou ficam permanentemente deformados. Os *impulsos de restituição* opostos (mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos) afastam os corpos um do outro (Figura 15.14*d*). Na realidade, as propriedades de quaisquer dois corpos são tais que os impulsos de deformação são *sempre maiores* do que os de restituição, isto é, $\int P\, dt > \int R\, dt$.
- Imediatamente após a separação, os corpos terão as quantidades de movimento mostradas na Figura 15.14*e*, onde $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

Em muitos problemas, as velocidades iniciais dos corpos são *conhecidas* e é necessário determinar suas velocidades finais. Para isso, lança-se mão da *conservação da quantidade de movimento do sistema formado pelos dois corpos*, pois durante a colisão os impulsos internos (tanto os de deformação quanto os de restituição) se *cancelam*. Logo, levando em conta as figuras 15.14*a* e 15.14*e*, impomos

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \qquad (15.10)$$

Para obtermos uma segunda equação que nos permita encontrar as velocidades finais, devemos aplicar o princípio do impulso e quantidade de movimento a *cada um dos corpos*. Por exemplo, durante a fase de deformação para o corpo $A$ (figuras 15.14*a* até 15.14*c*), temos

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 - \int P\, dt = m_A v$$

Para a fase de restituição (figuras 15.14*d* e 15.14*e*),

$$(\stackrel{+}{\rightarrow}) \qquad m_A v - \int R\, dt = m_A(v_A)_2$$

A razão entre o impulso de restituição e o de deformação é denominada *coeficiente de restituição*, cujo símbolo é $e$. Das equações anteriores, o coeficiente de restituição para o corpo $A$ é

$$e = \frac{\int R\, dt}{\int P\, dt} = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

De modo análogo, podemos estabelecer $e$ considerando o corpo $B$ (Figura 15.14). Temos

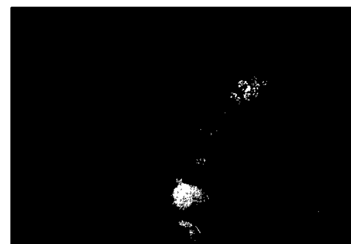
$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

Se a incógnita $v$ for eliminada das duas equações, o coeficiente de restituição poderá ser expresso em termos das velocidades iniciais dos dois corpos:

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad \boxed{e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}} \qquad (15.11)$$

Especificando um valor de $e$, as equações 15.10 e 15.11 podem ser resolvidas para se obterem $(v_A)_2$ e $(v_B)_2$. Para esse procedimento é importante estabelecer cuidadosamente uma convenção de sinal para definir o sentido positivo para $v_A$ e $v_B$ e, então, usá-la de maneira *consistente* quando se escreverem *ambas* as equações. Como observado na aplicação apresentada e indicado simbolicamente pela seta entre parênteses, definimos o sentido positivo para a direita quando nos referimos aos movimentos de ambos os corpos, $A$ e $B$. Conseqüentemente, se obtivermos um valor negativo para $(v_A)_2$ ou $(v_B)_2$, isso indicará que o movimento se dá para a esquerda.

***Coeficiente de Restituição.*** Vemos da Equação 15.11 que $e$ é igual à razão entre a velocidade relativa da separação entre os corpos *imediatamente depois da colisão*, $(v_B)_2 - (v_A)_2$, e a velocidade relativa de aproximação *imediatamente antes da colisão*, $(v_A)_1 - (v_B)_1$. Determinando-se essas velocidades relativas experimentalmente, verificou-se que $e$ varia consideravelmente com a velocidade de colisão, assim como com os tamanhos e formas dos corpos que colidem. Por essas razões, o valor do coeficiente de restituição só é confiável quando usado com dados que se aproximam das condições em que foram efetuadas as medidas. Em geral, $e$ tem um valor entre zero e um. É conveniente conhecer o significado físico de cada um desses limites.



*Pela altura de seu salto, mede-se a qualidade de uma bola de tênis manufaturada. A altura pode ser relacionada com o coeficiente de restituição. Usando a mecânica de colisão, os engenheiros podem projetar um dispositivo de separação para manter o controle de qualidade das bolas produzidas.*

***Colisão Elástica ($e = 1$):*** Se a colisão entre dois corpos é *perfeitamente elástica*, o impulso de deformação ($\int \mathbf{P}\,dt$) é oposto (mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto) ao impulso de restituição ($\int \mathbf{R}\,dt$). Embora na realidade isso nunca aconteça, $e = 1$ para uma colisão elástica.

***Colisão Plástica ($e = 0$):*** A colisão é denominada *plástica* ou *inelástica* quando $e = 0$. Nesse caso, não há impulso de restituição ($\int \mathbf{R}\,dt = \mathbf{0}$), de modo que, após a colisão, ambos os corpos se unem, movendo-se, portanto, com a mesma velocidade.

A partir do que foi exposto, torna-se evidente que o princípio do trabalho e energia não pode ser usado na análise de problemas de colisão, pois não é possível saber como as *forças internas* de deformação e restituição variam ou deslocam seus pontos de aplicação durante o processo de colisão; todavia, a perda de energia durante a colisão pode ser calculada com base na diferença das energias cinéticas, imediatamente antes e imediatamente após a colisão. Essa perda de energia, $\Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 - \Sigma T_1$, ocorre porque alguma energia cinética inicial se transforma em energia térmica, assim como gera som e produz deformações do material. Em particular, se a colisão é *perfeitamente elástica*, nenhuma energia é perdida na colisão; se, por outro lado, a colisão é *plástica*, a energia perdida durante a colisão é um máximo.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (COLISÃO CENTRAL)

Em muitos problemas as *velocidades finais* de dois corpos lisos devem ser determinadas *imediatamente após* sofrerem colisão central. Sendo conhecidos o coeficiente de restituição, a massa de cada corpo e as respectivas velocidades iniciais *imediatamente antes da colisão*, a solução do problema pode ser obtida usando-se as duas equações a seguir:

- A conservação da quantidade de movimento aplica-se ao sistema formado pelos dois corpos, $\Sigma m v_1 = \Sigma m v_2$.
- O coeficiente de restituição, $e = [(v_B)_2 - (v_A)_2]/[(v_A)_1 - (v_B)_1]$, relaciona as velocidades relativas dos corpos ao longo da linha de colisão, imediatamente antes e imediatamente depois da colisão.

Ao se aplicarem as duas equações acima, o sentido de uma velocidade desconhecida pode ser arbitrado. Se a solução resultar numa quantidade negativa, a velocidade efetivamente tem o sentido oposto.

***Colisão Oblíqua.*** Quando ocorre colisão oblíqua entre dois corpos lisos, estes se afastam entre si com velocidades desconhecidas (em módulo, direção e sentido). Dadas as velocidades iniciais, quatro incógnitas estão presentes no problema. Como é mostrado na Figura 15.15*a*, essas incógnitas podem ser representadas como $(v_A)_2$, $(v_B)_2$, $\theta_2$ e $\phi_2$ ou como componentes $x$ e $y$ das velocidades finais.

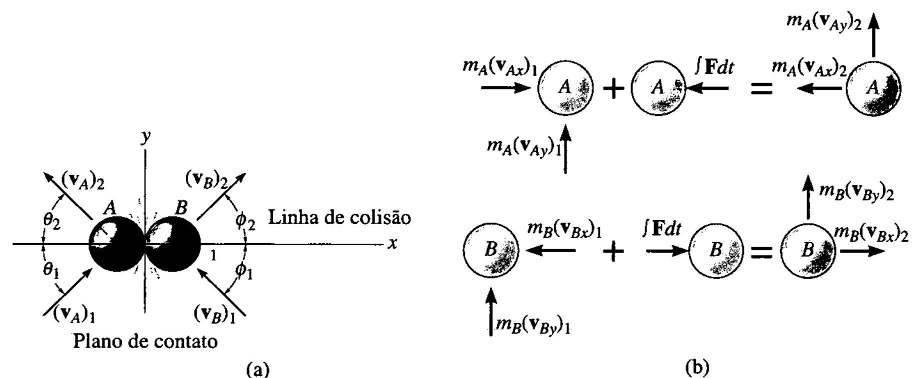



**Figura 15.15**

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (COLISÃO OBLÍQUA)

Se o eixo $y$ é estabelecido no plano de contato e o eixo $x$, ao longo da linha de colisão, as forças impulsivas de deformação e restituição agem *somente na direção x* (Figura 15.15*b*). Decompondo os vetores velocidade e quantidade de movimento nas direções $x$ e $y$ (Figura 15.15*b*), é possível escrever quatro equações escalares independentes para se determinarem $(v_{Ax})_2$, $(v_{Ay})_2$, $(v_{Bx})_2$ e $(v_{By})_2$.

- A quantidade de movimento do sistema é conservada *ao longo da linha de colisão*, eixo $x$, de modo que $\Sigma m(v_x)_1 = \Sigma m(v_x)_2$.
- O coeficiente de restituição, $e = [(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2]/[(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1]$, relaciona os *componentes* das velocidades relativas dos corpos *ao longo da linha de colisão* (eixo $x$).
- A quantidade de movimento do corpo $A$ é conservada ao longo do eixo $y$, perpendicular à linha de colisão, pois nenhum impulso age no corpo $A$ nessa direção.
- A quantidade de movimento do corpo $B$ é conservada ao longo do eixo $y$, pela mesma razão apresentada para o corpo $A$.

O Exemplo 15.11 é uma ilustração numérica de aplicação dessas quatro equações.

## EXEMPLO 15.9

Abandona-se a partir do repouso, na posição $\theta = 0°$, um saquinho $A$ de 6 lb, como mostra a Figura 15.16*a*. Após cair até $\theta = 90°$, o saquinho atinge uma caixa $B$ de 18 lb. Se o coeficiente de restituição entre o saquinho e a caixa é $e = 0{,}5$, determine as velocidades de ambos os corpos imediatamente antes e imediatamente após o impacto. Determine também a perda de energia durante a colisão.

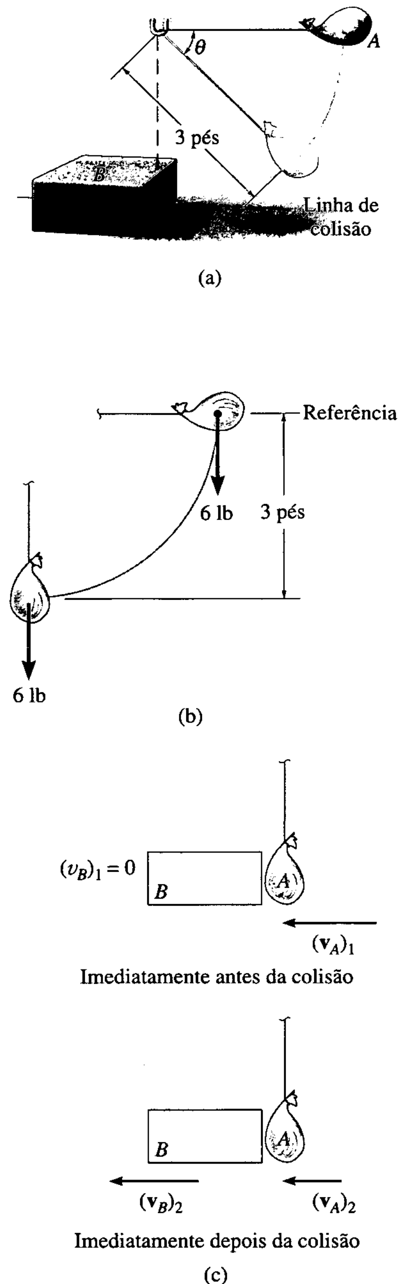



**Figura 15.16**

### SOLUÇÃO

Este problema envolve colisão central. Por quê? Antes de analisar a mecânica da colisão, todavia, é necessário obter a velocidade do saquinho *imediatamente antes* da colisão com a caixa.

***Conservação da Energia.*** Com a referência em $\theta = 0°$ (Figura 15.16*b*), temos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(v_A)_1^2 - 6\text{ lb}(3\text{ pés}); \qquad (v_A)_1 = 13{,}9\text{ pés/s}$$

***Conservação da Quantidade de Movimento.*** Supomos que depois da colisão $A$ e $B$ se deslocam para a esquerda. Aplicando a conservação da quantidade de movimento para o sistema, temos

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad m_B(v_B)_1 + m_A(v_A)_1 = m_B(v_B)_2 + m_A(v_A)_2$$

$$0 + \frac{6\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}(13{,}9\text{ pés/s}) = \frac{18\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}(v_B)_2 + \frac{6\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}(v_A)_2$$

$$(v_A)_2 = 13{,}9 - 3(v_B)_2 \qquad (1)$$

***Coeficiente de Restituição.*** Observando que para ocorrer a separação após a colisão $(v_B)_2 > (v_A)_2$ (Figura 15.16*c*), temos

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}; \qquad 0{,}5 = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{13{,}9\text{ pés/s} - 0}$$

$$(v_A)_2 = (v_B)_2 - 6{,}95 \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2, obtemos

$(v_A)_2 = -1{,}74$ pé/s $= 1{,}74$ pé/s $\rightarrow$ e $(v_B)_2 = 5{,}21$ pés/s $\leftarrow$ ***Resposta***

***Perda de Energia.*** Aplicando o princípio do trabalho e energia ao saquinho e caixa imediatamente antes e imediatamente após a colisão, temos

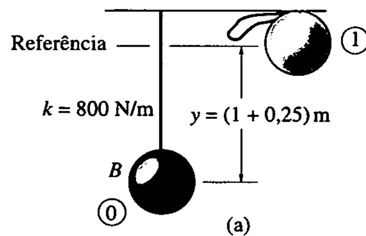
$$\Sigma U_{1-2} = T_2 - T_1;$$

$$\Sigma U_{1-2} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{18\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(5{,}21\text{ pés/s})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(1{,}74\text{ pé/s})^2\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{6\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(13{,}9\text{ pés/s})^2\right]$$

$$\Sigma U_{1-2} = -10{,}1\text{ pés}\cdot\text{lb}$$ ***Resposta***

Por que há perda de energia?

## EXEMPLO 15.10




A bola $B$ mostrada na Figura 15.17$a$ tem massa de 1,5 kg e está suspensa por um fio elástico de 1 m preso no teto. Se o fio é esticado 0,25 m e a seguir a bola é solta a partir do repouso, determine quanto o fio se alonga após a bola chocar-se com o teto. A rigidez do fio é $k = 800$ N/m e o coeficiente de restituição entre a bola o teto é $e = 0{,}80$. A bola sofre colisão central com o teto.

### SOLUÇÃO

Usando métodos de energia, vamos obter a velocidade da bola *imediatamente antes* da colisão com o teto. Em seguida, vamos considerar o impulso e a quantidade de movimento para a bola e o teto. Finalmente, vamos usar outra vez métodos de energia para determinar quanto o fio se alonga.

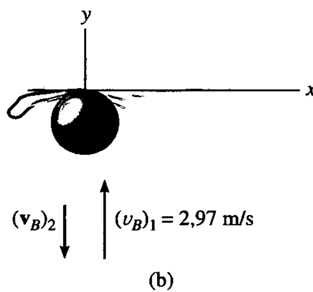
***Conservação da Energia.*** Com a referência mostrada na Figura 15.17$a$ e observando que inicialmente $y = y_0 = (1 + 0{,}25)$ m $= 1{,}25$ m, temos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_0^2 - W_B y_0 + \tfrac{1}{2}ks^2 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_1^2 + 0$$

$$0 - 1{,}5(9{,}81)\text{ N}(1{,}25\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(800\text{ N/m})(0{,}25\text{ m})^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}5\text{ kg})(v_B)_1^2$$

$$(v_B)_1 = 2{,}97\text{ m/s}\uparrow$$




A interação da bola com o teto será agora considerada usando-se os princípios da colisão.[8] Como uma parte desconhecida da massa do teto está envolvida na colisão, a conservação da quantidade de movimento para o sistema bola-teto não será escrita. A 'velocidade' dessa parte do teto é nula, pois é plausível supor que ela (ou a Terra) permanece em repouso antes *e* depois da colisão.

***Coeficiente de Restituição.*** Observemos a Figura 15.17$b$.

$$(+\uparrow)\quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1};\qquad 0{,}8 = \frac{(v_B)_2 - 0}{0 - 2{,}97\text{ m/s}}$$

$$(v_B)_2 = -2{,}37\text{ m/s} = 2{,}37\text{ m/s}\downarrow$$

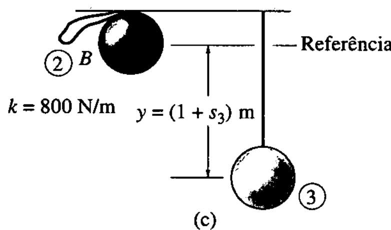



**Figura 15.17**

***Conservação da Energia.*** O valor máximo do alongamento do fio $s_3$ pode ser determinado pela aplicação da equação da energia para a bola, imediatamente após a colisão. Supondo que $y = y_3 = (1 + s_3)$ m (Figura 15.17$c$), então

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$

$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_2^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_3^2 - W_B y_3 + \tfrac{1}{2}ks_3^2$$

$$\tfrac{1}{2}(1{,}5\text{ kg})(2{,}37\text{ m/s})^2 = 0 - 9{,}81(1{,}5)\text{ N}(1\text{ m} + s_3) + \tfrac{1}{2}(800\text{ N/m})s_3^2$$

$$400s_3^2 - 14{,}72s_3 - 18{,}94 = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos para a raiz positiva

$$s_3 = 0{,}237\text{ m} = 237\text{ mm}\qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

[8] Considera-se o peso da bola uma força não impulsiva.

## EXEMPLO 15.11

Os discos lisos $A$ e $B$ de 1 kg e 2 kg, respectivamente, colidem, como mostrado na Figura 15.18*a*. Se o coeficiente de restituição para os discos é $e = 0{,}75$, determine os componentes $x$ e $y$ da velocidade final de cada um dos discos imediatamente após a colisão.

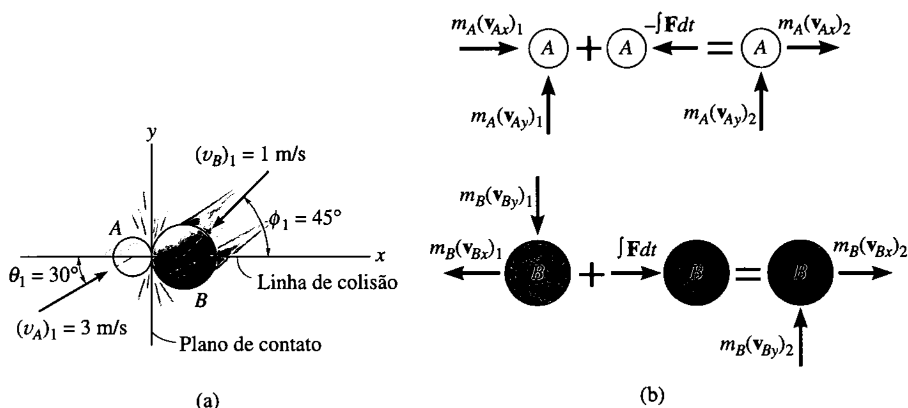



**Figura 15.18**

## SOLUÇÃO

O problema envolve *colisão oblíqua*. Por quê? Para resolver o problema estabelecemos os eixos $x$ e $y$ ao longo da linha de colisão e no plano de contato, respectivamente (Figura 15.18*a*).

Decompondo cada uma das velocidades iniciais nas direções $x$ e $y$, temos

$$(v_{Ax})_1 = 3 \cos 30° = 2{,}60 \text{ m/s} \qquad (v_{Ay})_1 = 3 \operatorname{sen} 30° = 1{,}50 \text{ m/s}$$

$$(v_{Bx})_1 = -1 \cos 45° = -0{,}707 \text{ m/s} \qquad (v_{By})_1 = -1 \operatorname{sen} 45° = -0{,}707 \text{ m/s}$$

Supomos que os quatro componentes de velocidade após a colisão tenham sentidos positivos (Figura 15.18*b*). Uma vez que a colisão ocorre somente na direção $x$ (linha de colisão), a conservação da quantidade de movimento para *ambos* os discos pode ser aplicada nessa direção. Por quê?

***Conservação da Quantidade de Movimento na Direção x.*** Considerando os diagramas da quantidade de movimento, temos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 = m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2$$

$$1 \text{ kg}(2{,}60 \text{ m/s}) + 2 \text{ kg}(-0{,}707 \text{ m/s}) = 1 \text{ kg}(v_{Ax})_2 + 2 \text{ kg}(v_{Bx})_2$$

$$(v_{Ax})_2 + 2(v_{Bx})_2 = 1{,}18 \qquad (1)$$

***Coeficiente de Restituição (x).*** *Supomos* que ambos os discos têm componentes de velocidade na direção $+x$ após a colisão (Figura 15.18*b*).

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1}; \quad 0{,}75 = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{2{,}60 \text{ m/s} - (-0{,}707 \text{ m/s})}$$

$$(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 = 2{,}48 \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2 para $(v_{Ax})_2$ e $(v_{Bx})_2$, obtemos

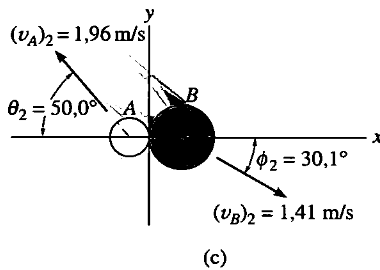



**Figura 15.18**

$(v_{Ax})_2 = -1{,}26 \text{ m/s} = 1{,}26 \text{ m/s} \leftarrow \qquad (v_{Bx})_2 = 1{,}22 \text{ m/s} \rightarrow$ ***Resposta***

***Conservação da Quantidade de Movimento na Direção y.*** A quantidade de movimento de *cada disco* se conserva na direção *y* (plano de contato), pois os discos são lisos e, portanto, nenhum impulso externo age nessa direção. Da Figura 15.18*b*:

$(+\uparrow)\ m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2; \quad (v_{Ay})_2 = 1{,}50 \text{ m/s}\uparrow$ ***Resposta***

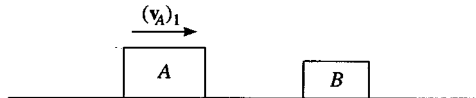
$(+\uparrow)\ m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2; \quad (v_{By})_2 = -0{,}707 \text{ m/s} = 0{,}707 \text{ m/s}\downarrow$ ***Resposta***

Mostre que a soma dos componentes de velocidade fornece os resultados mostrados na Figura 15.18*c*.

## PROBLEMAS

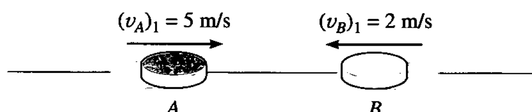
**15.55.** Abandona-se uma bola de marfim de 200 g de uma altura de 400 mm acima de uma superfície metálica fixa. Se a bola quica na superfície e atinge uma altura de 325 mm, determine o coeficiente de restituição entre a bola e a superfície metálica.

***15.56.** A velocidade de um bloco *A* de 3 kg que desliza numa superfície horizontal áspera é de 2 m/s no instante em que colide diretamente com um bloco *B* de 2 kg inicialmente em repouso. Se a colisão é perfeitamente elástica ($e = 1$), determine a velocidade de cada bloco imediatamente após a colisão, assim como a distância entre os blocos quando eles param de escorregar. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a superfície é $\mu_c = 0{,}3$.



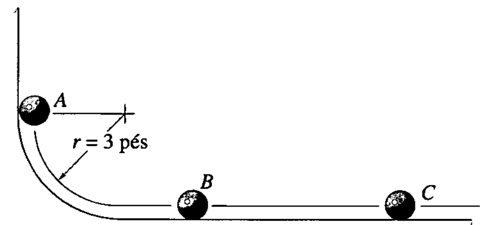

**Problema 15.56**

**15.57.** Um disco *A* de 2 kg deslizando numa superfície *lisa*, com velocidade de 5 m/s, encontra um disco *B* de 4 kg deslizando em sentido oposto, com velocidade de 2 m/s, de modo que ocorre uma colisão central. Se o coeficiente de restituição entre os discos é $e = 0{,}4$, calcule as velocidades de *A* e *B* imediatamente após a colisão.




**Problema 15.57**

**15.58.** Três bolas de 0,5 lb cada têm um coeficiente de restituição $e = 0{,}85$. Se a bola *A* é solta a partir do repouso e atinge a bola *B* que, então, atinge *C*, determine a velocidade de cada bola após a segunda colisão. As bolas deslizam sem atrito.




**Problema 15.58**

**15.59.** Dois discos *A* e *B* de mesma massa sofrem uma colisão central direta perfeitamente elástica ($e = 1$). Mostre que a energia cinética após a colisão é igual à energia cinética antes da colisão. Suponha que a superfície sobre a qual eles escorregam é lisa.

***15.60.** Cada bola tem massa *m* e o coeficiente de restituição entre elas é *e*. Se as bolas estão se movendo em sentidos opostos com velocidade escalar *v*, determine a velocidade escalar de cada uma delas após a colisão. Determine também sua velocidade comum no instante em que ocorre a deformação máxima. Despreze o tamanho das bolas.

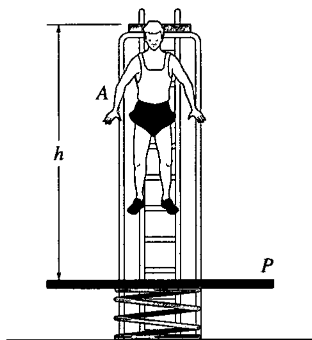



**Problema 15.60**

**15.61.** O homem *A* de 175 lb salta a partir do repouso a uma altura $h = 8$ pés para uma plataforma *P* de 60 lb. A plataforma está montada sobre uma mola de rigidez $k = 200$ lb/pé. Determine (a) as velocidades de *A* e *P* imediatamente após a colisão e (b) a compressão máxima da mola. Suponha que o coeficiente de restituição entre o homem e a plataforma seja $e = 0{,}6$ e que o homem se mantenha rígido durante o movimento.

**15.62.** O homem *A* de 100 lb salta a partir do repouso para uma plataforma *P* de 60 lb. A plataforma está montada sobre uma mola de rigidez $k = 200$ lb/pé. Se o coeficiente de restituição entre o homem e a plataforma é $e = 0{,}6$ e o homem

se mantém rígido durante o movimento, determine a altura $h$ que o salto deve ter para que a compressão máxima da mola seja de 2 pés.



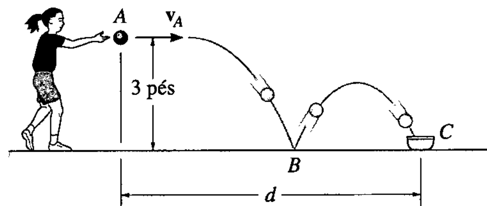

**Problemas 15.61/62**

**15.63.** Cada uma das três bolas tem massa $m$. Se $A$ tem velocidade escalar $v$ imediatamente antes de uma colisão direta com $B$, determine a velocidade de $C$ após a colisão. O coeficiente de restituição entre cada par de bolas é $e$. Despreze o tamanho das bolas.




**Problema 15.63**

***15.64.** Se a menina atira a bola com uma velocidade horizontal de 8 pés/s, determine a distância $d$ necessária para que a bola pule uma vez e então atinja a xícara $C$. Considere $e = 0{,}8$.



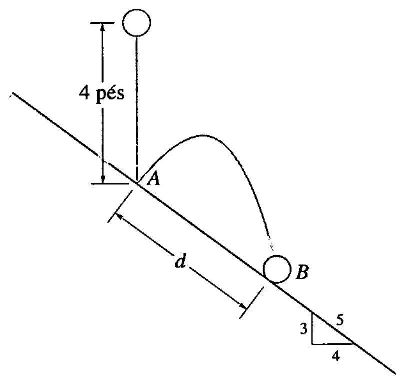

**Problema 15.64**

**15.65.** Deixa-se cair a bola de 1 lb a 4 pés do plano liso (ponto $A$). Se o coeficiente de restituição é $e = 0{,}8$, determine a distância $d$ entre os pontos de colisão $A$ e $B$.

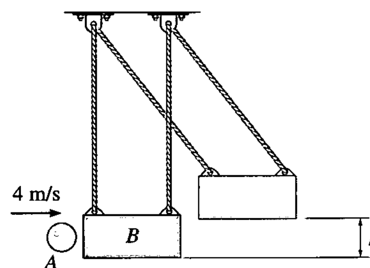
**15.66.** Deixa-se cair a bola de 1 lb a 4 pés do plano liso (ponto $A$). Se após quicar em $A$ ela atinge $B$ em $t = 0{,}5$ s, determine o coeficiente de restituição $e$ entre a bola e o plano. Qual é a distância $d$?

**15.67.** Atira-se com velocidade de 4 m/s uma bola de 2 kg contra um bloco de 20 kg suspenso por cordas. Se o coeficiente de restituição entre a bola e o bloco é $e = 0{,}8$, determine a altura máxima $h$ atingida pelo bloco após a colisão.

***15.68.** Atira-se com velocidade de 4 m/s uma bola de 2 kg contra um bloco de 20 kg suspenso por cordas. Se o tempo de colisão entre a bola e o bloco é de 0,005 s, determine a força normal média exercida sobre o bloco durante esse tempo. Considere $e = 0{,}8$.



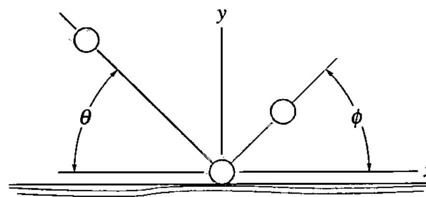

**Problemas 15.65/66**




**Problemas 15.67/68**

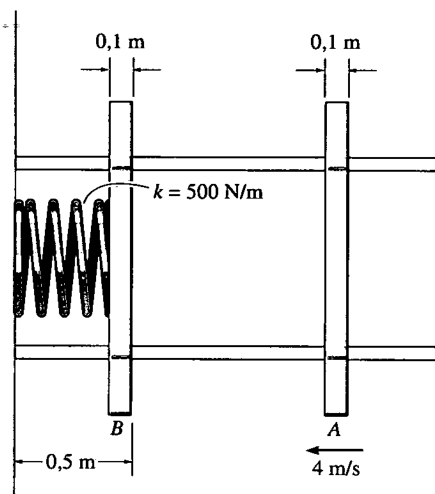
**15.69.** Atira-se a um ângulo $\theta$ uma bola contra uma superfície áspera. Se ela quica a um ângulo $\phi$ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu$, determine o coeficiente de restituição $e$. Despreze o tamanho da bola. *Dica:* mostre que, durante o impacto, os impulsos médios nas direções $x$ e $y$ relacionam-se de acordo com $I_x = \mu I_y$. Como o tempo de colisão é o mesmo, $F_x \Delta t = \mu F_y \Delta t$ ou $F_x = \mu F_y$.

**15.70.** Atira-se a um ângulo $\theta = 45°$ uma bola contra uma superfície áspera. Se ela quica a um ângulo $\phi = 45°$, determine o coeficiente de atrito cinético entre a bola e a superfície. O coeficiente de restituição é $e = 0{,}6$. *Dica:* mostre que, durante o impacto, os impulsos médios nas direções $x$ e $y$ relacionam-se de acordo com $I_x = \mu I_y$. Como o tempo de colisão é o mesmo, $F_x \Delta t = \mu F_y \Delta t$ ou $F_x = \mu F_y$.



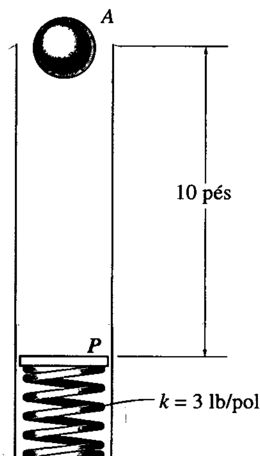

**Problemas 15.69/70**

**15.71.** As placas $A$ e $B$, cada uma com 4 kg, têm seus movimentos limitados por guias lisas. Se o coeficiente de restituição entre as placas é $e = 0{,}7$, determine (a) a velocidade de ambas imediatamente após a colisão e (b) a compressão máxima da mola. A placa $A$ tem velocidade de 4 m/s imediatamente antes da colisão com $B$, a placa $B$ está inicialmente em repouso e a mola não está deformada.




**Problema 15.71**

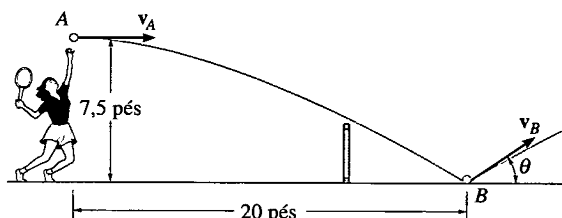
***15.72.** A bola de 8 lb é solta a partir do repouso de uma altura de 10 pés acima de uma placa $P$ de 6 lb. Determine a compressão máxima da mola, considerando o impacto perfeitamente elástico.




**Problema 15.72**

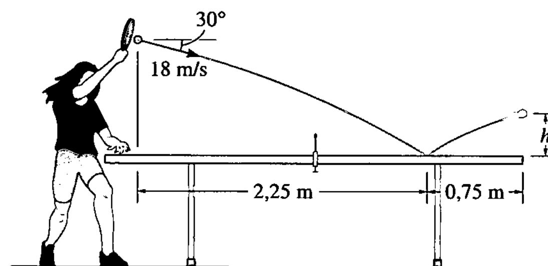
**15.73.** Observou-se que uma bola de tênis, quando batida horizontalmente a 7,5 pés acima do solo, atinge o ponto $B$ a 20 pés de distância. Supondo que o solo em $B$ é liso, determine a velocidade inicial $v_A$ e a velocidade $v_B$ (e $\theta$) da bola imediatamente após ela colidir com a quadra em $B$. Considere $e = 0,7$.

**15.74.** A bola de tênis batida com velocidade $v_A$ quica no solo liso em $B$, subindo a um ângulo $\theta = 30°$. Determine a velocidade inicial $v_A$, a velocidade final $v_B$ e o coeficiente de restituição entre a bola e o solo.



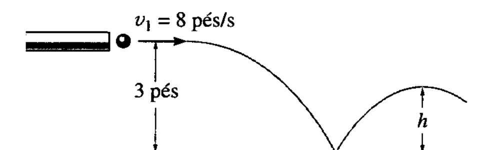

**Problemas 15.73/74**

**15.75.** A bola de pingue-pongue tem massa de 2 g. Se ela é batida com a velocidade indicada na figura, determine a que altura $h$ ela passa da extremidade da mesa. Suponha que a mesa seja lisa e considere $e = 0,8$.



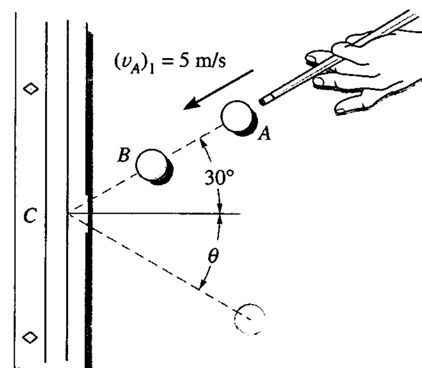

**Problema 15.75**

***15.76.** A bola é ejetada do tubo com velocidade de 8 pés/s, como se indica na figura. Se o coeficiente de restituição entre a bola e o solo é $e = 0,8$, determine (a) a velocidade da bola imediatamente após ela ter quicado o solo e (b) a altura máxima atingida após a primeira colisão com o solo.



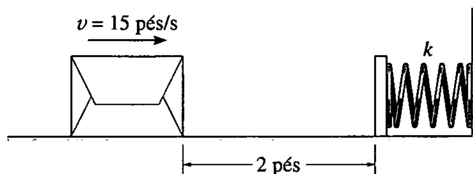

**Problema 15.76**

**15.77.** O taco comunica à bola $A$ uma velocidade inicial de 5 m/s. Se a bola colide diretamente com $B$ ($e = 0,8$), determine a velocidade de $B$ e o ângulo $\theta$ imediatamente após sua colisão em $C$ com a borda almofadada ($e' = 0,6$). Cada bola tem massa de 0,4 kg. Suponha que as bolas não rolem, apenas deslizem.



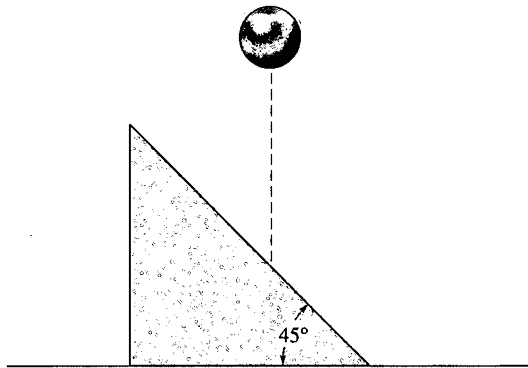

**Problema 15.77**

**15.78.** A caixa de 20 lb desliza sobre a superfície para a qual $\mu_c = 0,3$. A caixa tem velocidade $v = 15$ pés/s quando está a 2 pés da placa de 10 lb. Se a caixa atinge a placa lisa encostada numa mola não deformada (rigidez $k = 400$ lb/pé), determine a compressão máxima sofrida pela mola. Considere $e = 0,8$ entre a caixa e a placa. Suponha que a placa se mova sem atrito com a superfície.



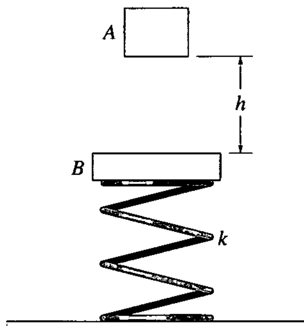

**Problema 15.78**

**15.79.** A esfera de massa $m$ cai e colide com a cunha. A velocidade escalar de chegada da esfera é $v$ e a cunha tem massa $3m$ e está inicialmente em repouso. Determine a velocidade da cunha imediatamente após a colisão. O coeficiente de restituição é $e$.




**Problema 15.79**

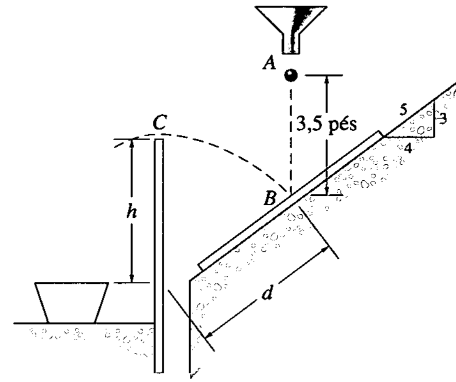
***15.80.** Deixa-se cair o bloco $A$ de massa $m$ de uma altura $h$ acima da placa $B$ de massa $2m$. Se o coeficiente de restituição entre $A$ e $B$ é $e$, determine a velocidade da placa imediatamente após a colisão. A rigidez da mola é $k$.



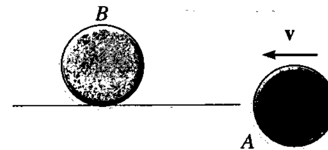

**Problema 15.80**

**15.81.** Para verificar a qualidade da semente, ela deve passar pelo teste de colisão indicado na figura. Para a semente (com $e \geq 0{,}8$) ser aceita ela deve passar pela barreira em $C$, após ser solta a partir do repouso em $A$ e quicar em $B$. Determine as dimensões $d$ e $h$.

**15.82.** Se o centro do disco $A$ se move ao longo da tangente ao disco $B$, colidindo com ele com velocidade $v$, determine a velocidade de $B$ após a colisão e calcule a perda de energia cinética durante o choque. Despreze o atrito. O disco $B$ está inicialmente em repouso. O coeficiente de restituição é $e$ e os discos têm o mesmo tamanho e a mesma massa $m$.

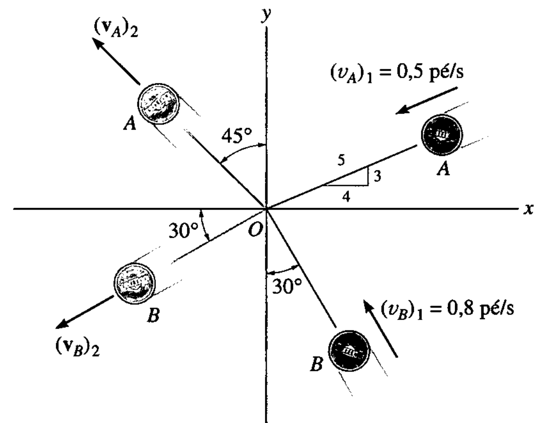



**Problema 15.81**




**Problema 15.82**

**15.83.** As moedas lisas $A$ e $B$, de massas iguais, deslizam sobre uma superfície lisa, como mostrado na figura. Determine a velocidade de cada moeda após a colisão, supondo que elas seguem ao longo das trajetórias cinza. *Dica:* como a linha de colisão não foi definida, aplique a conservação da quantidade de movimento ao longo de cada uma das direções $x$ e $y$.



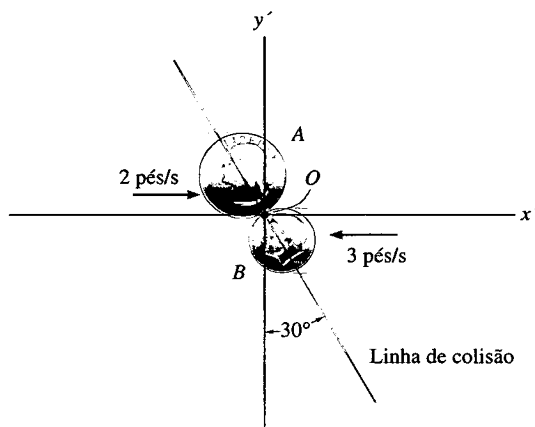

**Problema 15.83**

***15.84.** As moedas $A$ e $B$ têm as velocidades iniciais mostradas na figura, imediatamente antes de colidirem no ponto $O$. Se seus pesos são $W_A = 13{,}2(10^{-3})$ lb e $W_B = 6{,}60(10^{-3})$ lb, respectivamente, e a superfície sobre a qual elas escorregam é lisa, determine suas velocidades imediatamente depois do impacto. O coeficiente de restituição é $e = 0{,}65$.

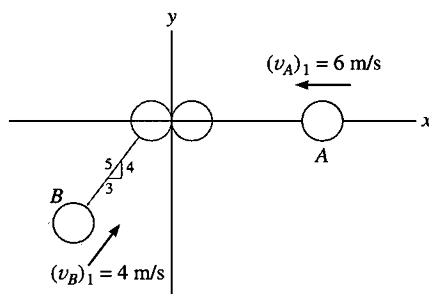
**15.85.** Os discos lisos $A$ e $B$, cada um deles com 0,5 kg, movendo-se com as velocidades mostradas na figura, colidem. Determine suas velocidades finais imediatamente após o choque. O coeficiente de restituição é $e = 0{,}75$.

**15.86.** Os discos lisos $A$ e $B$, cada um deles com 0,5 kg, movendo-se com as velocidades mostradas na figura, colidem. Determine o coeficiente de restituição entre eles, supondo

que, após a colisão, $B$ se desloca ao longo de uma reta que forma com o eixo $y$ um ângulo de 30° medido no sentido anti-horário.



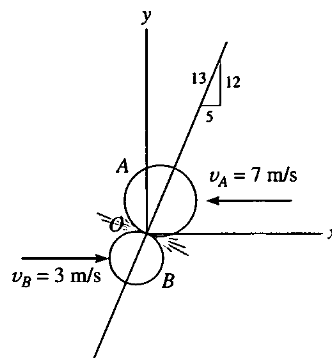

**Problema 15.84**



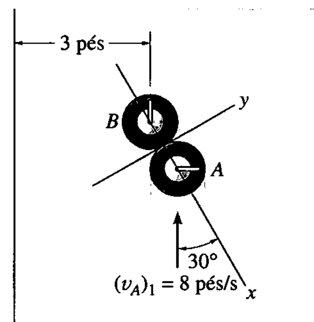

**Problemas 15.85/86**

**15.87.** Os discos $A$ e $B$ têm as velocidades mostradas na figura, imediatamente antes de se chocarem em $O$. Se eles têm massa $m_A = 8$ kg e $m_B = 6$ kg, determine a velocidade de cada um deles imediatamente depois da colisão. O coeficiente de restituição é $e = 0,5$.

***15.88.** A 'pedra' $A$ usada num jogo de *curling* desliza sobre uma pista de gelo e atinge outra 'pedra' $B$, como mostrado na figura. Se cada 'pedra' é lisa e pesa 47 lb, e o coeficiente de restituição entre as 'pedras' é $e = 0,8$, determine a velocidade de cada uma delas imediatamente após a colisão. Inicialmente, $A$ tem uma velocidade de 8 pés/s e $B$ está em repouso.

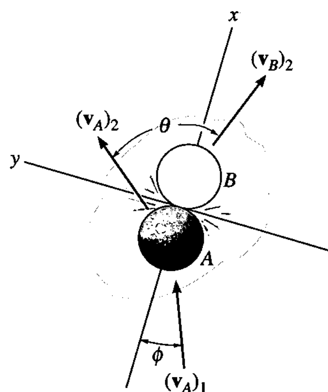



**Problema 15.87**




**Problema 15.88**

**15.89.** A bola $A$ com velocidade $(v_A)_1$ se choca com a bola $B$, como se mostra na figura. Se ambas as bolas têm a mesma massa e a colisão é perfeitamente elástica, determine o ângulo $\theta$ após a colisão. A bola $B$ está inicialmente em repouso. Despreze o tamanho das bolas.




**Problema 15.89**

## 15.5 MOMENTO ANGULAR

O *momento angular* de um ponto material, em relação a um ponto $O$, é definido como o 'momento' da quantidade de movimento do ponto material, em relação ao ponto $O$. Uma vez que esse conceito é análogo ao do momento de uma força em relação a um ponto, o momento angular, $\mathbf{H}_O$, é reconhecido como o *momento da quantidade de movimento*.

*Formulação Escalar.* Se o ponto material se move ao longo de uma curva contida no plano $x$–$y$ (Figura 15.19), o momento angular em qualquer instante pode ser determinado, em relação ao ponto $O$ (ou em relação ao eixo $z$), usando-se uma formulação escalar (já que o vetor terá apenas componente $z$). O escalar

$$\boxed{(H_O)_z = (d)(mv)} \qquad (15.12)$$

(onde $d$ é o braço do momento, isto é, a distância de $O$ à reta suporte de $m\mathbf{v}$), define o módulo do vetor momento angular do ponto material em relação a $O$. As unidades mais comuns para $(\mathbf{H}_O)_z$ são kg·m²/s e slug·pés²/s. O *sentido* de $\mathbf{H}_O$ é definido pela regra da mão direita. Como se mostra na Figura 15.19, o sentido do giro sugerido pelos dedos indica o sentido da rotação de $m\mathbf{v}$ em torno de $O$, de modo que nesse caso o polegar (ou $\mathbf{H}_O$) é perpendicular ao plano $x$–$y$ e aponta no sentido do eixo $+z$.

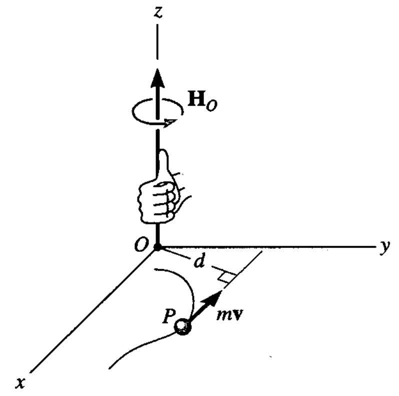



**Figura 15.19**

*Formulação Vetorial.* Se o ponto material se move ao longo de uma curva no espaço (Figura 15.20), usamos o produto vetorial para determinar o *momento angular* em relação a $O$. Nesse caso

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}} \qquad (15.13)$$

onde $\mathbf{r}$ representa o vetor de posição do ponto material $P$, tendo como origem $O$. Como se mostra na figura, $\mathbf{H}_O$ é perpendicular ao plano sombreado contendo $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$.

Para calcular o produto vetorial, $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ podem ser expressos em seus componentes cartesianos, de modo que o momento angular é determinado pelo cálculo do determinante:

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}} \qquad (15.14)$$

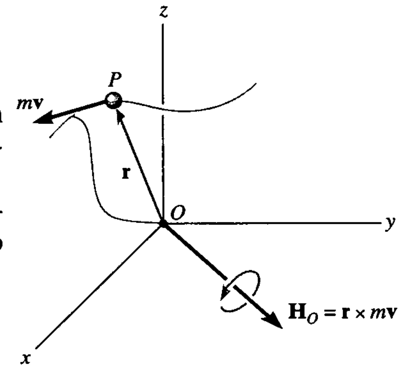
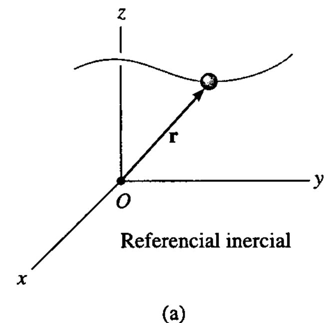



**Figura 15.20**

# 15.6 Relação entre Momento de uma Força e o Momento Angular

Os momentos (ou torques) em relação ao ponto $O$ de todas as forças que agem no ponto material mostrado na Figura 15.21*a* podem ser relacionados com o momento angular do ponto material, por meio da equação de movimento. Se a massa do ponto material é constante, podemos escrever

$$\Sigma \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$$




(a)

**Figura 15.21**

Os momentos das forças em relação a $O$ podem ser obtidos efetuando-se a multiplicação vetorial de cada membro da equação acima pelo vetor de posição $\mathbf{r}$, medido no referencial inercial $x$, $y$, $z$. Escrevemos

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

De acordo com o Apêndice C, a derivada de $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

O primeiro termo do segundo membro, $\dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$, pois o produto vetorial de um vetor por si mesmo é nulo. Logo, a equação anterior se torna

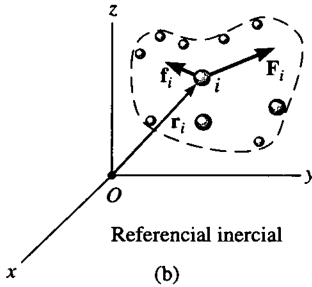
$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O} \qquad (15.15)$$

Essa equação nos diz que *o momento (ou torque) resultante, em relação a O, de todas as forças agindo no ponto material é igual à derivada temporal do momento angular desse ponto em relação a O.* Esse resultado é semelhante à Equação 15.1, isto é:

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}}} \qquad (15.16)$$

onde $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$, de modo que *a força agindo no ponto material é igual à derivada temporal da sua quantidade de movimento.*

Deduzimos então que as equações 15.15 e 15.16 são, de fato, maneiras diferentes de se formular a segunda lei de Newton. Em outras seções deste livro mostraremos que essas equações têm muitas aplicações práticas quando estendidas e aplicadas à solução de problemas que envolvem sistemas de pontos materiais e, em particular, corpos rígidos.



(b)

**Figura 15.21**

*Sistema de Pontos Materiais.* Uma equação com a mesma forma das equações 15.15 pode ser deduzida para um sistema de pontos materiais como aquele representado na Figura 15.21*b*. A resultante das forças que agem no *i*-ésimo ponto material consiste na *força resultante externa* $\mathbf{F}_i$ e na *força resultante interna* $\mathbf{f}_i$. Expressando os momentos (ou torques) dessas forças em relação ao ponto $O$ e usando a forma da Equação 15.15, temos

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = (\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

onde $\mathbf{r}_i$ é o vetor de posição traçado da origem $O$ de um referencial inercial até o *i-ésimo* ponto material, e $(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$ é a derivada temporal do momento angular desse *i-ésimo* ponto do sistema. Equações semelhantes podem ser escritas para todos os outros pontos materiais. Quando somamos vetorialmente os resultados, obtemos

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \Sigma(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

O segundo termo dessa equação é zero, pois as forças internas ocorrem aos pares de forças opostas e de *mesma reta de ação*, portanto o torque de cada par, em relação a $O$, se anula. Logo, a equação anterior pode ser reescrita como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (15.17)$$

A Equação 15.17 nos diz que *a soma dos momentos (ou torques), em relação a O, de todas as forças externas agindo num sistema de pontos materiais é igual à derivada temporal do momento angular total do sistema, em relação ao mesmo ponto O.* Embora $O$ tenha sido considerado aqui como a origem do sistema de coordenadas, ele poderia ser qualquer outro *ponto fixo* no referencial inercial.

## EXEMPLO 15.12

A caixa de massa $m$ mostrada na Figura 15.22*a* escorrega pela rampa circular lisa, de modo que no instante em que ela está na posição angular $\theta$, sua velocidade escalar é $v$. Determine seu momento angular em relação a $O$ nesse instante. Determine também a derivada temporal de $v$, isto é, $a_t$.

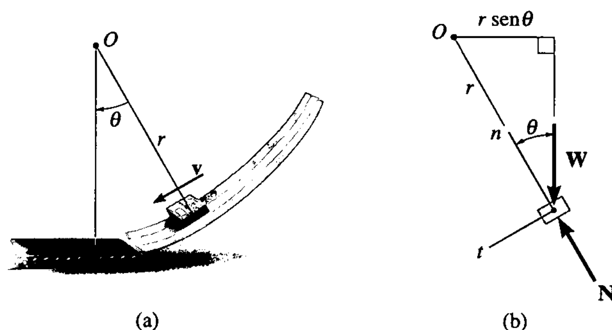



**Figura 15.22**

**SOLUÇÃO**

Como **v** é tangente à trajetória, quando se aplica a Equação 15.12, o momento angular é

$$H_O = rmv \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

A taxa de aumento da velocidade escalar da caixa ($dv/dt$) pode ser obtida aplicando-se a Equação 15.15. Do diagrama de corpo livre para a caixa (Figura 15.22*b*), podemos ver que somente o peso $W = mg$ contribui com um torque em relação a $O$. Temos, portanto,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \dot{H}_O; \qquad mg(r \operatorname{sen} \theta) = \frac{d}{dt}(rmv)$$

Como $r$ e $m$ são constantes,

$$mgr \operatorname{sen} \theta = rm\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Certamente, esse mesmo resultado pode ser obtido da equação de movimento aplicada na direção tangencial (Figura 15.22*b*); isto é,

$$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad mg \operatorname{sen} \theta = m\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## 15.7 PRINCÍPIOS DO IMPULSO E MOMENTO ANGULARES

Se a Equação 15.15 for reescrita na forma $\Sigma \mathbf{M}_O \, dt = d\mathbf{H}_O$ e integrada, teremos, supondo que no instante $t = t_1$, $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_1$ e no instante $t = t_2$, $\mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_2$,

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1$$

ou

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{15.18}$$

Essa equação traduz o *princípio do impulso e momento angulares para um ponto material*. Os momentos angulares inicial $(\mathbf{H}_O)_1$ e final $(\mathbf{H}_O)_2$ são definidos como o momento da quantidade de movimento do ponto material $(\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v})$ calculado nos instantes $t_1$ e $t_2$, respectivamente. O segundo termo do primeiro membro, $\Sigma \int \mathbf{M}_O\,dt$, é denominado *impulso angular*. Ele é determinado pela integração no tempo dos torques de todas as forças que agem no ponto material, do instante inicial $t_1$ ao instante final $t_2$. Como o momento de uma força em relação ao ponto $O$ é $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, o impulso angular pode ser expresso na forma vetorial como

$$\text{impulso angular} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\,dt \qquad (15.19)$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor de posição que se estende de $O$ ao ponto de aplicação de $\mathbf{F}$.

De maneira semelhante, usando-se a Equação 15.18, o princípio do impulso e momento angulares para um sistema de pontos materiais pode ser escrito como

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15.20)$$

onde o primeiro e o terceiro termos representam os momentos angulares do sistema $[\Sigma\mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i)]$, nos instantes $t_1$ e $t_2$, respectivamente. O segundo termo é a soma dos impulsos angulares dados a todos os pontos materiais, desde $t_1$ até $t_2$. Lembremos que esses impulsos são criados apenas pelos torques das forças externas agindo no sistema (para o *i-ésimo* ponto material $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$.).

***Formulação Vetorial.*** Usando-se (a) o princípio do impulso e quantidade de movimento e (b) o do impulso e momento angulares, é possível escrever duas equações que definem o movimento de um ponto material — as equações 15.3 e 15.18 reescritas a seguir:

$$\begin{aligned} m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt &= m\mathbf{v}_2 \\ (\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt &= (\mathbf{H}_O)_2 \end{aligned} \qquad (15.21)$$

***Formulação Escalar.*** Em geral, as equações anteriores podem ser expressas em componentes $x$, $y$, $z$, resultando em um total de seis equações escalares independentes. Se o movimento do ponto material se restringe ao plano $x$–$y$, temos três equações escalares independentes para expressar o movimento:

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt &= m(v_y)_2 \\ (H_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt &= (H_O)_2 \end{aligned} \qquad (15.22)$$

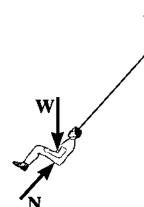
As duas primeiras equações representam o princípio do impulso e quantidade de movimento, discutido na Seção 15.1, e a terceira representa o princípio do impulso e momento angulares em relação ao eixo $z$.

***Conservação do Momento Angular.*** Quando os impulsos angulares (ou a sua soma) sobre o ponto material são nulos durante o intervalo de tempo $t_1$ a $t_2$, a Equação 15.18 reduz-se à seguinte forma:

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{15.23}$$

Essa equação traduz a chamada *conservação do momento angular*, estabelecendo que o momento angular permanece constante de $t_1$ a $t_2$. Obviamente, se nenhum impulso externo é aplicado ao ponto material, a quantidade de movimento e o momento angular são conservados. Todavia, há casos em que o momento angular é conservado, mas a quantidade de movimento, não. Um exemplo disso ocorre quando o ponto material está submetido apenas a uma *força central* (veja a Seção 13.7). Como se mostra na Figura 15.23, a força central **F** está sempre voltada para o ponto $O$. Logo, o impulso angular de **F** em relação ao eixo $z$ passando pelo ponto $O$ é sempre nulo, e, portanto, o momento angular, em relação a esse eixo, se conserva.






*Desprezando-se a resistência do ar, os ocupantes deste brinquedo em um parque de diversões estão submetidos à conservação do momento angular em relação ao eixo de rotação. Como mostra o diagrama de corpo livre, a reta de ação da força normal **N** do assento sobre a pessoa cruza com o eixo, enquanto a do peso **W** é paralela a ele. Não há qualquer impulso angular em relação ao eixo z.*

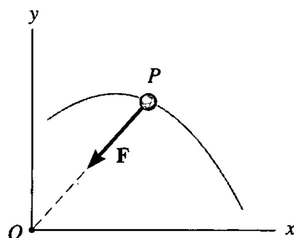



**Figura 15.23**

Da Equação 15.20, também podemos escrever a conservação do momento angular para um sistema de pontos:

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \tag{15.24}$$

Nesse caso, a soma deve incluir os momentos angulares de todos os pontos do sistema.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Ao se aplicar os princípios do impulso e momento angulares ou a conservação do momento angular, sugere-se a aplicação do seguinte procedimento.

***Diagrama de Corpo Livre***

- Construa o diagrama de corpo livre para determinar um eixo em relação ao qual o momento angular pode ser conservado. Para que isso ocorra, as retas de ação das forças (ou dos impulsos) devem ser paralelas ou passar pelo eixo de modo a criar um momento nulo durante o intervalo de tempo $t_1$ a $t_2$.
- A direção e o sentido das velocidades inicial e final também devem ser estabelecidos.
- Um procedimento alternativo consiste em desenhar os diagramas de impulso e momento para o ponto material.

***Equações de Momento***

- Aplique o princípio do impulso e momento angulares, $(\mathbf{H}_o)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$, ou, se apropriado, a conservação do momento angular, $(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$.

## EXEMPLO 15.13

O bloco com 5 kg e de dimensões desprezíveis apóia-se num plano horizontal liso (Figura 15.24*a*). Ele está ligado em $A$ a uma haste fina de massa desprezível, que por sua vez está presa a uma junta esférica em $B$. Se um torque $M = (3t)$ N · m, onde $t$ é dado em segundos, é aplicado à haste e uma força horizontal $P = 10$ N é aplicada ao bloco, determine a velocidade escalar do bloco 4 s após o início do movimento.

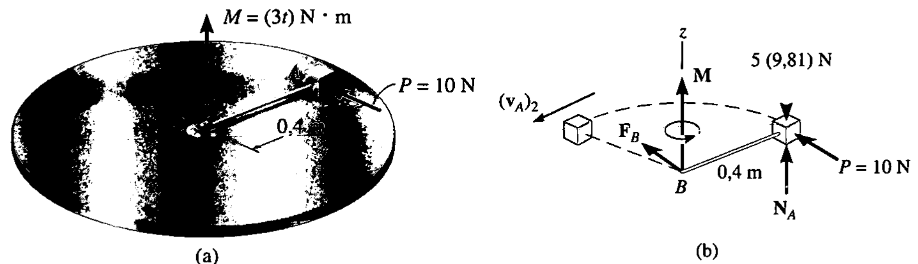



**Figura 15.24**

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Se consideramos o sistema formado pelo bloco e a haste (Figura 15.24*b*), então a força de reação $\mathbf{F}_B$ resultante na junta esférica pode ser eliminada da análise ao se aplicar o princípio do impulso e momento angulares, em relação ao eixo $z$. Procedendo dessa maneira, os impulsos angulares criados pelo peso e a força de reação normal $\mathbf{N}_A$ também são eliminados, pois elas são paralelas ao eixo $z$ e, portanto, criam um torque nulo em relação a esse eixo.

***Princípio do Impulso e Momento Angulares.***

$$(H_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_z \, dt = (H_z)_2$$

$$(H_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} M \, dt + r_{BA} P(\Delta t) = (H_z)_2$$

$$0 + \int_0^4 3t \, dt + (0{,}4 \text{ m})(10 \text{ N})(4 \text{ s}) = 5 \text{ kg}(v_A)_2 \, (0{,}4 \text{ m})$$

$$24 + 16 = 2(v_A)_2$$

$$(v_A)_2 = 20 \text{ m/s}$$

***Resposta***

## EXEMPLO 15.14

A bola de 0,8 lb mostrada na Figura 15.25*a* está presa a uma corda que passa por um orifício $A$ feito na mesa lisa. Inicialmente a bola está descrevendo uma trajetória circular de raio $r_1 = 1{,}75$ pé, de centro $A$, com velocidade $v_1 = 4$ pés/s. Aumenta-se, então, a força $\mathbf{F}$ na outra extremidade, de modo que esta passa a ter uma velocidade constante para baixo $v_c = 6$ pés/s. Determine (a) a velocidade da bola no instante em que $r_2 = 0{,}6$ pé e (b) o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ para diminuir a distância radial de $r_1$ a $r_2$. Despreze o tamanho da bola.

## SOLUÇÃO

***Parte (a) Diagrama de Corpo Livre.*** À medida que a bola se desloca de $r_1$ para $r_2$ (Figura 15.25*b*) a reta de ação da força **F** da corda sobre a bola sempre passa pelo eixo $z$, e o peso e a normal $\mathbf{N}_B$ são paralelos ao eixo. Logo, os torques (e, portanto, seus impulsos) são nulos em relação ao eixo, garantindo-se dessa maneira a conservação do momento angular em torno de $z$.

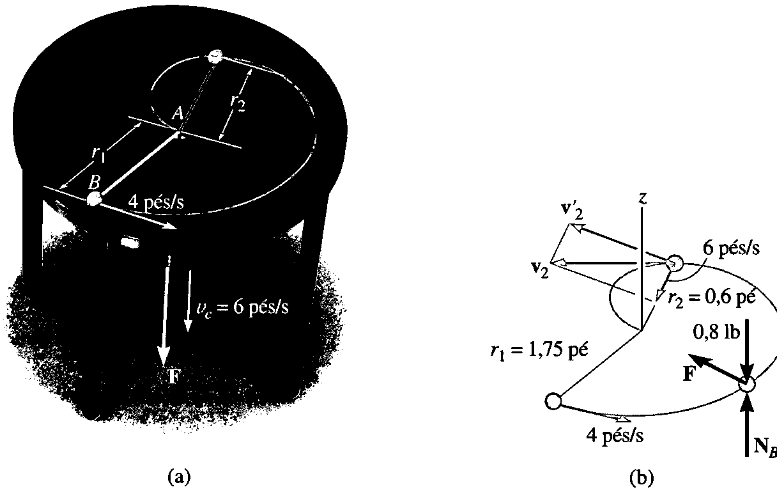



**Figura 15.25**

***Conservação do Momento Angular.*** A velocidade $\mathbf{v}_2$ da bola pode ser decomposta em dois termos. O componente radial é conhecido, 6 pés/s; todavia, ele não contribui para o momento angular em relação ao eixo $z$. Assim,

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v_2'$$

$$1{,}75 \text{ pé}\left(\frac{0{,}8 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)4 = 0{,}6 \text{ pé}\left(\frac{0{,}8 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)v_2'$$

$$v_2' = 11{,}67 \text{ pés/s}$$

A velocidade escalar da bola é

$$v_2 = \sqrt{(11{,}67)^2 + (6)^2}$$
$$= 13{,}1 \text{ pés/s}$$

***Parte (b).*** A única força que realiza trabalho sobre a bola é **F**. (A força normal e o peso não se movem verticalmente.) As energias cinéticas inicial e final da bola podem ser determinadas aplicando-se o princípio do trabalho e energia:

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{0{,}8 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(4 \text{ pés/s})^2 + U_F = \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}8 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(13{,}1 \text{ pés/s})^2$$

$$U_F = 1{,}94 \text{ pé}\cdot\text{lb}$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 15.15

O disco de 2 kg mostrado na Figura 15.26*a* está em repouso numa superfície horizontal lisa e está preso a uma corda elástica de rigidez $k_c$ = 20 N/m inicialmente não deformada. Se é dada ao disco uma velocidade $(v_D)1$ = 1,6 m/s, perpendicular à corda, determine a taxa com que a corda se alonga e a velocidade escalar do disco no instante em que a corda está deformada de 0,2 m.

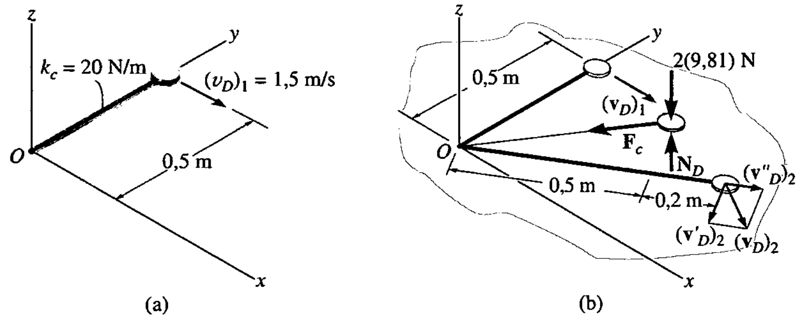



**Figura 15.26**

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Após o disco ter sido lançado, ele desliza ao longo da trajetória mostrada na Figura 15.26*b*. Por inspeção, o momento angular em relação ao ponto *O* (ou em relação ao eixo *z*) se conserva, pois nenhuma das forças produz impulso angular em relação ao eixo *z*. Quando a distância é 0,7 m, somente o componente $(\mathbf{v}'_D)_2$ produz momento angular em relação a *O*.

***Conservação do Momento Angular.*** O componente $(\mathbf{v}'_D)_2$ pode ser obtido aplicando-se a conservação do momento angular em relação a *O* (eixo *z*), isto é,

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$r_1 m_D (v_D)_1 = r_2 m_D (v'_D)_2$$

$$(\circlearrowleft +) \qquad 0{,}5\text{ m}(2\text{ kg})(1{,}5\text{ m/s}) = 0{,}7\text{ m}(2\text{ kg})(v'_D)_2$$

$$(v'_D)_2 = 1{,}07\text{ m/s}$$

***Conservação da Energia.*** A velocidade do disco pode ser obtida aplicando-se a equação da conservação da energia no ponto onde o disco foi lançado e no ponto onde a corda se alonga de 0,2 m.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(1{,}5\text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2}(20\text{ N/m})(0{,}2\text{ m})^2$$

Assim,

$$(v_D)_2 = 1{,}36\text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Tendo-se determinado $(v_D)_2$ e o componente $(v'_D)_2$, a taxa de alongamento da corda $(v''_D)_2$ pode ser calculada pelo teorema de Pitágoras:

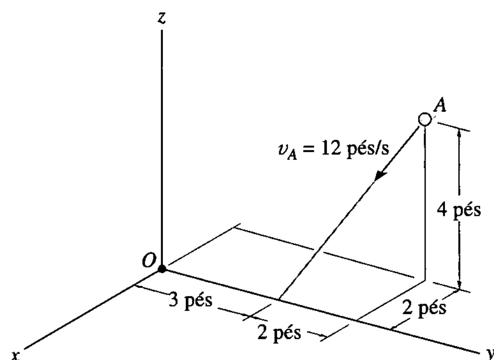
$$(v''_D)_2 = \sqrt{(v_D)_2^2 - (v'_D)_2^2}$$

$$= \sqrt{(1,36)^2 - (1,07)^2}$$

$$= 0,838 \text{ m/s}$$ ***Resposta***

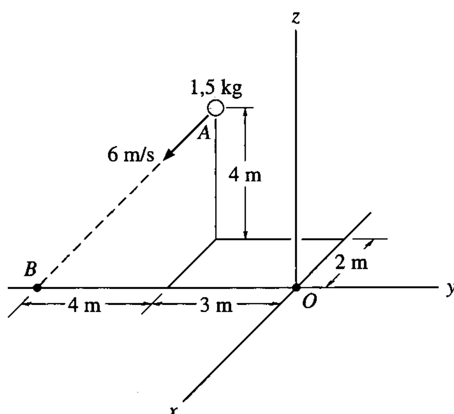
## PROBLEMAS

**15.90.** Determine o momento angular do ponto material $A$ de 2 lb, em relação ao ponto $O$. Use uma solução vetorial cartesiana.




**Problema 15.90**

**15.91.** Determine o momento angular $\mathbf{H}_O$ do ponto material, em relação a $O$.



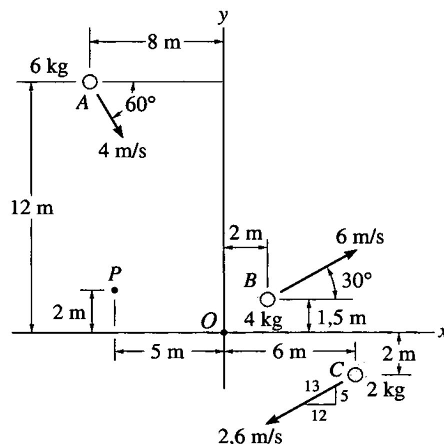

**Problema 15.91**

***15.92.** Determine o momento angular $\mathbf{H}_O$ de cada um dos pontos materiais, em relação a $O$.

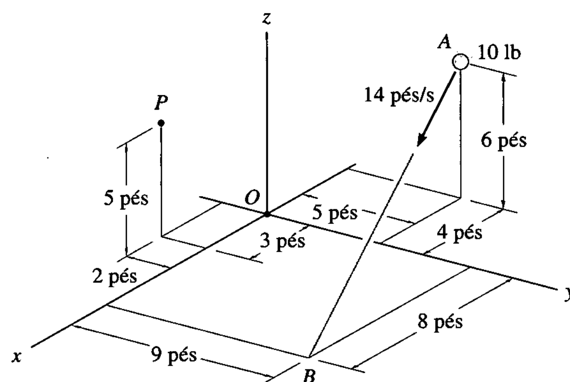
**15.93.** Determine o momento angular $\mathbf{H}_P$ de cada um dos pontos materiais, em relação a $P$.

**15.94.** Determine o momento angular $\mathbf{H}_O$ do ponto material, em relação ao ponto $O$.

**15.95.** Determine o momento angular $\mathbf{H}_P$ do ponto material, em relação ao ponto $P$.

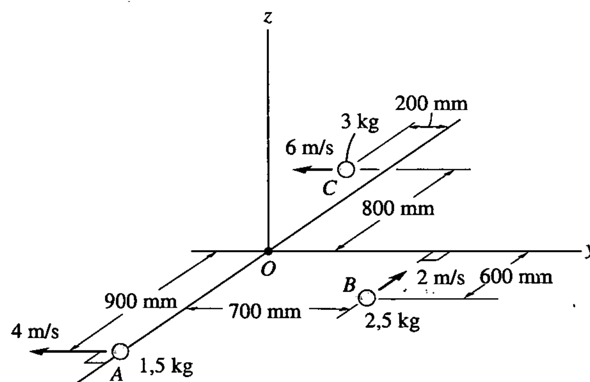



**Problemas 15.92/93**




**Problemas 15.94/95**

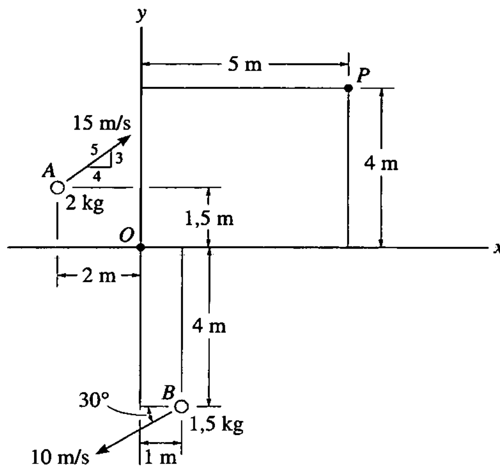
***15.96.** Determine o momento angular $\mathbf{H}_O$ para o sistema de três pontos materiais, em relação ao ponto $O$. Os três pontos materiais estão se movendo no plano $x$–$y$.




**Problema 15.96**

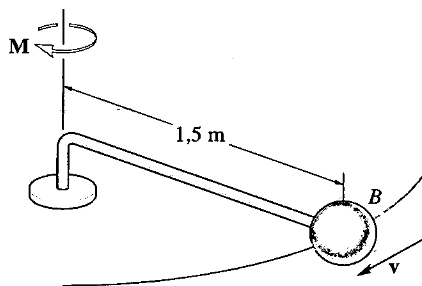
**15.97.** Determine o momento angular $\mathbf{H}_O$ para cada um dos dois pontos materiais, em relação ao ponto $O$. Use uma solução escalar.

**15.98.** Determine o momento angular $\mathbf{H}_P$ de cada um dos pontos materiais, em relação ao ponto $P$. Use uma solução escalar.



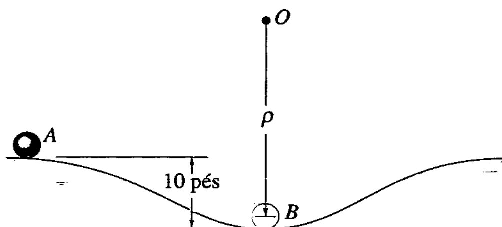

**Problemas 15.97/98**

**15.99.** A bola $B$ de 10 kg está ligada à extremidade de uma haste de massa desprezível. Se a haste está submetida a um torque $M = (3t^2 + 5t + 2)$ N · m, onde $t$ é expresso em segundos, determine a velocidade da bola quando $t = 2$ s. A bola tem velocidade de 2 m/s quando $t = 0$.



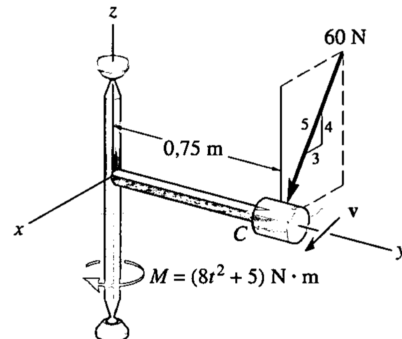

**Problema 15.99**

***15.100.** Uma bola de 3 lb é abandonada a partir do repouso em $A$. A bola escorrega sem atrito ao longo da curva mostrada na figura. Se a bola exerce uma força normal de 5 lb sobre a trajetória quando ela alcança o ponto $B$, determine o momento angular da bola, em relação ao centro de curvatura, ponto $O$. *Dica:* é necessário determinar o raio curvatura em $B$.



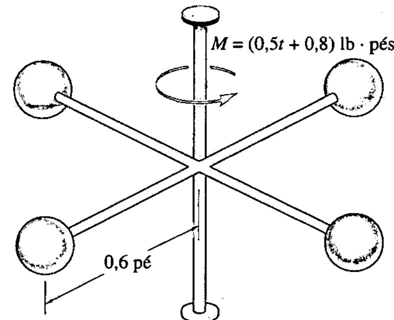

**Problema 15.100**

**15.101.** O pequeno cilindro $C$ tem massa de 10 kg e está preso à extremidade da haste de massa desprezível. A estrutura está submetida a um binário de momento $M = (8t^2 + 5)$ N · m, onde $t$ é dado em segundos, e o cilindro, a uma força de 60 N que está sempre orientada como se indica na figura. Determine a velocidade escalar do cilindro quando $t = 2$ s. O cilindro tem velocidade $v_0 = 2$ m/s quando $t = 0$.




**Problema 15.101**

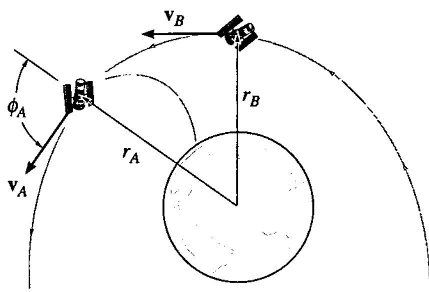
**15.102.** Quatro esferas (cada uma com 5 lb) estão rigidamente ligadas a uma estrutura rígida de massa desprezível formada por barras cruzadas fixas num eixo vertical. Aplica-se ao sistema um binário de momento $M = (0{,}5t + 0{,}8)$ lb · pés, onde $t$ é dado em segundos, como se mostra na figura. Determine a velocidade de cada uma das esferas 4 s após iniciado o movimento. Despreze o tamanho das esferas.



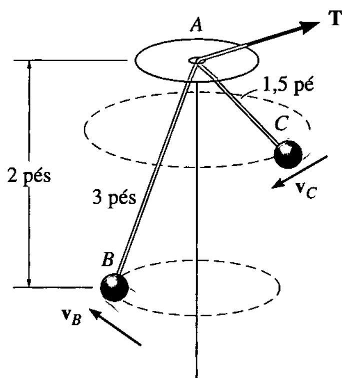

**Problema 15.102**

**15.103.** Lança-se um satélite artificial terrestre de 700 lb numa trajetória de vôo livre, com velocidade inicial $v_A = 10$ km/s, quando a distância ao centro da Terra é $r_A = 15$ Mm. Se o ângulo de lançamento nessa posição é $\phi_A = 70°$, determine a velocidade $v_B$ e a menor distância $r_B$ do satélite ao centro da Terra. A massa da Terra é $M_e = 5{,}976(10^{24})$ kg. *Dica:* sob essas condições, o satélite está submetido apenas à força gravitacional terrestre, $F = GM_e m_s/r^2$ (Equação 13.1). Para realizar parte da solução, use a conservação da energia (veja o Problema 14.97).

***15.104.** A bola $B$ de 5 lb está descrevendo uma trajetória circular, presa a uma corda $AB$ de 3 pés de comprimento e passando pelo orifício $A$ situado 2 pés acima do plano do movimento. Se um comprimento de 1,5 pé de corda é puxado através do orifício, determine a velocidade da bola quando ela passa a se movimentar na trajetória circular $C$.



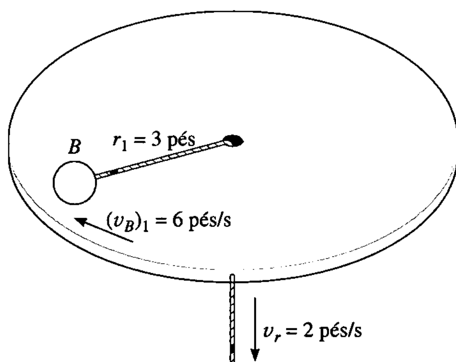

**Problema 15.103**




**Problema 15.104**

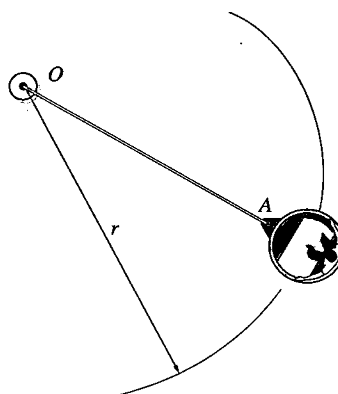
**15.105.** Uma bola $B$ de 4 lb desloca-se ao longo de uma circunferência de raio $r_1 = 3$ pés com velocidade $(v_B)_1 = 6$ pés/s. Se a corda é puxada para baixo com velocidade constante $v_r = 2$ pés/s, determine a velocidade da bola no instante em que $r_2 = 2$ pés. Que trabalho deve ser realizado para puxar a corda? Despreze o atrito e o tamanho da bola.

**15.106.** Uma bola $B$ de 4 lb desloca-se ao longo de uma circunferência de raio $r_1 = 3$ pés com velocidade $(v_B)_1 = 6$ pés/s. Se a corda é puxada para baixo com velocidade constante $v_r = 2$ pés/s, determine quanto tempo é necessário para a bola alcançar a velocidade de 12 pés/s. Qual é a distância $r_2$ da bola ao orifício nessa situação? Despreze o atrito e o tamanho da bola.



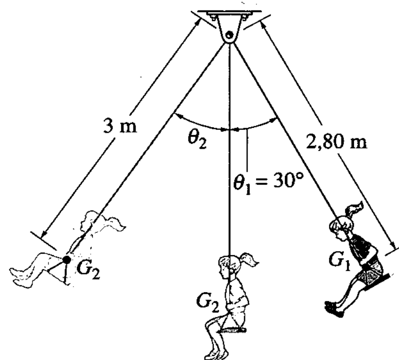

**Problemas 15.105/106**

**15.107.** Um brinquedo de um parque de diversões consiste em um carrinho preso a um cabo $OA$. O carrinho se desloca numa trajetória circular horizontal a uma velocidade $v_1 = 4$ pés/s e distância $r = 12$ pés. O cabo é, então, puxado a uma taxa constante de 0,5 pé/s. Determine a velocidade do carrinho ao fim de 3 s.



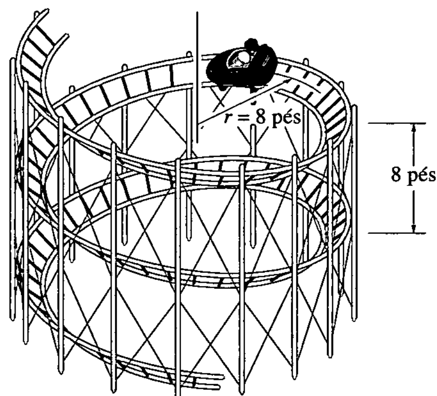

**Problema 15.107**

***15.108.** Uma criança de 50 kg mantém suas pernas esticadas desde a posição de retorno $\theta_1 = 30°$ até chegar ao ponto mais baixo $\theta = 0°$. Nesse trajeto o centro de massa está situado no ponto $G_1$. Todavia, ao passar pelo ponto mais baixo $\theta = 0°$, a menina encolhe *repentinamente* as pernas, deslocando seu centro de massa para a posição $G_2$. Determine sua velocidade devido a esse movimento súbito, assim como o ângulo $\theta_2$ do ponto de retorno alcançado à esquerda. Considere que o corpo da menina é um ponto material.



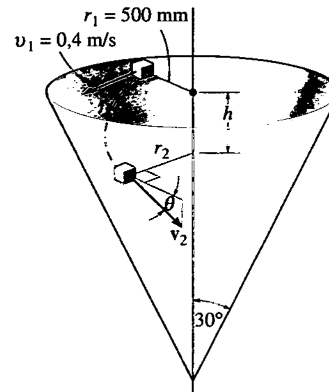

**Problema 15.108**

**15.109.** O carrinho de 800 lb parte do repouso e se desloca sobre os trilhos que definem uma hélice cilíndrica. Se a hélice desce 8 pés para cada volta completa do carrinho, determine a velocidade deste ao fim de 4 s. Quanto o carrinho desce nesse tempo? Despreze o atrito e o tamanho do carrinho.




**Problema 15.109**

**15.110.** Comunica-se a um bloco de 0,1 kg uma velocidade horizontal $v_1 = 0{,}4$ m/s quando na posição $r_1 = 500$ mm. O bloco desliza sobre uma superfície cônica lisa. Determine a distância $h$ que ele deve descer para atingir a velocidade $v_2 = 2$ m/s. Que ângulo $\theta$ a tangente à trajetória forma com a horizontal?




**Problema 15.110**

## *15.8 FLUIDOS EM ESCOAMENTO ESTACIONÁRIO

O conhecimento das forças desenvolvidas em fluidos que escoam em regime estacionário ou permanente é importante no projeto e análise de turbinas, bombas, hélices e ventiladores. Para ilustrar como o princípio do impulso e quantidade de movimento pode ser usado para determinar essas forças, consideremos o desvio do escoamento estacionário de um fluido (líquido ou gás) causado por um tubo fixo (Figura 15.27*a*). O fluido entra no tubo com velocidade $\mathbf{v}_A$ e o deixa com velocidade $\mathbf{v}_B$. Os diagramas de impulso e quantidade de movimento para o fluido são mostrados na Figura 15.27*b*. A força $\Sigma\mathbf{F}$, mostrada no diagrama de impulso, representa a resultante de todas as forças externas que agem no fluido. É este carregamento que dá ao fluido um impulso, graças ao qual a quantidade de movimento inicial se modifica em módulo e direção. Como o escoamento é estacionário, $\Sigma\mathbf{F}$ é *constante* durante o intervalo de tempo $dt$. Durante esse intervalo de tempo, o fluido está em movimento, e, como resultado, uma pequena quantidade deste, com massa $dm$, está para entrar no tubo com velocidade $\mathbf{v}_A$ no instante $t$. Se este elemento de massa e a massa de fluido no tubo são considerados como um 'sistema fechado', então no instante $t + dt$ um elemento de massa $dm$ deve deixar o tubo com velocidade $\mathbf{v}_B$. O fluido no interior do tubo tem massa $m$ e uma *velocidade média* $\mathbf{v}$ que é constante durante o intervalo de tempo $dt$. Aplicando o princípio do impulso e quantidade de movimento ao fluido, temos

$$dm\,\mathbf{v}_A + m\mathbf{v} + \Sigma\mathbf{F}\,dt = dm\,\mathbf{v}_B + m\mathbf{v}$$

***Força Resultante.*** Resolvendo a equação acima para a força resultante, obtemos

$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)} \qquad (15.25)$$

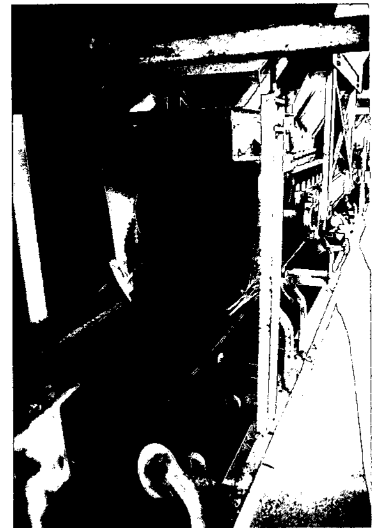
Caso o movimento do fluido possa ser representado no plano $x$–$y$, torna-se conveniente expressar a Equação 15.25 na forma de duas equações escalares correspondendo aos seus componentes $x$ e $y$, isto é,

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma F_x &= \frac{dm}{dt}(v_{Bx} - v_{Ax})\\ \Sigma F_y &= \frac{dm}{dt}(v_{By} - v_{Ay})\end{aligned}} \qquad (15.26)$$

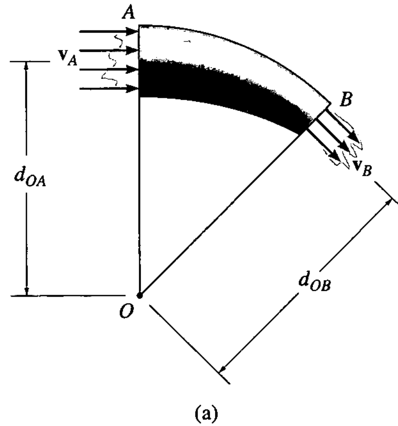
O termo $dm/dt$ é denominado *fluxo de massa* e indica a quantidade constante de fluido que escoa para o interior ou do interior do tubo, por unidade de tempo. Se as áreas das seções transversais e as densidades do fluido na entrada $A$ e na saída $B$ são $A_A$, $\rho_A$ e $A_B$, $\rho_B$, respectivamente (Figura 15.27*c*), então a *continuidade da massa* exige que $dm = \rho\, dV = \rho_A(ds_A\, A_A) = \rho_B(ds_B\, A_B)$. Logo, durante o tempo $dt$, tem-se

$$\frac{dm}{dt} = \rho_A v_A A_A = \rho_B v_B A_B = \rho_A Q_A = \rho_B Q_B \qquad (15.27)$$

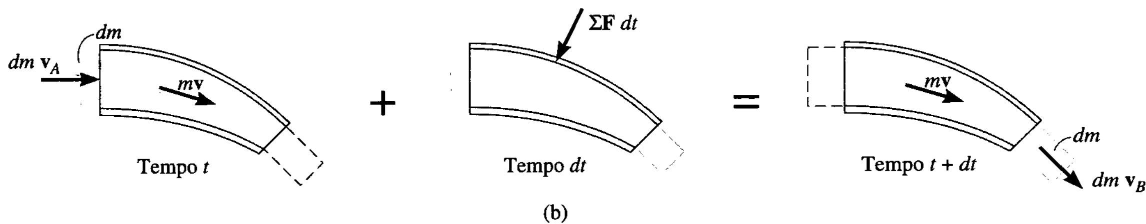
pois $v_A = ds_A/dt$ e $v_B = ds_B/dt$. Na Equação 15.27, $Q = vA$ é a *vazão*, que mede o volume de fluido que escoa por unidade de tempo.



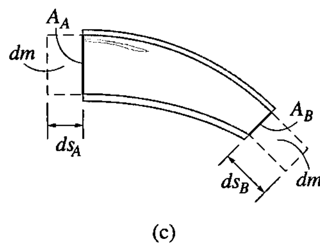
*A esteira transportadora fornece as forças de atrito sobre o cascalho, alterando sua quantidade de movimento e, assim, propiciando o seu trajeto horizontal sobre a esteira.*




(a)

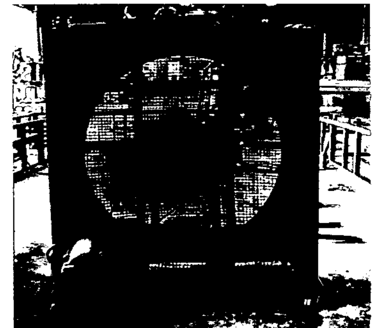



(b)




(c)

**Figura 15.27**



*Em um dos lados deste ventilador o ar está essencialmente em repouso. Ao passar através das lâminas sua quantidade de movimento aumenta. Para ocorrer esse aumento, as lâminas devem exercer um empuxo horizontal na corrente de ar. À medida que as lâminas giram cada vez mais rápido, o empuxo oposto (mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto) produzido pelo ar sobre as lâminas começa a superar a resistência de rolamento das rodas e põe em movimento toda a estrutura do ventilador.*

***Momento Resultante.*** Em alguns casos é necessário obter as forças de reação sobre o dispositivo que contém o fluido. Se a Equação 15.25 não fornece informação suficiente para isso, devemos usar o princípio do impulso e momento angulares. A formulação desse princípio aplicado a fluidos em escoamento pode ser obtida da Equação 15.17, $\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, que, em palavras, se traduz por: o torque de todas as forças externas que agem no sistema, em relação ao ponto $O$, é igual à derivada temporal do momento angular, em relação a esse mesmo ponto. No caso do tubo mostrado na Figura 15.27*a*, o escoamento é estacionário e pode ser tomado no plano $x$–$y$; temos, portanto:

$$(\circlearrowleft +) \qquad \boxed{\Sigma M_O = \frac{dm}{dt}(d_{OB}v_B - d_{OA}v_A)} \qquad (15.28)$$

onde os braços de momento, $d_{OB}$ e $d_{OA}$, estendem-se de $O$ aos *centros geométricos* ou *centróides* das aberturas $A$ e $B$.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Problemas que envolvem escoamento estacionário podem ser resolvidos pelo seguinte procedimento.

***Diagrama Cinemático***

- Se o dispositivo está *em movimento*, muitas vezes é útil desenhar um *diagrama cinemático* para determinar as velocidades de entrada e saída do fluido no dispositivo, uma vez que haverá *uma análise de movimento relativo.*
- As velocidades $v_A$ e $v_B$ devem ser medidas por um observador fixo num referencial inercial.
- Uma vez determinada a velocidade do fluido em escoamento no dispositivo, usa-se a Equação 15.27 para se calcular o fluxo de massa.

***Diagrama de Corpo Livre***

- Desenhe um diagrama de corpo livre para o dispositivo que está direcionando o fluido em escoamento para estabelecer as forças externas (com resultante $\Sigma\mathbf{F}$) agindo nele. Essas forças externas devem incluir as reações de suporte, o peso do dispositivo e o fluido nele contido, as forças de pressão estática do fluido nas seções de entrada e de saída do tubo.†

***Equações do Escoamento Estacionário***

- Aplique as equações do escoamento estacionário (equações 15.26 e 15.28), usando os componentes apropriados para velocidades e força mostrados nos diagramas cinemático e de corpo livre.

† No sistema SI a unidade de pressão é o *pascal* (Pa); 1 Pa = 1 N/m².

## EXEMPLO 15.16

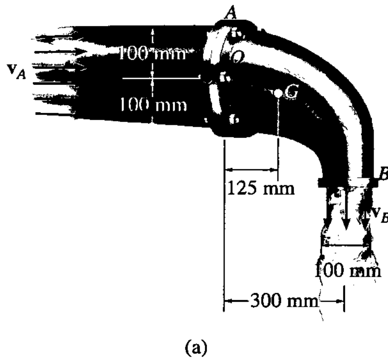



**Figura 15.28**

Determine os componentes da reação que a flange fixa $A$ exerce no cotovelo mostrado na Figura 15.28*a*, se a água escoando pelo tubo está submetida a uma pressão manométrica estática de 100 kPa em $A$. A descarga em $B$ é $Q_B$ = 0,2 m³/s. A água tem densidade $\rho_a$ = 1.000 kg/m³, e o cotovelo e a água nele contida têm massa de 20 kg e centro de massa em $G$.

### SOLUÇÃO

Usando-se um referencial inercial fixo, as velocidades do escoamento em $A$ e $B$ e o fluxo de massa podem ser determinados pela Equação 15.27. Uma vez que a densidade da água é constante, $Q_A = Q_B = Q$. Logo,

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w Q = (1.000\ \text{kg/m}^3)(0{,}2\ \text{m}^3/\text{s}) = 200\ \text{kg/s}$$

$$v_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0{,}2\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}05\ \text{m})^2} = 25{,}46\ \text{m/s}\downarrow$$

$$v_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0{,}2\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}1\ \text{m})^2} = 6{,}37\ \text{m/s}\rightarrow$$

***Diagrama de Corpo Livre.*** Como mostra o diagrama de corpo livre (Figura 15.28*b*), a conexão *fixa* em $A$ exerce no cotovelo um torque resultante $M_O$ e componentes de força $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$. Devido à pressão estática da água no tubo, a

força de pressão agindo no fluido em $A$ é $F_A = p_A A_A$. Como 1 kPa = 1.000 N/m²,

$$F_A = p_A A_A = [100(10^3)\ \text{N/m}^2][\pi(0{,}1\ \text{m})^2] = 3141{,}6\ \text{N}$$

A pressão estática em $B$ é nula, pois a água se descarrega à pressão atmosférica; isto é, a pressão medida por um manômetro em $B$ é igual a zero, $p_B = 0$.

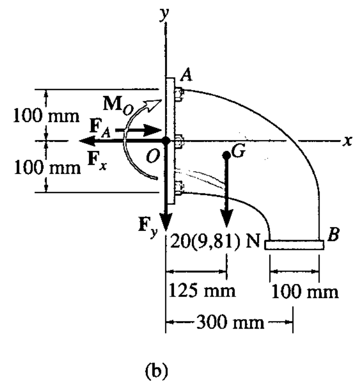



**Figura 15.28**

***Equações do Escoamento Estacionário***

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = \frac{dm}{dt}(v_{Bx} - v_{Ax}); \quad -F_x + 3141{,}6\ \text{N} = 200\ \text{kg/s}(0 - 6{,}37\ \text{m/s})$$

$$F_x = 4{,}41\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \frac{dm}{dt}(v_{By} - v_{Ay}); \quad -F_y - 20(9{,}81)\ \text{N} = 200\ \text{kg/s}(-25{,}46\ \text{m/s} - 0)$$

$$F_y = 4{,}90\ \text{kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Somando-se os torques em relação ao ponto $O$ (Figura 15.28*b*), então $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ e a força compressiva $\mathbf{F}_A$, bem como o momento da quantidade de movimento da água entrando em $A$ (Figura 15.28*a*), são eliminados. Logo,

$$\curvearrowleft + \Sigma M_O = \frac{dm}{dt}(d_{OB}v_B - d_{OA}v_A)$$

$$M_O + 20(9{,}81)\ \text{N}(0{,}125\ \text{m}) = 200\ \text{kg/s}[(0{,}3\ \text{m})(25{,}46\ \text{m/s}) - 0]$$

$$M_O = 1{,}50\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## EXEMPLO 15.17

Um jato de água com 2 pol de diâmetro e velocidade de 25 pés/s incide numa lâmina em movimento (Figura 15.29*a*). Se a lâmina está se afastando do jato com velocidade de 5 pés/s, determine os componentes horizontal e vertical da força que a lâmina exerce sobre a água. Que potência a água gera sobre a lâmina? A água tem peso específico $\gamma_a = 62{,}4$ lb/pé³.

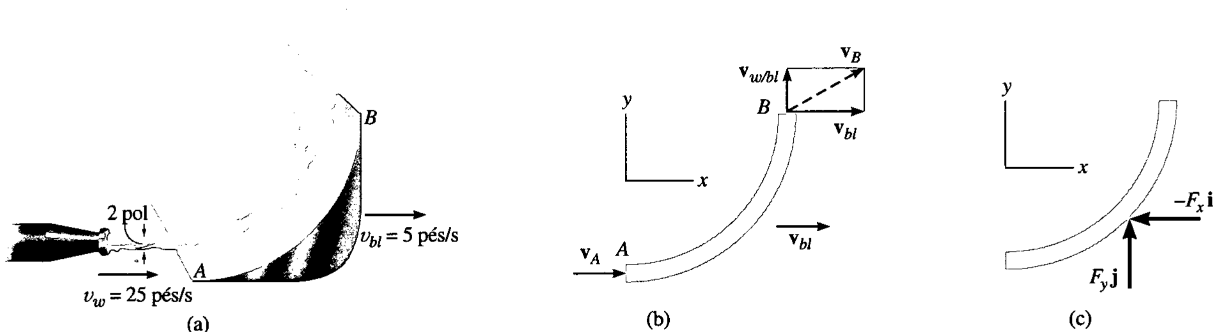



**Figura 15.29**

## SOLUÇÃO

***Diagrama Cinemático.*** Num referencial inercial fixo (Figura 15.29*b*), a velocidade com que a água chega à lâmina é

$$\mathbf{v}_A = \{25\mathbf{i}\}\ \text{pés/s}$$

A *velocidade relativa* do escoamento da água na lâmina é $\mathbf{v}_{w/bl} = \mathbf{v}_w - \mathbf{v}_{bl} = 25\mathbf{i} - 5\mathbf{i} = \{20\mathbf{i}\}$ pés/s. Como a lâmina se desloca com uma velocidade $\mathbf{v}_{bl} = \{5\mathbf{i}\}$ pés/s, a velocidade do escoamento em $B$ medida em $x$, $y$ é o vetor soma mostrado na Figura 15.29*b*. Nesse caso,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{bl} + \mathbf{v}_{w/bl}$$
$$= \{5\mathbf{i} + 20\mathbf{j}\} \text{ ft/s}$$

Assim, o fluxo de água *sobre* a lâmina que sofre uma variação de quantidade de movimento é

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w(v_{w/bl})A_A = \frac{62{,}4}{32{,}2}(20)\left[\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\right] = 0{,}846 \text{ slug/s}$$

***Diagrama de Corpo Livre.*** O diagrama de corpo livre de uma porção de água agindo na lâmina pode ser visto na Figura 15.29*c*. O peso da água será desprezado no cálculo, pois essa força é pequena se comparada com os componentes reativos $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$.

***Equações do Escoamento Estacionário***

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$
$$-F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = 0{,}846(5\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 25\mathbf{i})$$

Igualando os respectivos componentes **i** e **j**, temos

$$F_x = 0{,}846(20) = 16{,}9 \text{ lb} \leftarrow$$ ***Resposta***

$$F_y = 0{,}846(20) = 16{,}9 \text{ lb} \uparrow$$ ***Resposta***

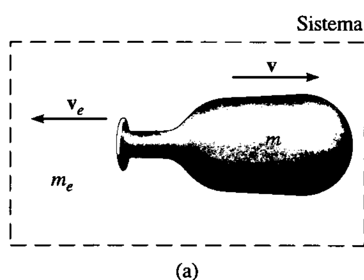
A água exerce forças opostas (mesmos módulos, mesmas direções e sentidos opostos) na lâmina.

Como a força da água que faz a lâmina mover-se horizontalmente para a frente, com velocidade de 5 pés/s, é $F_x = 16{,}9$ lb, então, da Equação 14.10, a potência desenvolvida é

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}; \qquad P = \frac{16{,}9 \text{ lb}(5 \text{ pés/s})}{550 \text{ hp/(pés}\cdot\text{lb/s)}} = 0{,}154 \text{ hp}$$ ***Resposta***

## *15.9 PROPULSÃO COM MASSA VARIÁVEL

Na seção anterior consideramos o caso em que uma quantidade *constante* de massa *dm* entra e sai de um 'sistema fechado'. Há, todavia, dois casos importantes envolvendo escoamento de massa, que são representados por um sistema que ganha ou perde massa. Nesta seção discutiremos cada um desses casos separadamente.



(a)

**Figura 15.30**

***Um Sistema que Perde Massa.*** Consideremos um dispositivo tal como um foguete que num dado instante tem massa $m$ e está se movendo para a frente com velocidade $\mathbf{v}$ (Figura 15.30*a*). Nesse mesmo instante, o dispositivo está expelindo uma quantidade de massa $m_e$ com velocidade $\mathbf{v}_e$. Para a análise, o 'sistema fechado' inclui *ambas as massas*: *a do dispositivo, m, e a expelida, $m_e$.* Os diagramas de impulso e quantidade de movimento para o sistema estão na Figura 15.30*b*. Durante o tempo *dt*, a velocidade do dispo-

sitivo aumenta de $\mathbf{v}$ para $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, pois uma quantidade de massa $dm_e$ é ejetada. Esse acréscimo de velocidade para a frente, todavia, não muda a velocidade $\mathbf{v}_e$ da massa expelida, pois essa massa se desloca a uma velocidade constante assim que é ejetada. Os impulsos são criados por $\Sigma\mathbf{F}_s$, que representa a resultante de todas as forças externas *agindo no sistema* na direção e no sentido do movimento. Essa força resultante *não inclui* a força causadora do movimento do dispositivo, pois esta última (denominada *empuxo*) é uma força *interna*; isto é, as forças de empuxo agem com igual intensidade mas em sentidos opostos no dispositivo (de massa $m$) e na matéria expelida (de massa $m_e$).[9] Aplicando o princípio do impulso e quantidade de movimento ao sistema (Figura 15.30*b*), temos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad mv - m_e v_e + \Sigma F_s\, dt = (m - dm_e)(v + dv) - (m_e + dm_e)v_e$$

ou

$$\Sigma F_s\, dt = -v\, dm_e + m\, dv - dm_e\, dv - v_e\, dm_e$$

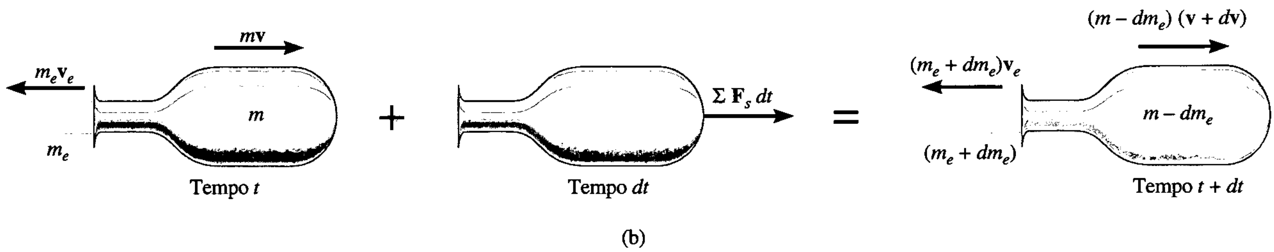



**Figura 15.30**

Sem perda de precisão, o terceiro termo no segundo membro pode ser desprezado, pois é um termo diferencial de 'segunda ordem'. Dividindo por $dt$ temos

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - (v + v_e)\frac{dm_e}{dt}$$

A velocidade relativa do dispositivo do ponto de vista de um observador movendo-se com a matéria ejetada é $v_{D/e} = v + v_e$, e, portanto, o resultado final pode ser escrito como

$$\boxed{\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}} \qquad (15.29)$$

Nessa equação, o termo $dm_e/dt$ representa a taxa com que a massa está sendo ejetada.

Para ilustrarmos o emprego da Equação 15.29, consideremos o foguete mostrado na Figura 15.31, que tem peso $\mathbf{W}$ e está subindo contra uma força de arrasto atmosférico $\mathbf{F}_D$. O sistema considerado consiste na massa do foguete e na massa do gás ejetado $m_e$. Aplicando a Equação 15.29 a esse sistema, obtemos

$$(+\uparrow) \qquad -F_D - W = \frac{W}{g}\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$$

[9] $\Sigma\mathbf{F}_s$ representa a força resultante externa agindo no sistema, que é diferente de $\Sigma\mathbf{F}$, a força resultante que age somente no dispositivo.

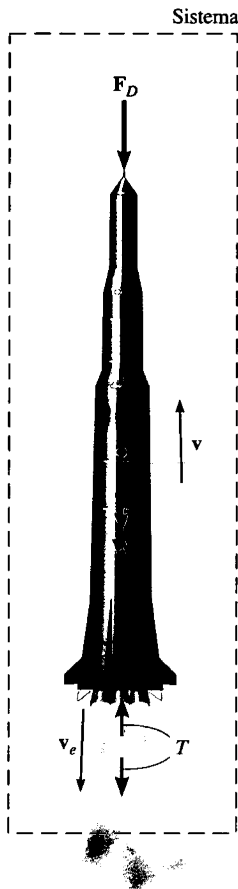



Figura 15.31

O último termo da equação anterior representa o empuxo **T** que o material expelido exerce no foguete (Figura 15.31). Lembrando-se de que $dv/dt = a$, pode-se escrever

$$(+\uparrow) \qquad T - F_D - W = \frac{W}{g}a$$

Desenhando-se um diagrama de corpo livre do foguete torna-se evidente que essa equação representa uma aplicação de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

***Um Sistema com Ganho de Massa.*** Um dispositivo como uma escavadeira ou uma pá pode ganhar massa à medida que se move para a frente. Por exemplo, consideremos o dispositivo mostrado na Figura 15.32*a* que tem massa $m$ e se move para a frente com velocidade **v**. Em seu movimento o dispositivo coleta um feixe de partículas, que num dado instante tem massa $m_i$. A velocidade de escoamento $\mathbf{v}_i$ da massa injetada é constante e independente da velocidade **v** (supõe-se que $v > v_i$). O sistema a ser considerado consiste nas massas do dispositivo e das partículas injetadas. Os diagramas de impulso e quantidade de movimento para esse sistema estão na Figura 15.32*b*. Além do aumento de massa $dm_i$ ganha pelo dispositivo, há um aumento de velocidade $d\mathbf{v}$ durante o intervalo de tempo $dt$. Esse aumento de velocidade é causado pelo impulso criado por $\Sigma\mathbf{F}_s$, a resultante de todas as forças externas *agindo no sistema*, na direção do movimento. O somatório de forças não inclui a força retardadora da massa injetada que age sobre o dispositivo. Por quê? Aplicando o princípio do impulso e quantidade de movimento, temos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad mv + m_i v_i + \Sigma F_s\,dt = (m + dm_i)(v + dv) + (m_i - dm_i)v_i$$

Usando-se o mesmo procedimento aplicado no caso anterior, pode-se reescrever a equação acima como

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} + (v - v_i)\frac{dm_i}{dt}$$

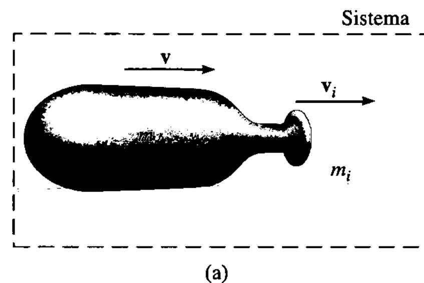
Como a velocidade do dispositivo relativamente a um observador que se move com as partículas do feixe é $v_{D/i} = v - v_i$, o resultado anterior pode ser reescrito como

$$\boxed{\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}} \qquad (15.30)$$

onde $dm_i/dt$ é a taxa de massa injetada no dispositivo. O último termo dessa equação representa a intensidade da força **R**, que o material injetado *exerce no dispositivo*. Como $d\mathbf{v}/dt = a$, a Equação 15.30 se torna

$$\Sigma F_s - R = ma$$

Essa é uma aplicação de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (Figura 15.32*c*).




(a)

Figura 15.32

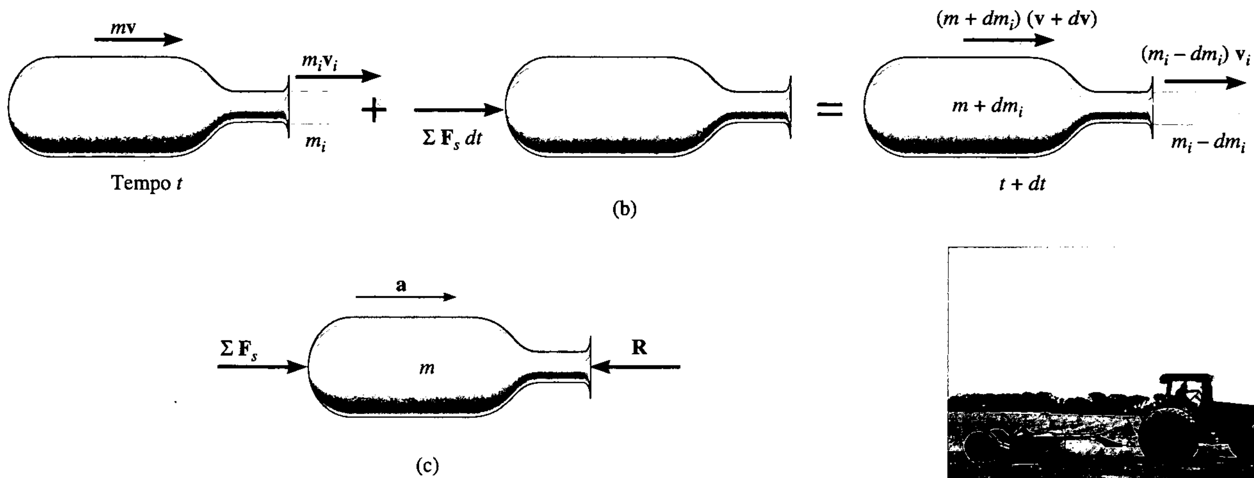



**Figura 15.32**



*A caixa niveladora presa no trator representa um dispositivo que ganha massa. Se o trator mantém uma velocidade constante v, então $dv/dt = 0$ e, como a terra está inicialmente em repouso, $v_{D/i} = v$. Pela Equação 15.30, a força horizontal de tração sobre a caixa niveladora é então $T = 0 + v(dm/dt)$, onde $dm/dt$ é a taxa de acumulação de terra na caixa.*

Assim como no caso do escoamento estacionário, problemas que são resolvidos por meio das equações 15.29 e 15.30 devem ser acompanhados de diagramas de corpo livre. Com esses diagramas, pode-se determinar $\Sigma F_s$ para o sistema e isolar a força exercida no dispositivo pela corrente de partículas.

## EXEMPLO 15.18

A massa combinada inicial de um foguete e seu combustível é $m_0$. Uma massa total $m_f$ de combustível é consumida a uma taxa constante $dm_e/dt = c$ e expelida a uma velocidade constante $u$ relativa ao foguete. Determine a velocidade máxima do foguete, isto é, no instante em que o combustível se esgota. Despreze a variação do peso do foguete com a altitude e a força de arrasto provocada pelo ar. Considere o lançamento vertical, a partir do repouso.

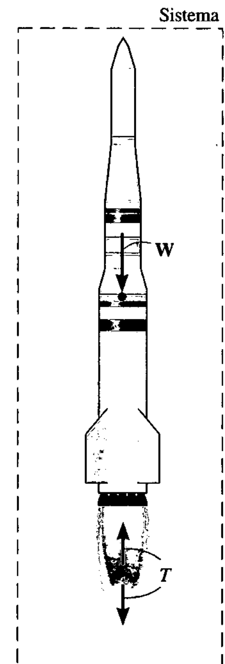



**Figura 15.33**

## SOLUÇÃO

Como o foguete perde massa durante o tempo de propulsão, a Equação 15.29 pode ser usada para resolver o problema. A única *força externa* agindo no sistema formado pelo foguete e por uma porção de massa ejetada é o peso **W** (Figura 15.33). Logo,

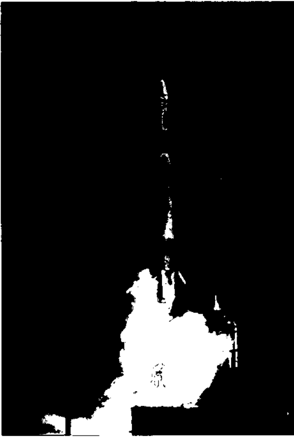
$$+\uparrow \Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}; \qquad -W = m\frac{dv}{dt} - uc \qquad (1)$$

A velocidade do foguete pode ser obtida por integração da equação anterior.

Em qualquer instante $t$ durante o vôo, a massa do foguete pode ser expressa como $m = m_0 - (dm_e/dt)t = m_0 - ct$. Como $W = mg$, a Equação 1 se torna

$$-(m_0 - ct)g = (m_0 - ct)\frac{dv}{dt} - uc$$

Separando as variáveis e integrando (lembre-se de que $v = 0$ em $t = 0$), obtemos



$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{uc}{m_0 - ct} - g\right) dt$$

$$v = -u \ln(m_0 - ct) - gt\Big|_0^t = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right) - gt \qquad (2)$$

Portanto,

$$m_f = \left(\frac{dm_e}{dt}\right)t' = ct'$$

$$t' = m_f/c$$

Substituindo na Equação 2, temos

$$v_{\text{máx}} = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right) - \frac{gm_f}{c} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## EXEMPLO 15.19

Uma corrente de comprimento $l$ (Figura 15.34$a$) tem uma massa $m$. Determine a intensidade da força **F** necessária para (a) levantar a corrente com uma velocidade constante $v_c$, partindo do repouso em $y = 0$, e (b) baixar a corrente com uma velocidade constante $v_c$, partindo do repouso em $y = l$.

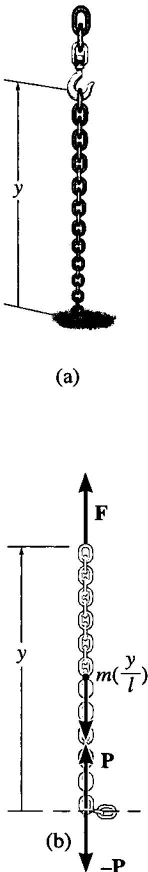



**Figura 15.34**

### SOLUÇÃO

***Parte (a).*** Conforme a corrente é levantada, todos os elos suspensos recebem um impulso repentino para baixo, para cada elo adicionado que se levanta do solo. Assim, a *parte suspensa* da corrente pode ser considerada um dispositivo que *está ganhando massa.*

O sistema a ser considerado é a porção de corrente de comprimento $y$ que está suspensa pela força **F**, em cada instante, incluindo-se o próximo elo, que está prestes a ser adicionado, mas que ainda está em repouso (Figura 15.34$b$). No conjunto de forças que agem nesse sistema *não estão incluídas* as forças internas **P** e $-$**P** entre o elo adicionado e a porção suspensa da corrente. Logo, $\Sigma F_s = F - mg(y/l)$.

Para se aplicar a Equação 15.30, também é necessário obter a taxa com que a massa está sendo adicionada ao sistema. A velocidade $\mathbf{v}_c$ da corrente é equivalente a $\mathbf{v}_{D/i}$. Por quê? Como $v_c$ é constante, $dv_c/dt = 0$ e $dy/dt = v_c$. Integrando, com o uso da condição inicial de que $y = 0$ em $t = 0$, obtemos $y = v_c t$. Assim, a massa do sistema em cada instante é $m_s = m(y/l) = m(v_c t/l)$, e, portanto, a taxa com que a massa é adicionada à corrente suspensa é dada por

$$\frac{dm_i}{dt} = m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$

Aplicando a Equação 15.30 ao sistema e usando os dados, temos

$$+\uparrow \Sigma F_s = m\frac{dv_c}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

$$F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0 + v_c m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$

Logo:

$$F = (m/l)(gy + v_c^2) \qquad \textit{Resposta}$$

***Parte (b).*** Quando a corrente está sendo baixada, os elos que estão sendo 'expelidos' (passando a ter velocidade nula) *não* comunicam impulso aos elos *restantes* ainda suspensos. Por quê? Assim, o sistema na Parte (a) não pode ser considerado. Por essa razão, usaremos a equação de movimento para obter a solução. No instante $t$ a porção de corrente ainda não depositada no solo tem comprimento $y$. A Figura 15.34$c$ mostra o diagrama de corpo livre para essa porção de corrente. Logo:

$+\uparrow \Sigma F = ma;$

$$F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0$$

$$F = mg\left(\frac{y}{l}\right) \qquad \textit{Resposta}$$

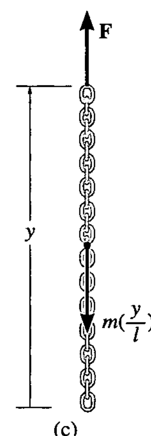
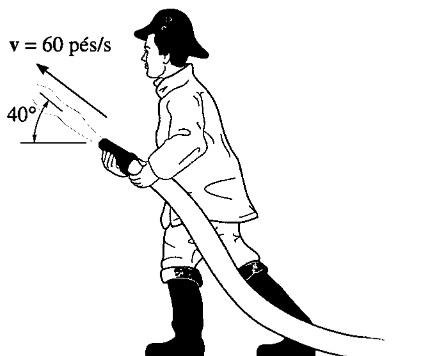



**Figura 15.34**

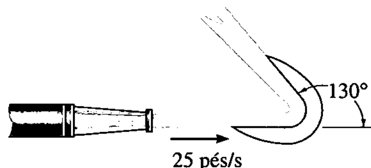
## PROBLEMAS

**15.111.** O bombeiro de 150 lb segura uma mangueira de 2 pol de diâmetro cujo bocal tem diâmetro de 1 pol. Se a velocidade da água ejetada é 60 pés/s, determine a força normal resultante e a força de atrito agindo nos pés do bombeiro. Despreze o peso da mangueira e da água no seu interior. $\gamma_a$ = 62,4 lb/pé$^3$.



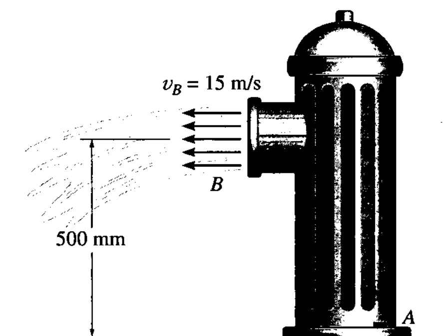

**Problema 15.111**

***15.112.** Um jato de água com área de seção transversal de 4 pol$^2$ atinge uma lâmina fixa com velocidade de 25 pés/s. Determine os componentes horizontal e vertical da força que a lâmina exerce na água. Considere que $\gamma_a$ = 62,4 lb/pé$^3$.



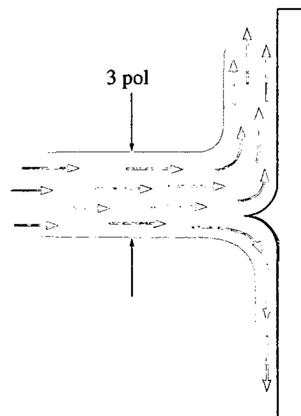

**Problema 15.112**

**15.113.** Água está escoando de um hidrante de 150 mm de diâmetro com velocidade $v_B$ = 15 m/s. Determine os componentes horizontal e vertical da força e o torque desenvolvido na base $A$, se a pressão estática (manométrica) nessa base é 50 kPa. O diâmetro do hidrante em $A$ é 200 mm. Considere $\rho_a$ = 1 t/m$^3$.



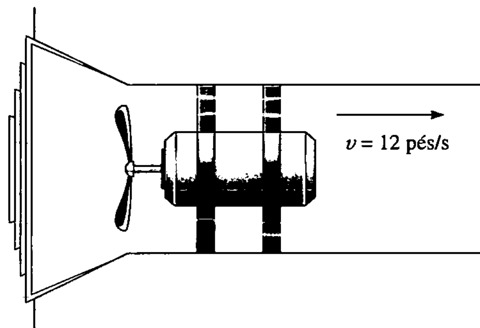

**Problema 15.113**

**15.114.** A lâmina divide o jato de água de 3 pol de diâmetro. Um quarto da água escoa para baixo, enquanto os outros três quartos escoam para cima, e o fluxo total é $Q$ = 0,5 pé$^3$/s. Determine os componentes horizontal e vertical da força exercida pelo jato sobre a lâmina. Considere $\gamma_a$ = 62,4 lb/pé$^3$.



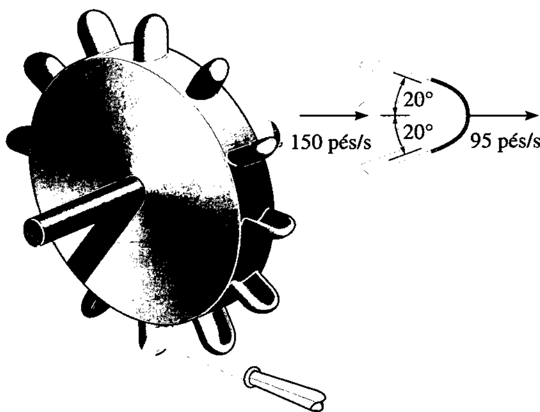

**Problema 15.114**

**15.115.** O ventilador puxa ar com velocidade de 12 pés/s. Se a área da seção transversal da passagem é de 2 pés$^2$, determine o empuxo horizontal sobre as pás. O peso específico do ar é $\gamma_a = 0{,}076$ lb/pé$^3$.




**Problema 15.115**

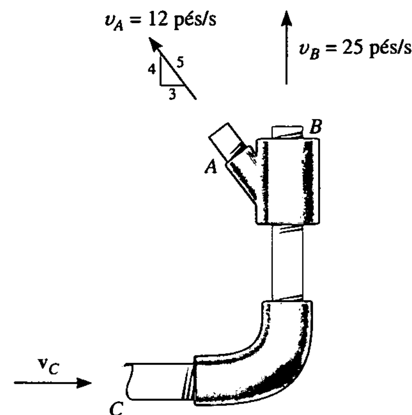
***15.116.** As palhetas na *roda de Pelton* estão submetidas a um jato de água de 2 pol de diâmetro e com velocidade de 150 pés/s. Se cada palheta se desloca a 95 pés/s quando atingida pela água, determine a potência desenvolvida pela roda. $\gamma_a = 62{,}4$ lb/pé$^3$.



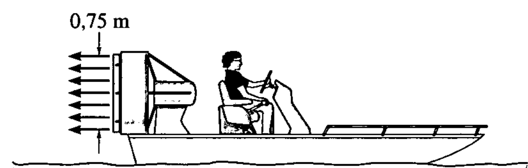

**Problema 15.116**

**15.117.** A pressão estática da água em $C$ é 40 lb/pol$^2$. Se a água escoa do tubo em $A$ e $B$ com velocidades $v_A = 12$ pés/s e $v_B = 25$ pés/s, respectivamente, determine os componentes horizontal e vertical da força exercida no cotovelo em $C$ necessária para manter o conjunto em equilíbrio. Despreze o peso do tubo e da água no seu interior. O tubo tem diâmetro de 0,75 pol em $C$ e os diâmetros em $A$ e $B$ são iguais, cada um com 0,5 pol. $\gamma_a = 62{,}4$ lb/pé$^3$.

**15.118.** O bote de 200 kg é movido por um ventilador que desenvolve uma corrente de ar de 0,75 m de diâmetro. Se o ventilador ejeta ar com velocidade de 14 m/s, medida relativamente ao bote, determine a aceleração inicial do bote se ele parte do repouso. Suponha que o ar tenha uma densidade constante $\rho_a = 1{,}22$ kg/m$^3$ e que o ar entrando no dispositivo esteja essencialmente em repouso. Despreze a força de arrasto da água.

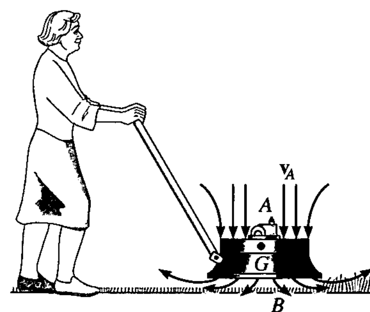



**Problema 15.117**



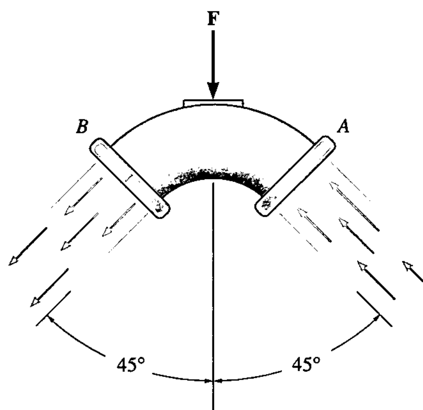

**Problema 15.118**

**15.119.** Um cortador de grama flutua muito próximo do solo. Para tanto, o ar é aspirado a uma velocidade de 6 m/s pela parte superior $A$, com seção transversal de área $A_A = 0{,}25$ m$^2$, e é expelido no solo pela parte inferior $B$, de área $A_B = 0{,}35$m$^2$. Se o ar em $A$ está submetido apenas à pressão atmosférica, determine a pressão do ar sobre o solo quando nenhuma carga é colocada sobre o seu cabo. A máquina tem 15 kg e centro de massa em $G$. Suponha que o ar tenha densidade constante $\rho_a = 1{,}22$ kg/m$^3$.



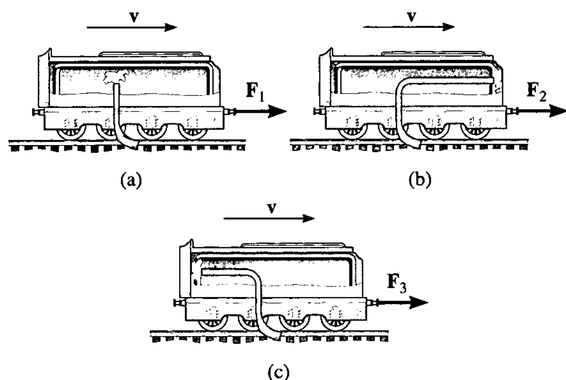

**Problema 15.119**

***15.120.** O cotovelo de um tubo enterrado (diâmetro de 5 pol) está submetido a uma pressão estática de 10 lb/pol$^2$. A velocidade da água passando pelo tubo é $v = 8$ pés/s. Supondo que as conexões em $A$ e $B$ não oferecem força de resistência vertical sobre o cotovelo, determine a força resultante vertical **F** que o solo deve exercer sobre ele para mantê-lo em equilíbrio. Despreze o peso do cotovelo e da água no seu interior. Considere $\gamma_a = 62{,}4$ lb/pé$^3$.




**Problema 15.120**

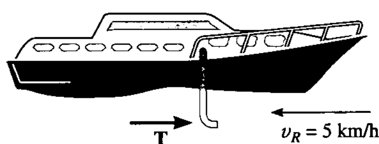
**15.121.** O carro é usado para retirar água entre os trilhos. Determine a força necessária para puxar o carro, mantendo-o a uma velocidade constante **v**, em cada um dos três casos. O tubo tem uma seção transversal de área $A$ e a densidade da água é $\rho_a$.




**Problema 15.121**

**15.122.** Uma lâmina limpa-trilho de uma locomotiva recolhe neve à taxa de 10 pés$^3$/s e a deposita no trem. Se a locomotiva se desloca a uma velocidade constante de 12 pés/s, determine a resistência ao movimento causada pelo recolhimento da neve. O peso específico da neve é $\gamma_n = 6$ lb/pé$^3$.

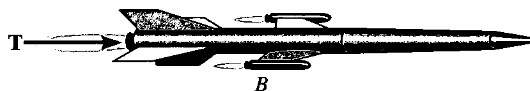
**15.123.** O barco tem uma massa de 180 kg e se desloca para a frente com uma velocidade de 70 km/h *relativa* ao rio. O rio flui no sentido oposto a 5 km/h. Se um tubo é colocado na água, como mostrado na figura, e coleta 40 kg de água em 80 s, determine o empuxo horizontal $T$ sobre o tubo devido ao recolhimento da água. Considere $\rho_a = 1$ Mg/m$^3$.




**Problema 15.123**

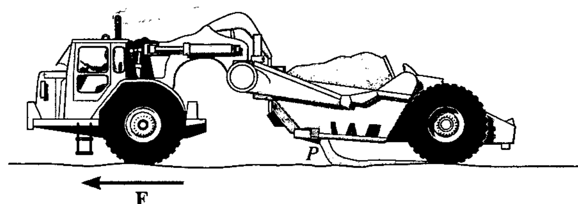
***15.124.** O segundo estágio de um foguete de dois estágios pesa 2.000 lb (vazio) e é separado do primeiro estágio com velocidade de 3.000 mi/h. O combustível no segundo estágio pesa 1.000 lb. Se esse combustível é consumido a uma taxa de 50 lb/s e ejetado com velocidade relativa de 8.000 pés/s, determine a aceleração do segundo estágio imediatamente após a ignição. Qual é a aceleração do foguete imediatamente antes do consumo total do combustível?

**15.125.** O míssil pesa 40.000 lb. O empuxo constante proporcionado pelo motor do turbojato é $T = 15.000$ lb. Dois foguetes auxiliares $B$ fornecem empuxo adicional. O propelente em cada foguete auxiliar é queimado a uma taxa de 150 lb/s, com velocidade relativa de saída de 3.000 pés/s. Se a massa do propelente for desprezada, determine a velocidade do míssil após os 4 s de duração da queima de combustível nos foguetes auxiliares. A velocidade inicial do míssil é 300 mi/h.



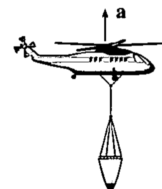

**Problema 15.125**

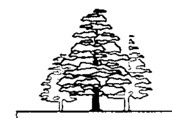
**15.126.** O veículo carrega 10 m$^3$ de areia cuja densidade é de 1.520 kg/m$^3$. A areia é descarregada horizontalmente através de uma abertura $P$ de 2,5 m$^2$. O descarregamento é feito a uma taxa de 900 kg/s, medido relativamente a $P$. Determine a força resultante de tração **F** nas rodas dianteiras, se a aceleração do veículo é de 0,1 m/s$^2$ quando metade da areia já foi descarregada. O veículo vazio tem massa de 30 t. Despreze qualquer resistência ao movimento para a frente, assim como as massas das rodas. As rodas traseiras movem-se livremente.




**Problema 15.126**

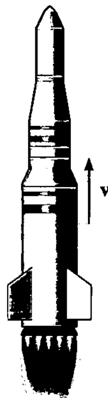
**15.127.** O helicóptero de 10 t carrega uma caçamba contendo 500 kg de água, que é usada em combate a incêndios. Se ele paira no ar em uma posição fixa e então libera 50 kg/s de água a 10 m/s, medidos relativamente ao helicóptero, determine a aceleração vertical para cima experimentada pelo helicóptero durante a liberação da água.



**Problema 15.127**

***15.128.** O foguete tem massa de 65 t, incluindo o combustível. Determine a taxa constante com a qual o combustível deve ser queimado para que seu empuxo forneça ao foguete uma velocidade de 200 pés/s em 10 s, partindo do repouso. O combustível é expelido do foguete a uma velocidade relativa de 3.000 pés/s. Despreze os efeitos da resistência do ar e suponha $g$ constante.




**Problema 15.128**

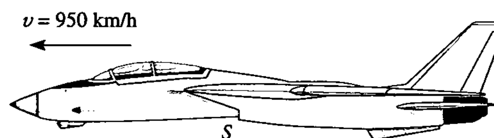
**15.129.** O foguete tem massa inicial $m_0$, incluindo o combustível. Por razões práticas deseja-se que seja mantida uma aceleração constante $a_0$ para cima. Se o combustível é ejetado do foguete a uma velocidade relativa $v_{e/r}$, determine a sua taxa de consumo. Despreze a resistência do ar e suponha que a aceleração da gravidade seja constante.




**Problema 15.129**

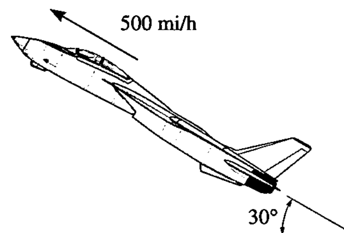
**15.130.** O avião de 12 t tem velocidade de 950 km/h quando voa ao longo de uma trajetória retilínea horizontal. O ar é tomado em $S$ a uma taxa de 50 m³/s. O motor queima combustível a uma taxa de 0,4 kg/s e o gás (ar e combustível) é ejetado com velocidade de 450 m/s, relativamente ao avião. Determine a força resultante de arrasto exercida pelo ar sobre a aeronave. Suponha que o ar tem densidade constante de 1,22 kg/m³. *Dica:* como a massa entra e sai do avião, as equações 15.29 e 15.50 devem ser combinadas para fornecer

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$



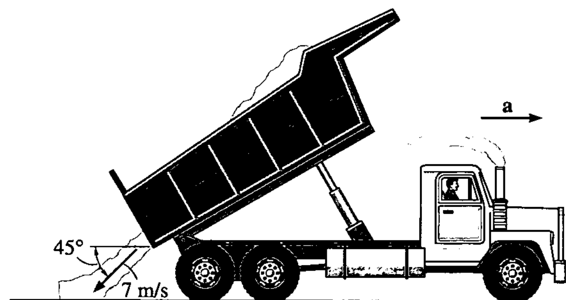

**Problema 15.130**

**15.131.** O jato voa a uma velocidade de 500 mi/h, a 30° com a horizontal. O combustível está sendo gasto a 3 lb/s, e o motor toma ar a 400 lb/s, enquanto o gás ejetado (ar e combustível) tem velocidade relativa de 32.800 pés/s. Determine a aceleração do avião, nessa situação. A força de arrasto do ar sobre o jato é $F_D = (0{,}7v^2)$ lb, onde a velocidade é medida em pés/s. O jato tem peso de 15.000 lb. *Dica:* veja o Problema 15.130.



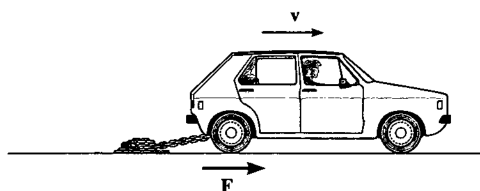

**Problema 15.131**

***15.132.** O caminhão vazio tem massa de 50 t. Quando está descarregando 5 m³ de areia a uma taxa constante de 0,8 m³/s, a velocidade de escoamento da carga é de 7 m/s, medida relativamente ao caminhão, na direção mostrada na figura. Se o caminhão pode se mover livremente, determine sua aceleração no instante em que a areia começa a ser descarregada. Despreze a massa das rodas e qualquer resistência de atrito. A densidade da areia é $\rho_a = 1.520$ kg/m³.



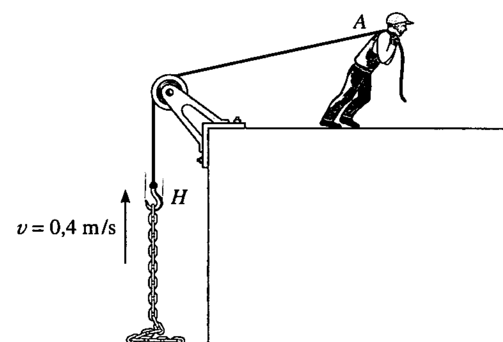

**Problema 15.132**

**15.133.** O carro de massa $m_0$ é usado para puxar uma corrente lisa de comprimento total $l$ e massa por unidade de comprimento $m'$. Se a corrente está inicialmente empilhada, determine a força de tração $F$ que deve ser aplicada pelas rodas traseiras para manter uma velocidade constante $v$.




Problema 15.133

**15.134.** Determine a intensidade da força **F**, em função do tempo, que deve ser aplicada à extremidade da corda em $A$ para elevar o gancho, com velocidade constante $v$ = 0,4 m/s. Inicialmente, a corrente está em repouso no solo. Despreze a massa da corda e do gancho. A corrente tem massa de 2 kg/m.

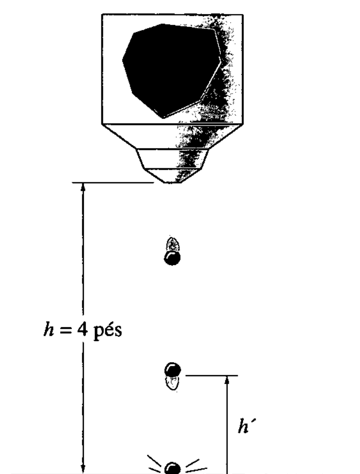



Problema 15.134

# ESTUDO DE PROJETOS

## 15.1P PROJETO DE UM SELETOR DE SEMENTES

A qualidade de uma fruta depende da sua firmeza, que por sua vez está relacionada com a sua reação à colisão com o piso. Determinou-se experimentalmente que sementes soltas a partir do repouso a uma altura de 4 pés são apropriadas para o processamento de industrialização, se após atingirem o piso retornam a uma altura de $2{,}5 \le h' \le 3{,}25$ pés. Usando essa informação, determine o intervalo permissível para os valores do coeficiente de restituição das sementes e desenvolva uma forma de separar as sementes boas das ruins. Proponha um esquema de seu projeto com os cálculos de como a seleção e coleta das sementes devem ser feitas a partir da geometria estabelecida.




Problema 15.1P

## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Impulso.*** O impulso que age num ponto material é definido por

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{F}\,dt$$

Graficamente, essa integral representa a área sob a curva no diagrama $F$–$t$. Se a força é constante, então o impulso pode ser escrito como

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$$

- ***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento.*** Quando a equação de movimento, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, e a equação cinemática, $a = dv/dt$, são combinadas, obtemos o princípio do impulso e quantidade de movimento

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$$

## REVISÃO DO CAPÍTULO (CONTINUAÇÃO)

segundo o qual a quantidade de movimento de um ponto material, $m\mathbf{v}_1$, mais todos os impulsos aplicados ao ponto material durante o tempo $t_1$ a $t_2$, $\Sigma \int \mathbf{F}\,dt$, é igual à quantidade de movimento $m\mathbf{v}_2$ do ponto material. A equação anterior é uma equação vetorial que pode ser decomposta e usada para resolver problemas que envolvem força, velocidade e tempo. Para aplicações, o diagrama de corpo livre deve ser traçado para que sejam levados em conta todos os impulsos agindo no ponto material.

- ***Conservação da Quantidade de Movimento.*** Se o princípio do impulso e quantidade de movimento é aplicado a um sistema de pontos materiais, então as colisões entre pontos materiais produzem impulsos internos que têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos, e, portanto, se cancelam. Além disso, se um impulso externo é pequeno, isto é, a força é pequena e o tempo é curto, então o impulso pode ser considerado não impulsivo e ser desprezado. Conseqüentemente, a quantidade de movimento do sistema de pontos materiais se conserva, e assim

$$\Sigma(m\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma(m\mathbf{v}_i)_2$$

Essa equação é útil para se determinar a velocidade final de um ponto material, quando impulsos internos são exercidos mutuamente entre pontos materiais. Se o impulso interno deve ser determinado, então um dos pontos materiais deve ser 'isolado' e a ele se aplica o princípio do impulso e a quantidade de movimento.

- ***Colisão.*** Quando dois pontos materiais colidem ($A$ e $B$), os impulsos devidos às forças de interação têm mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos. Conseqüentemente, a conservação da quantidade de movimento para o sistema se aplica ao longo da linha de colisão. Se as velocidades finais são desconhecidas, é necessário considerar uma segunda equação. Para tanto, utiliza-se o coeficiente de restituição $e$. Esse coeficiente, que deve ser determinado experimentalmente, depende das propriedades dos corpos em colisão. O coeficiente de restituição pode ser expresso como a razão entre as velocidades relativas antes e depois da colisão.

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$

Se a colisão é elástica, nenhuma energia se perde e $e = 1$. Para uma colisão plástica $e = 0$. Se a colisão é oblíqua, então a conservação da quantidade de movimento do sistema e a equação do coeficiente de restituição podem ser aplicadas ao longo da linha de colisão. Além disso, a conservação da quantidade de movimento para cada ponto material se aplica na direção perpendicular a essa linha, pois nenhum impulso age nos pontos materiais nessa direção.

- ***Princípio do Impulso e Momento Angulares.*** O momento da quantidade de movimento em relação a um eixo ($z$) é denominado momento angular. Seu módulo é

$$(H_O)_z = (d)(mv)$$

Em três dimensões, usa-se o produto vetorial

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

O princípio do impulso e momento angulares é estabelecido pelo cálculo dos momentos da equação de movimento em relação a um eixo inercial, usando-se $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. O resultado é

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

Utiliza-se com certa freqüência esta equação para eliminar impulsos desconhecidos. Para isso, somam-se os momentos em relação a um eixo para o qual as linhas de ação desses impulsos não produzem momento. Por essa razão, um diagrama de corpo livre deve acompanhar a solução.

- ***Fluidos em Escoamento Estacionário.*** Os métodos do impulso, quantidade de movimento e momento angular são usados com freqüência para a determinação das forças que um dispositivo exerce num fluido (líquido ou gás) em escoamento. Para tal fim, desenha-se um diagrama de corpo livre para a massa fluida em contato com o dispositivo, a fim de se identificarem essas forças. Além disso, calculam-se as velocidades do fluido em

## REVISÃO DO CAPÍTULO (CONTINUAÇÃO)

seu escoamento para dentro e para fora do dispositivo. As equações do escoamento em regime estacionário ou permanente envolvem a soma das forças e dos momentos para a determinação dessas reações. As equações são as seguintes:

$$\Sigma F_x = \frac{dm}{dt}(v_{Bx} - v_{Ax})$$

$$\Sigma F_y = \frac{dm}{dt}(v_{By} - v_{Ay})$$

$$\Sigma M_O = \frac{dm}{dt}(d_{OB}v_B - d_{OA}v_A)$$

- *Propulsão com Massa Variável.* Alguns dispositivos, tais como um foguete, perdem massa conforme são propelidos. Outros, tais como uma pá, ganham massa. Podemos dar conta desses ganhos ou dessas perdas de massa, aplicando para o dispositivo o princípio do impulso e quantidade de movimento. Dessa equação, pode-se determinar a força exercida no dispositivo pelo fluxo de massa. Para perda de massa, a equação é

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$$

e para ganho de massa:

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

# REVISÃO 1

## CINEMÁTICA E DINÂMICA DE UM PONTO MATERIAL

Os tópicos e problemas apresentados nos capítulos 12 a 15 foram *classificados* para fornecer uma *visão clara* de como aplicar os princípios envolvidos nos diversos problemas. Na prática da engenharia, entretanto, é muito importante ter capacidade de *identificar* um método apropriado para a solução de um dado problema. Assim, deve-se entender completamente as limitações e usos das equações da dinâmica, e ser capaz de reconhecer quais equações e princípios devem ser usados na solução do problema. Por essas razões, resumiremos as equações e princípios da dinâmica de um ponto material e forneceremos a oportunidade de aplicá-las a uma variedade de problemas.

***Cinemática.*** Problemas de cinemática exigem apenas o estudo da geometria do movimento, não se levando em conta as forças causadoras do movimento. Quando se aplicam as equações da cinemática, deve-se estabelecer claramente uma origem fixa e selecionar um sistema de coordenadas apropriado para definir a posição do ponto material. Estabelecido um sentido positivo para cada eixo coordenado, os sentidos dos componentes da posição, velocidade e aceleração podem ser determinados pelos sinais algébricos de seus valores numéricos.

### MOVIMENTO RETILÍNEO

*Aceleração Variável.* Se for estabelecida uma relação matemática (ou gráfica) entre *quaisquer duas* das *quatro* variáveis $s$, $v$, $a$ e $t$, então uma terceira variável poderá ser determinada resolvendo-se uma das seguintes equações que relacionam todas as outras três

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad a\,ds = v\,dv$$

*Aceleração Constante.* Tenha *absoluta certeza* de que a aceleração é constante antes de utilizar as seguintes equações

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_c t^2 \qquad v = v_0 + a_c t \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

### MOVIMENTO CURVILÍNEO

*Coordenadas x, y, z.* Essas coordenadas são muito usadas quando o movimento pode ser decomposto nas direções horizontal e vertical. Elas também são úteis para o estudo do movimento de projéteis, pois a aceleração de um projétil é *sempre* orientada para baixo.

$$v_x = \dot{x} \qquad a_x = \dot{v}_x$$
$$v_y = \dot{y} \qquad a_y = \dot{v}_y$$
$$v_z = \dot{z} \qquad a_z = \dot{v}_z$$

*Coordenadas n, t, b.* Essas coordenadas são particularmente vantajosas para estudar a *aceleração* de um ponto material ao longo de uma trajetória *conhecida*. Isso ocorre porque os componentes $t$ e $n$ da aceleração **a** representam as

alterações de módulo e direção da velocidade, respectivamente, e esses componentes podem ser formulados como indicam as seguintes equações

$$v = \dot{s}$$

$$a_t = \dot{v} = v\frac{dv}{ds}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

onde

$$\rho = \left|\frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}\right|$$

quando se conhece a trajetória $y = f(x)$.

*Coordenadas r, θ, z.* Essas coordenadas são utilizadas quando se conhece o movimento angular da coordenada radial $r$. Além disso, algumas trajetórias podem ser descritas de maneira conveniente em termos dessas coordenadas.

$$v_r = \dot{r} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$v_z = \dot{z} \qquad a_z = \ddot{z}$$

*Movimento Relativo.* Se a origem de um sistema de coordenadas *em translação* for estabelecida num ponto material $A$, então, para o ponto material $B$,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Nesse caso, o movimento relativo é medido por um observador fixo no sistema de coordenadas em translação.

***Dinâmica.*** Problemas de dinâmica envolvem a análise de forças que produzem o movimento. Ao se aplicarem as equações da dinâmica, é absolutamente necessário que as medidas do movimento sejam efetuadas num *referencial inercial*, isto é, um referencial que não gira, sendo fixo ou estando em translação com velocidade constante. Se um problema exige a solução *simultânea* das equações da dinâmica e da cinemática, é importante que os sistemas de coordenadas escolhidos para escrever cada uma das equações definam da *mesma* maneira os *sentidos positivos* dos eixos.

*Equações de Movimento.* Essas equações são usadas para se determinar a aceleração ou as forças que produzem o movimento. Se elas forem usadas para determinar a posição do ponto material, a sua velocidade ou o tempo, a cinemática também terá de ser considerada na solução. Antes da aplicação das equações de movimento, *sempre desenhe o diagrama de corpo livre* para identificar todas as forças agindo no ponto material. Também estabeleça o sentido da aceleração do ponto material ou de seus componentes. (Um diagrama dinâmico pode acompanhar a solução para incluir graficamente o vetor $m\mathbf{a}$.)

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_n = ma_n \quad \Sigma F_r = ma_r$$
$$\Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_t = ma_t \quad \Sigma F_\theta = ma_\theta$$
$$\Sigma F_z = ma_z \quad \Sigma F_b = 0 \quad \Sigma F_z = ma_z$$

*Trabalho e Energia.* A equação do trabalho e energia representa uma forma integrada da equação de movimento tangencial, $\Sigma F_t = ma_t$, combinada com a cinemática ($a_t\, ds = vdv$). *A equação é usada para resolver problemas que envolvem força, velocidade e deslocamento.* Antes de aplicar essa equação, *sempre desenhe um diagrama de corpo livre* para identificar as forças que realizam trabalho sobre o ponto material.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

onde

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \quad \text{(energia cinética)}$$

$$U_F = \int_{s_1}^{s_2} F \cos\theta\, ds \quad \text{(trabalho de uma força variável)}$$

$$U_{F_c} = F_c \cos\theta\,(s_2 - s_1) \quad \text{(trabalho de uma força constante)}$$

$$U_W = -W\,\Delta y \quad \text{(trabalho de um peso)}$$

$$U_s = -(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) \quad \text{(trabalho de uma mola elástica)}$$

Se as forças agindo num ponto material forem *conservativas*, isto é, forem aquelas que *não* causam uma dissipação de energia, então aplique a equação da conservação da energia. Essa equação é mais fácil de usar do que a equação do trabalho e energia porque se aplica apenas a *dois pontos* da trajetória e *não* exige o cálculo do trabalho realizado por uma força ao longo da trajetória.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

onde

$$V_g = Wy \quad \text{(energia potencial gravitacional)}$$

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \quad \text{(energia potencial elástica)}$$

Se a *potência* desenvolvida por uma força deve ser determinada, use

$$P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade do ponto material sobre o qual age a força $\mathbf{F}$.

*Impulso e Quantidade de Movimento.* A equação do impulso e quantidade de movimento é uma forma integrada da equação de movimento, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, combinada com a cinemática ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$). *A equação é usada para resolver problemas que envolvem força, velocidade e tempo.* Antes de aplicar essa equação, *sempre desenhe o diagrama de corpo livre*, para identificar todas as forças que causam impulsos no ponto material. As forças impulsivas e não impulsivas devem ser identificadas no diagrama de corpo livre. Lembre-se de que as forças não impulsivas podem ser desprezadas na análise da fase de impacto. Estabeleça também o sentido da velocidade do ponto material imediatamente antes e imediatamen-

te depois da aplicação dos impulsos. Como um procedimento alternativo, diagramas de impulso e quantidade de movimento podem acompanhar a solução para dar conta graficamente dos termos da equação.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$$

Se vários pontos materiais são envolvidos no problema, aplique a *conservação da quantidade de movimento* ao sistema para eliminar os impulsos internos. Isso pode ser efetuado numa direção especificada, desde que nenhum impulso externo aja no ponto material nessa direção.

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$$

Se o problema envolve colisão e o coeficiente de restituição $e$ é dado, aplique a seguinte equação

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \quad \text{(ao longo da linha de colisão)}$$

Lembre-se de que durante a colisão o princípio do trabalho e energia não pode ser usado, pois os corpos se deformam e os trabalhos das forças internas são desconhecidos. Entretanto, o princípio do trabalho e energia pode ser usado para determinar a perda de energia durante a colisão, uma vez determinadas as velocidades iniciais e finais.

O *princípio do impulso e momento angulares* e a *conservação do momento angular* podem ser aplicados em relação a um eixo para eliminar alguns impulsos desconhecidos agindo num ponto material durante o intervalo de tempo em que se dá o movimento em estudo. A investigação do diagrama de corpo livre (ou o diagrama de impulso) ajudará na escolha do eixo para a aplicação desse princípio.

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

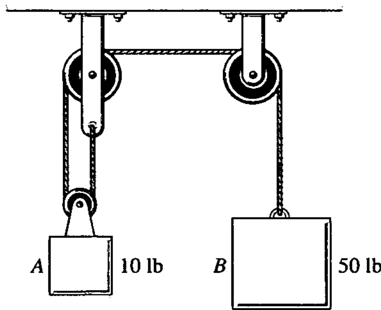
Os problemas propostos a seguir fornecem uma oportunidade para a aplicação dos conceitos discutidos acima. A apresentação dos problemas é *aleatória*, no que se refere ao assunto, de modo que se ganhará experiência em identificar os vários tipos de problemas e aplicar os procedimentos necessários à solução.

## PROBLEMAS DE REVISÃO

**R1.1.** Um carro esporte pode acelerar a 6 m/s$^2$ e desacelerar a 8 m/s$^2$. Se a velocidade máxima que ele pode atingir é de 60 m/s, determine o menor tempo necessário para o carro se deslocar 900 m a partir do repouso e então parar quando $s = 900$ m.

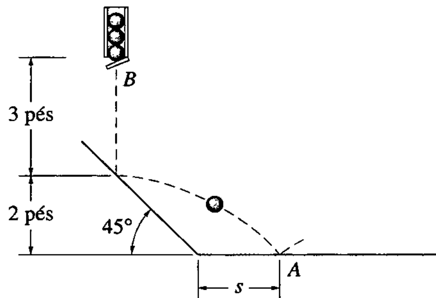
**R1.2.** Um ponto material de 2 kg apóia-se num plano horizontal liso e está submetido a uma força de componentes $F_x = 0$ e $F_y = 3$ N. Se $x = 0$, $y = 0$, $v_x = 6$ m/s e $v_y = 2$ m/s quando $t = 0$, determine a equação $y = f(x)$ que descreve sua trajetória.

**R1.3.** Determine a velocidade de cada bloco 2 s após os blocos serem abandonados a partir do repouso. Despreze a massa das polias e da corda.



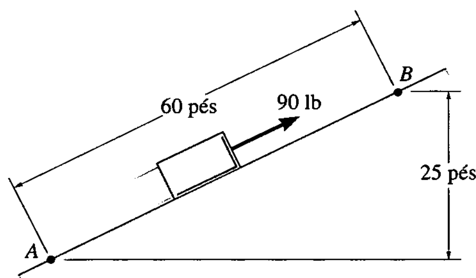

Problema R1.3

*R1.4. Para testar as propriedades de bolas de aço de 2 lb, solta-se cada bola a partir do repouso, como mostra a figura. Se o coeficiente de restituição deve ser $e$ = 0,8, determine a distância $s$ do ponto $A$ onde a bola deve tocar a superfície horizontal. Com que velocidade a bola atinge $A$?




Problema R1.4

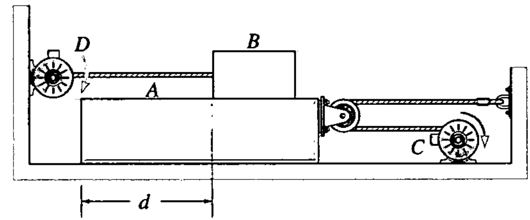
R1.5. Exige-se uma força de 90 lb para arrastar o bloco de 200 lb por 60 pés plano acima. A superfície é áspera e a velocidade do bloco deve ser constante. Se a força pára de agir quando o bloco atinge o ponto $B$ e ele é, então, solto a partir do repouso nessa posição, determine a sua velocidade quando ele atinge o ponto $A$.




Problema R1.5

R1.6. O motor em $C$ puxa o cabo com aceleração $a_C = (3t^2)$ m/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. O motor em $D$ enrola o cabo a uma aceleração $a_D$ = 5 m/s$^2$. Se os motores iniciam seus movimentos no mesmo instante, quando $d$ = 3 m, determine (a) o tempo necessário para $d$ = 0 e (b) a velocidade correspondente de $A$ relativamente a $B$.

R1.7. Uma mola de rigidez 5 kN/m está comprimida 400 mm. A energia armazenada na mola deve ser usada para acionar uma máquina que necessita de 80 W de potência. Determine por quanto tempo a mola pode suprir energia à taxa exigida.




Problema R1.6

*R1.8. O carro $A$ de 800 kg é usado para tracionar os carrinhos de bagagem (cada carrinho tem massa de 300 kg). Determine a tensão nos acoplamentos em $B$ e $C$, supondo que a força de tração **F** no carro $A$ tem intensidade $F$ = 480 N. Considerando que o carro partiu do repouso, determine sua velocidade quando $t$ = 2 s. As rodas dos carrinhos rolam livremente. Despreze a massa delas.




Problema R1.8

R1.9. O carro $A$ de 800 kg é usado para tracionar os carrinhos de bagagem (cada carrinho tem massa de 300 kg). Se a força de tração **F** no carro $A$ tem intensidade $F$ = 480 N, determine a sua aceleração inicial. Qual é a aceleração de $A$ se o acoplamento em $C$ se rompe repentinamente? As rodas dos carrinhos rolam livremente. Despreze a massa delas.

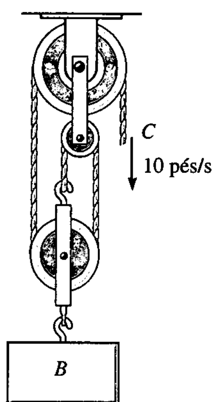



Problema R1.9

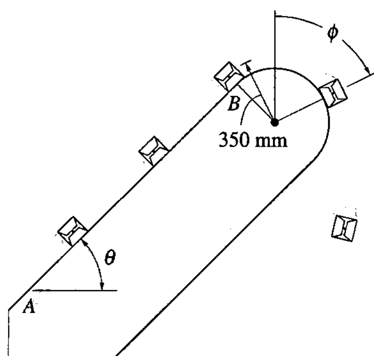
R1.10. Um ponto material de 2 kg apóia-se num plano horizontal liso e é submetido a uma força $F_x = (8x)$ N, onde $x$ é dado em metros e $F_y = 0$. Se $x = 0$, $y = 0$, $v_x$ = 4 m/s e $v_y$ = 6 m/s quando $t = 0$, determine a equação $y = f(x)$ que descreve a trajetória.

R1.11. Determine a velocidade do bloco $B$ se a extremidade $C$ do cabo é puxada para baixo com uma velocidade de 10 pés/s. Qual é a velocidade do bloco em relação à extremidade $C$ da corda?

*■R1.12. Os pacotes de 2,5 kg são transportados pela esteira. Se a esteira parte do repouso e, com aceleração constante, atinge uma velocidade de 0,75 m/s em 2 s, determine o ângulo de inclinação $\theta$ máximo que a esteira transportadora pode ter para que os pacotes não escorreguem na superfície inclinada $AB$. O coeficiente de atrito estático entre a esteira e cada pacote é $\mu_e$ = 0,3. A que ângulo $\phi$ os pacotes começam a escorregar na superfície, perdendo contato com ela, se a velocidade da esteira é constante e vale 0,75 m/s?




Problema R1.11




Problema R1.12

**R1.13.** Um projétil, inicialmente na origem, desloca-se numa trajetória retilínea, num meio fluido, com velocidade $v = 1.800(1 - e^{-0,3t})$ mm/s, onde $t$ é dado em segundos. Determine o deslocamento do projétil ao fim dos primeiros 3 s.

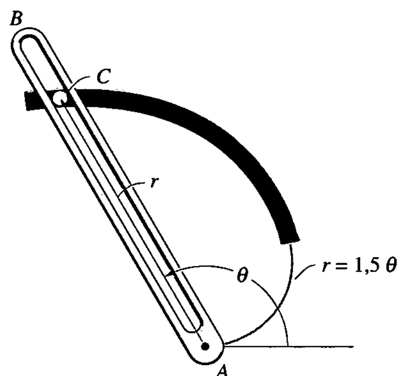
**R1.14.** A velocidade de um trem durante o primeiro minuto de seu movimento foi registrada e os valores estão indicados na tabela.

| $t$ (s) | 0 | 20 | 40 | 60 |
|---|---|---|---|---|
| $v$ (m/s) | 0 | 16 | 21 | 24 |

Faça um gráfico $v$–$t$, aproximando a curva por uma linha poligonal. Determine a distância total percorrida.

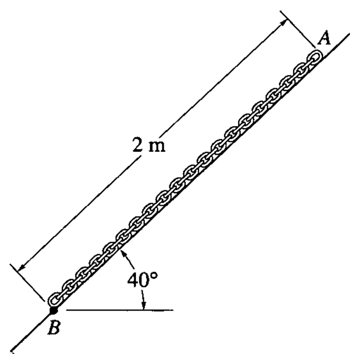
**R1.15.** Um vagão de trem de 25 t se desloca para cima, com velocidade constante de 80 km/h, num trecho de inclinação de 10°. Determine a potência necessária para vencer a força da gravidade.

***R1.16.** O braço $AB$ move o pino $C$ pela ranhura em espiral de equação $r = 1{,}5\theta$, onde $r$ é dado em pés e $\theta$, em radianos. Se o braço parte do repouso quando $\theta = 60°$ e, então, é movido a uma taxa angular $\dot{\theta} = (4t)$ rad/s, onde $t$ é dado em segundos, determine os componentes radial e transversal da velocidade e da aceleração do pino quando $t = 1$ s.



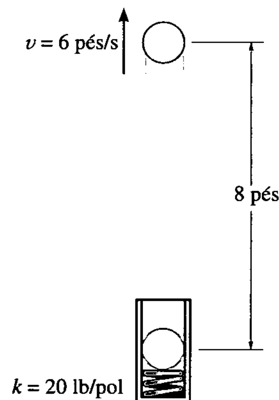

Problema R1.16

**R1.17.** A corrente tem massa de 3 kg/m. Se o coeficiente de atrito cinético entre a corrente e o plano é $\mu_c = 0{,}2$, determine a velocidade com que a extremidade $A$ passará pelo ponto $B$ após a corrente ter sido solta a partir do repouso.




Problema R1.17

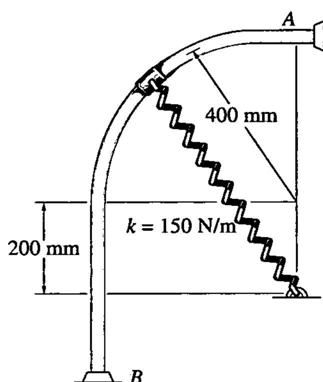
**R1.18.** A bola de 6 lb é disparada de um tubo por meio de uma mola de rigidez $k = 20$ lb/pol. Determine quanto se deve comprimir a mola para que a bola atinja uma velocidade de 6 pés/s numa posição 8 pés acima de onde partiu.




Problema R1.18

**R1.19.** O cursor de tamanho desprezível e massa de 0,25 kg está preso a uma mola de 100 mm de comprimento quando não deformada. Se o cursor é solto a partir do repouso em

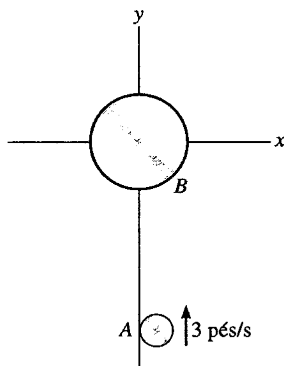
*A* e desloca-se ao longo do tubo-guia liso, determine sua velocidade imediatamente antes de atingir *B*.




**Problema R1.19**

***R1.20.** Um engradado tem peso de 1.500 lb. Ele se apóia num piso horizontal e é puxado por um cabo que forma um ângulo de 15° com a horizontal. Se o engradado se move com velocidade constante por uma distância de 20 pés, determine a tensão no cabo e o trabalho realizado pela força de tração. O coeficiente de atrito cinético entre o engradado e o piso é $\mu_c = 0,55$.

**R1.21.** O disco *A* de 2 lb escorrega num plano horizontal liso com velocidade de 3 pés/s. O disco *B* de 11 lb está inicialmente em repouso. Se após o impacto *A* tem velocidade de 1 pé/s no sentido positivo do eixo *x*, determine a velocidade de *B* após a colisão. Quanto se perde de energia cinética na colisão?

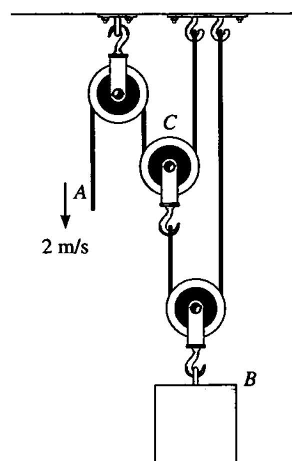



**Problema R1.21**

**R1.22.** Um ponto material desloca-se numa trajetória circular de 2 m de raio, de modo que sua posição, como função do tempo, é dada por $\theta = 5t^2$, onde $\theta$ é dado em radianos e *t*, em segundos. Determine o módulo da aceleração do ponto quando $\theta = 30°$, considerando que ele parte do repouso em $\theta = 0°$.

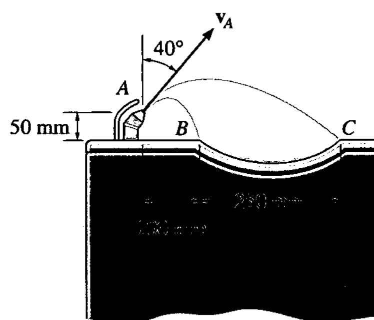
**R1.23.** Se a extremidade *A* do cabo é puxada para baixo com uma velocidade de 2 m/s, determine a velocidade com que *B* se eleva.

***R1.24.** Um rifle de 2,5 kg foi montado num suporte que lhe permite movimentar-se horizontalmente sem atrito. Dispara-se uma bala de 1,5 g que adquire velocidade de 1.400 m/s na saída da arma. Determine a velocidade de recuo do rifle imediatamente após o disparo.



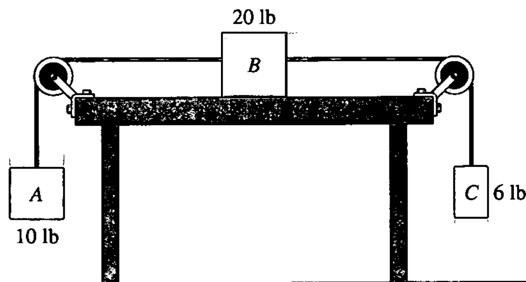

**Problema R1.23**

**R1.25.** Considere o bebedouro esquematizado na figura. Determine as velocidades máxima e mínima com que a água deve ser ejetada pelo bocal para que o jato se restrinja aos limites *B* e *C*.




**Problema R1.25**

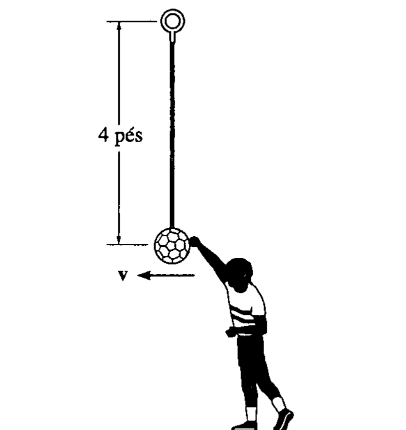
**R1.26.** O bloco *B* de 20 lb apóia-se na superfície de uma mesa e está ligado por cordas aos blocos *A* e *C*. Determine a velocidade do bloco *A* após ele ter descido 2 pés a partir do repouso. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco *B* e a superfície é $\mu_c = 0,1$. Despreze a massa das polias e das cordas.




**Problema R1.26**

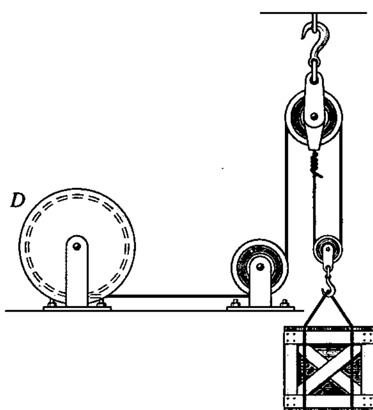
**R1.27.** O menino golpeia a bola de 5 lb ligada à corda. Determine a menor velocidade que o menino deve comuni-

car à bola para que ela possa se movimentar numa trajetória circular sem que a corda se afrouxe.



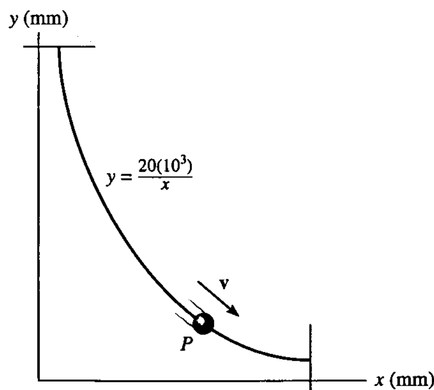

**Problema R1.27**

***R1.28.** O tambor *D* está enrolando o cabo a uma aceleração de 5 m/s$^2$. Determine a tensão no cabo se o engradado suspenso tem massa de 800 kg.



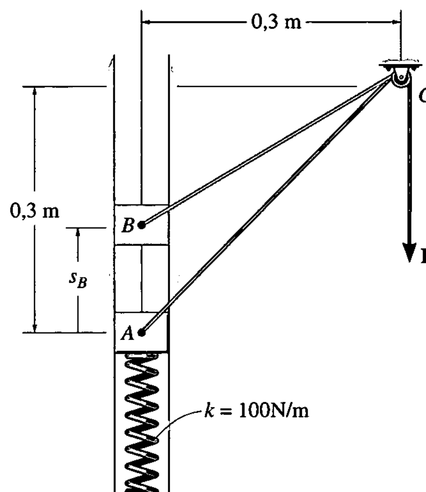

**Problema R1.28**

**R1.29.** O ponto material *P* desloca-se com uma velocidade constante de 300 mm/s ao longo da curva mostrada na figura. Determine sua aceleração quando ele passa pelo ponto (200 mm, 100 mm).



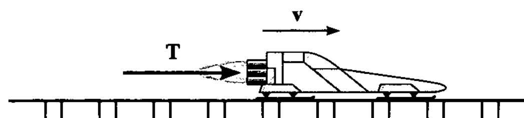

**Problema R1.29**

**R1.30.** O bloco de 0,5 kg move-se no interior do tubo vertical liso. Se o bloco parte do repouso em *A* quando a mola *presa nele* não está deformada, determine a força vertical *constante* *F* que deve ser aplicada à corda para que o bloco atinja uma velocidade $v_B$ = 2,5 m/s ao passar por *B*; $s_B$ = 0,15 m. Despreze a massa da corda e da polia.



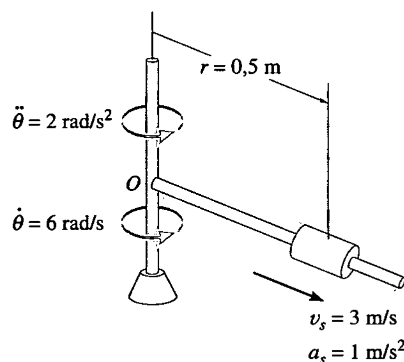

**Problema R1.30**

**R1.31.** O trenó-foguete de 4 t desloca-se, a partir do repouso, ao longo do trilho horizontal liso, mantendo uma potência de saída de 450 kW. Desprezando a perda de massa de combustível e a resistência do ar, determine a distância que ele percorre até atingir a velocidade $v$ = 60 m/s.



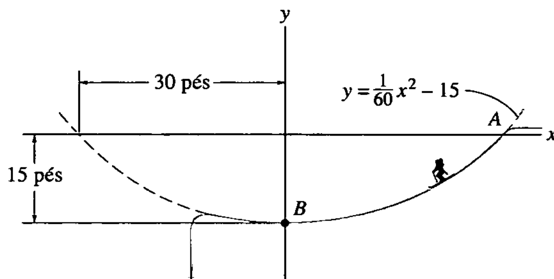

**Problema R1.31**

***R1.32.** O carretel de 4 kg desliza ao longo da haste girante. Num dado instante, a taxa angular de rotação da haste é $\dot{\theta}$ = 6 rad/s e a rotação está aumentando a $\ddot{\theta}$ = 2 rad/s$^2$. Nesse mesmo instante, o carretel está em $r$ = 0,5 m e tem velocidade de 3 m/s e aceleração de 1 m/s$^2$, ambas medidas relativamente à haste e orientadas do centro *O* para a extremidade. Determine a força de atrito radial e a força normal, ambas exercidas pela haste sobre o carretel, no instante considerado.



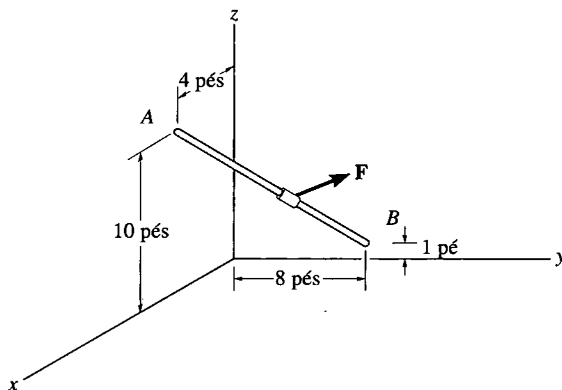

**Problema R1.32**

**R1.33.** Uma esquiadora parte do repouso em $A$ (30 pés, 0) e desce a rampa lisa, que pode ser aproximada por uma parábola. Se a esquiadora pesa 120 lb, determine a força normal que ela exerce na rampa no instante em que chega ao ponto $B$.




**Problema R1.33**

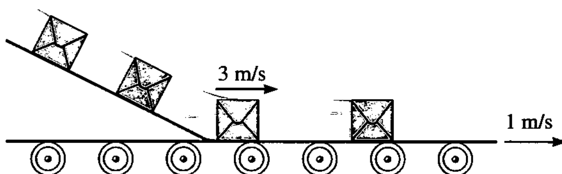
**R1.34.** Um pequeno colar de 2 lb, partindo do repouso em $A$, escorrega para baixo ao longo da haste lisa. Durante o movimento, o colar fica submetido a uma força $\mathbf{F} = \{10\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\}$ lb, onde $y$ e $z$ são dados em pés. Determine a velocidade do colar quando ele atinge a parede em $B$.




**Problema R1.34**

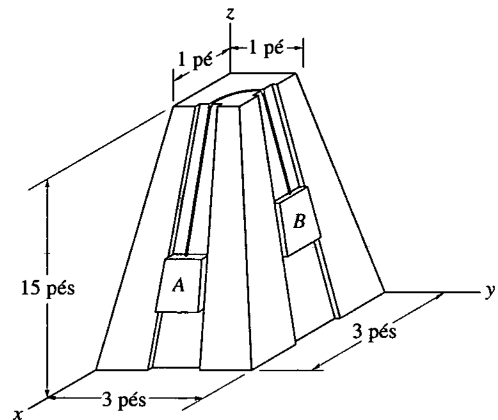
**R1.35.** Uma bola de 200 g é solta a partir do repouso a uma altura de 400 mm acima de uma superfície de metal fixa. Se a bola sobe 325 mm após colidir com a superfície, determine o coeficiente de restituição entre a bola e a superfície.

***R1.36.** Pacotes de 6 kg descem por uma calha lisa e são depositados horizontalmente com velocidade de 3 m/s numa esteira transportadora. Se o coeficiente de atrito cinético entre a esteira e um pacote é $\mu_c = 0{,}2$, determine o tempo necessário para que um pacote atinja o repouso na esteira se esta se move com velocidade $v = 1$ m/s, no mesmo sentido dos pacotes.



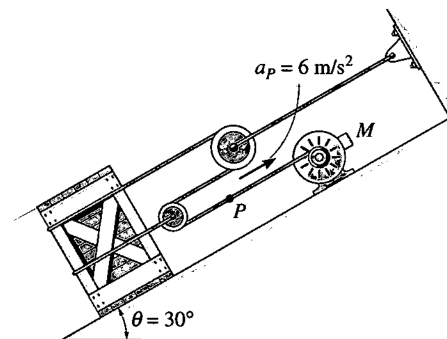

**Problema R1.36**

**R1.37.** Os blocos $A$ e $B$ pesam 10 e 30 lb, respectivamente. Eles estão ligados por um fio leve e podem deslizar por canaletes sem atrito. Determine a velocidade de cada bloco após o bloco $A$ mover-se 6 pés canalete acima. Os blocos partem do repouso.




**Problema R1.37**

**R1.38.** O motor $M$ puxa o cabo com aceleração $a_p = 6$ m/s². Determine a força de tração exercida por $M$ sobre o cabo para mover plano acima o engradado de 50 kg. O coeficiente de atrito cinético entre o engradado e o plano é $\mu_c = 0{,}3$. Despreze a massa das polias e da corda.

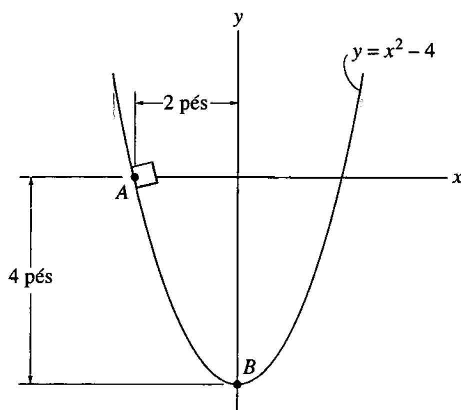



**Problema R1.38**

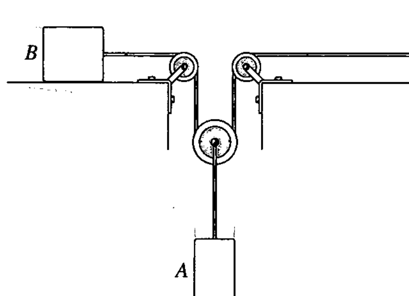
**R1.39.** Se um ponto material tem uma velocidade inicial $v_0 = 12$ pés/s para a direita e uma aceleração de 2 pés/s² para a esquerda, determine o deslocamento do ponto ao fim de 10 s. Inicialmente, $s_0 = 0$.

***R1.40.** Um bloco de 3 lb, inicialmente em repouso em $A$, desliza ao longo da superfície parabólica lisa. Determine a força normal agindo no bloco quando ele atinge o ponto $B$. Despreze o tamanho do bloco.

**R1.41.** Num dado instante, o bloco $A$ de 10 lb desce com uma velocidade de 6 pés/s. Determine sua velocidade 2 s mais tarde. O bloco $B$ pesa 4 lb e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano horizontal é $\mu_c = 0{,}2$. Despreze a massa das polias e das cordas.



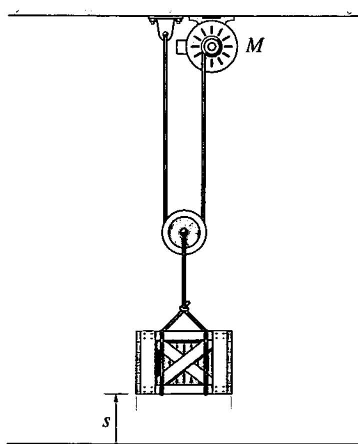

Problema R1.40




Problema R1.41

**R1.42.** Um trem de carga parte do repouso e se desloca com aceleração constante de 0,5 pés/s$^2$. Depois de um tempo $t'$ sua velocidade se torna constante, de forma que quando $t$ = 160 s, o trem percorreu uma distância de 2.000 pés. Determine o tempo $t'$ e desenhe o gráfico $v$–$t$ para o movimento.

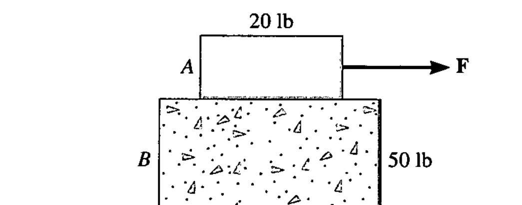
**R1.43.** O engradado de 50 lb está sendo elevado pelo sistema de polia e motor $M$. Se o engradado parte do repouso e, com aceleração constante, atinge uma velocidade de 12 pés/s após ter sido elevado de 12 m, determine a potência que deve ser fornecida ao motor no instante em que $s$ = 10 pés. O motor tem rendimento $\epsilon = 0{,}74$.




Problema R1.43

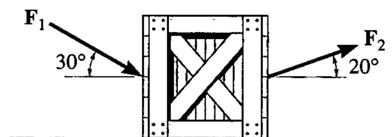
***R.44.** Um automóvel trafega com *velocidade escalar constante* ao longo de uma curva circular de raio $\rho$ = 750 pés. Se o módulo da aceleração é $a$ = 8 pés/s$^2$, determine a velocidade escalar do automóvel.

**R1.45.** O bloco $B$ apóia-se numa superfície lisa. Se os coeficientes de atrito entre $A$ e $B$ são $\mu_a = 0{,}4$ (estático) e $\mu_c =$ 0,3 (cinético), determine a aceleração de cada bloco se (a) $F$ = 6 lb e (b) $F$ = 50 lb.



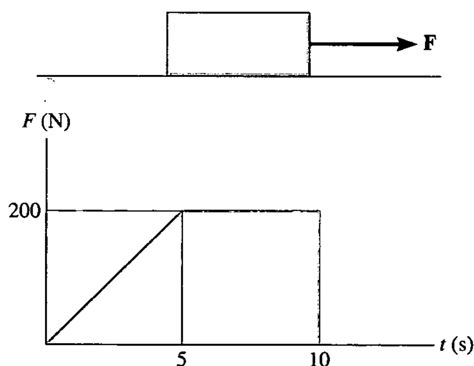

Problema R1.45

**R1.46.** O engradado de 100 kg está submetido à ação de duas forças, $F_1$ = 800 N e $F_2$ = 1,5 kN, como mostra a figura. Se o engradado está inicialmente em repouso, determine a distância que ele escorrega para atingir uma velocidade de 6 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre o engradado e a superfície é $\mu_c = 0{,}2$.



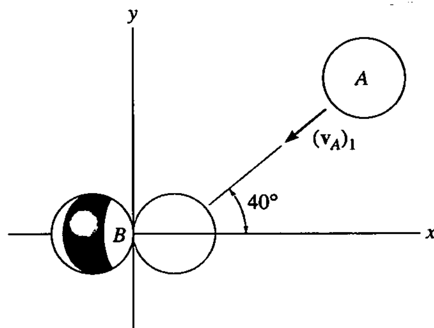

Problema R1.46

**R1.47.** Um bloco de 20 kg está inicialmente em repouso numa superfície horizontal para a qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0{,}6$ e o cinético é $\mu_c = 0{,}5$. Se a força horizontal **F** aplicada tem intensidade variável como indicado na figura, determine a velocidade do bloco ao fim de 10 s. *Dica:* primeiro determine o tempo necessário para vencer o atrito e pôr o bloco em movimento.



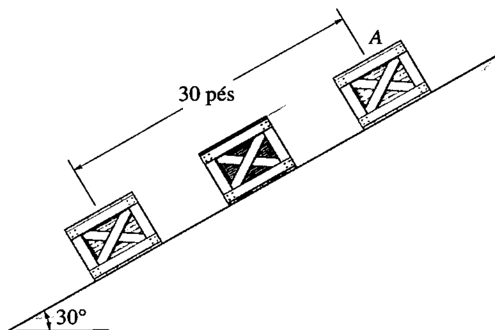

Problema R1.47

***R1.48.** Duas bolas de bilhar lisas $A$ e $B$ têm massas iguais $m$ = 200 g. Se $A$ atinge $B$ com uma velocidade $(v_A)_1$ = 2 m/s, como mostrado na figura, determine as velocidades finais das bolas imediatamente após a colisão. A bola $B$ está inicialmente em repouso e o coeficiente de restituição é $e$ = 0,75.



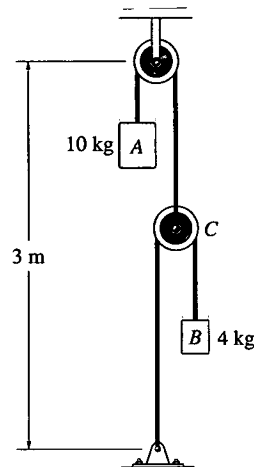

**Problema R1.48**

**R1.49.** Se um engradado de 150 lb é solto do repouso em $A$, determine sua velocidade após um deslocamento de 30 pés plano abaixo. O coeficiente de atrito cinético entre o engradado e o plano é $\mu_c = 0{,}3$.




**Problema R1.49**

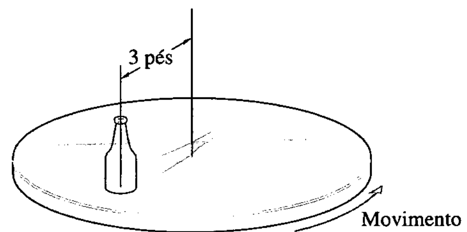
**R1.50.** Determine as tensões desenvolvidas nas duas cordas e a aceleração de cada bloco. Despreze a massa das polias e das cordas. *Dica:* como no sistema há duas cordas, relacione o movimento do bloco $A$ com o de $C$, e do bloco $B$ com o de $C$. Então, por eliminação, relacione o movimento de $A$ com o de $B$.



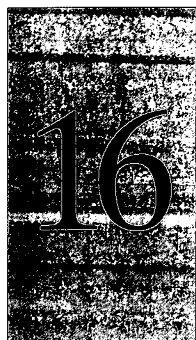

**Problema R1.50**

**R1.51.** A garrafa está em repouso a uma distância de 3 pés do centro da plataforma horizontal. Se o coeficiente de atrito estático entre a garrafa e a plataforma é $\mu_e = 0{,}3$, determine a velocidade máxima que a garrafa pode atingir antes de escorregar. Suponha que o movimento angular da plataforma aumente lentamente.

***R1.52.** Resolva o Problema R1.51 supondo que a plataforma está inicialmente em repouso e que a velocidade da garrafa aumenta a uma taxa de 2 pés/s$^2$.



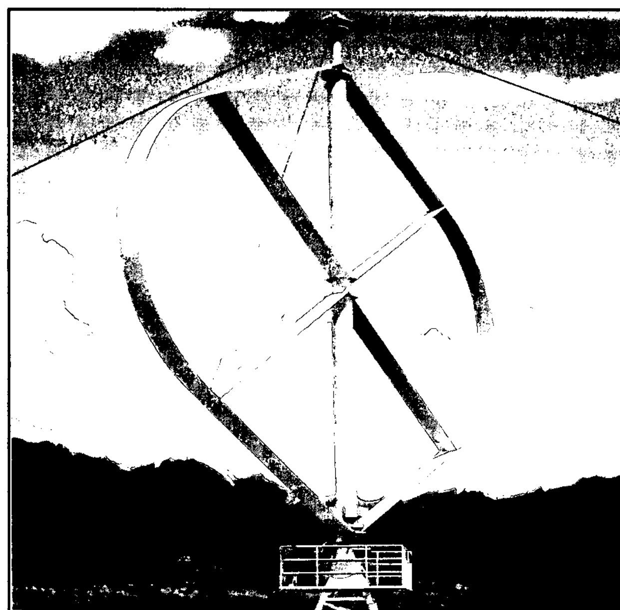

**Problemas R1.51/R1.52**



# Cinemática do Movimento Plano de um Corpo Rígido

## Objetivos do Capítulo

- Classificar os vários tipos de movimento plano de um corpo rígido.
- Investigar a translação de um corpo rígido e mostrar como se analisa o movimento em torno de um eixo fixo.
- Estudar o movimento plano usando uma análise de movimento absoluto.
- Fornecer uma análise do movimento relativo para a velocidade e aceleração usando um referencial em translação.
- Mostrar como se obtém o centro instantâneo de velocidade nula e determinar a velocidade de um ponto do corpo usando esse método.
- Fornecer uma análise de movimento relativo para a velocidade e aceleração usando um referencial em movimento de rotação.



*A turbina acionada pelo vento gira em torno de um eixo fixo, com velocidade angular variável.*

## 16.1 Movimento de um Corpo Rígido

Neste capítulo, discutiremos a cinemática plana de um corpo rígido. Este estudo é importante para o projeto de engrenagens, cames e mecanismos usados em muitas operações mecânicas. Além disso, uma vez que a cinemática de um corpo rígido tenha sido entendida, será possível aplicar as equações de movimento que relacionam as forças sobre o corpo com o seu movimento.

Quando todos os pontos de um corpo rígido movem-se ao longo de trajetórias que se mantêm eqüidistantes de um plano fixo, diz-se que o corpo está em *movimento plano*. Há três tipos de movimento plano; em ordem de complexidade, podemos ordená-los como se segue:

1. *Translação.* Este tipo de movimento ocorre se todo segmento de reta no corpo mantém-se paralelo à sua direção inicial, durante todo o movimento. Quando as trajetórias de quaisquer dois pontos do corpo ocorrem ao longo de retas eqüidistantes, o movimento é denominado *translação retilínea* (Figura 16.1*a*). Entretanto, se as trajetórias se dão ao longo de linhas

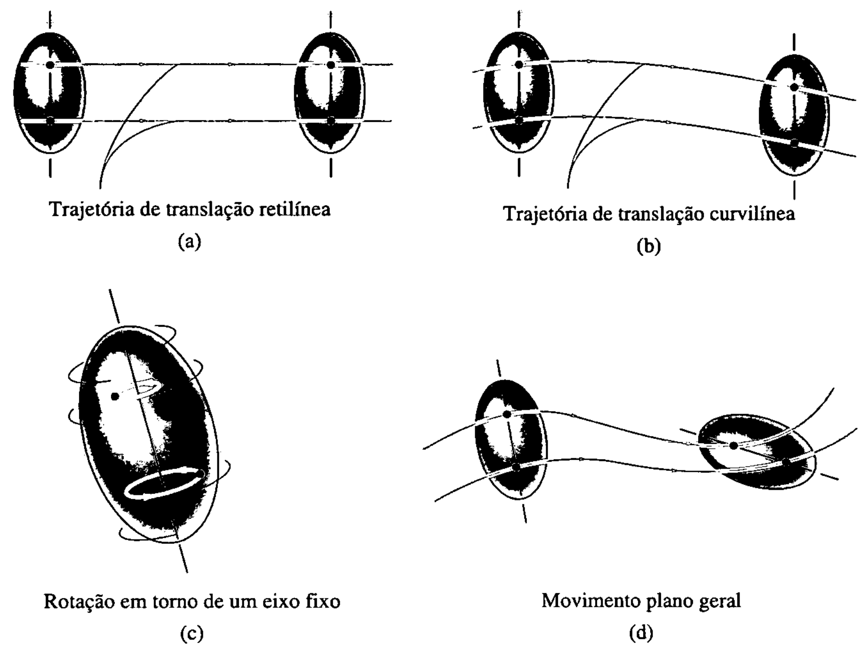



**Figura 16.1**

curvas que são eqüidistantes, o movimento é denominado *translação curvilínea* (Figura 16.1*b*).

2. *Rotação em torno de um eixo fixo.* Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, todos os seus pontos, exceto os situados no eixo de rotação, movem-se ao longo de trajetórias circulares (Figura 16.1*c*).

3. *Movimento plano geral.* Quando um corpo está submetido a um movimento plano geral, ele cumpre uma combinação de uma translação *e* uma rotação (Figura 16.1*d*). A translação ocorre num dado plano de referência, e a rotação ocorre em torno de um eixo perpendicular a esse plano de referência.

Nas seções seguintes consideraremos cada um desses movimentos em detalhe. Na Figura 16.2 mostramos exemplos de corpos realizando esses movimentos.

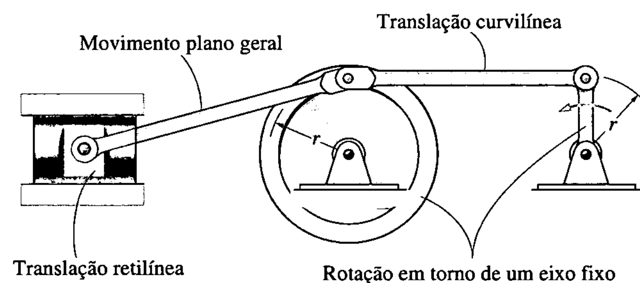



**Figura 16.2**

## 16.2 TRANSLAÇÃO

Consideremos um corpo rígido submetido a uma translação retilínea ou curvilínea no plano $x$–$y$ (Figura 16.3).

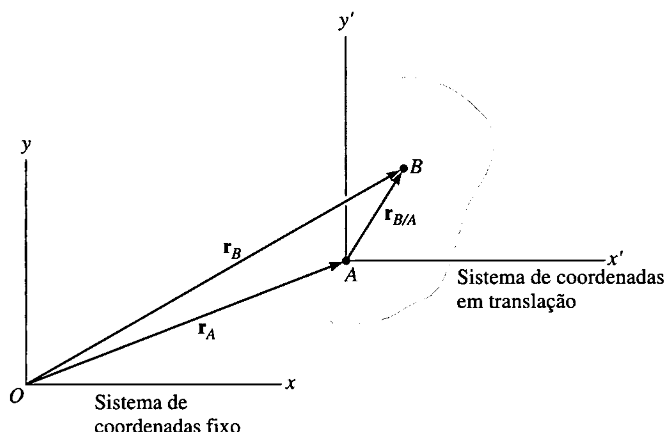



**Figura 16.3**

***Posição.*** As localizações dos pontos $A$ e $B$ do corpo são definidas num referencial fixo $x, y$ usando-se os *vetores de posição* $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$. O sistema de coordenadas em translação $x'$, $y'$ *é fixo no corpo* e tem sua origem localizada em $A$, denominada *ponto de base.* A posição de $B$ em relação a $A$ é representada pelo *vetor de posição relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$ ('$\mathbf{r}$ de $B$ relativo a $A$'). Por adição vetorial,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

***Velocidade.*** Obtém-se uma relação entre as velocidades instantâneas de $A$ e $B$ tomando-se a derivada temporal da equação da posição, o que resulta em $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{r}_{B/A}/dt$. Os vetores $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ representam as *velocidades absolutas*, pois esses vetores são medidos no sistema $x$, $y$. O termo $d\mathbf{r}_{B/A}/dt = 0$, porque o módulo e a direção de $\mathbf{r}_{B/A}$ são constantes. De fato, o módulo é constante pela definição de corpo rígido, e a direção é constante porque o corpo está se transladando. Logo,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

***Aceleração.*** Derivando-se em relação ao tempo a equação da velocidade, obtém-se uma relação semelhante entre as acelerações instantâneas de $A$ e $B$:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

As duas equações anteriores indicam que *todos os pontos de um corpo rígido em movimento de translação retilínea ou curvilínea têm a mesma velocidade e a mesma aceleração.* Conseqüentemente, a cinemática de um ponto material, discutida no Capítulo 12, também pode ser usada para especificar a cinemática dos pontos de um corpo rígido em translação.



*Os ocupantes deste brinquedo estão submetidos a uma translação curvilínea, pois o veículo se move numa trajetória circular, mantendo sempre sua posição na horizontal.*

## 16.3 ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

Quando um corpo gira em torno de um eixo fixo, todo ponto $P$ desse corpo tem *movimento circular.* Para estudar esse movimento, é necessário primeiro discutir o movimento angular do corpo em torno do eixo.

***Movimento Angular.*** Por não ter dimensão, um ponto não apresenta movimento angular. Somente linhas e corpos podem ter esse movimento. Por exemplo, consideremos o corpo mostrado na Figura 16.4*a* e nele a linha radial $r$ contida no plano sombreado e orientada do ponto $O$ no eixo de rotação para o ponto $P$. Essa linha pode ter movimento angular.

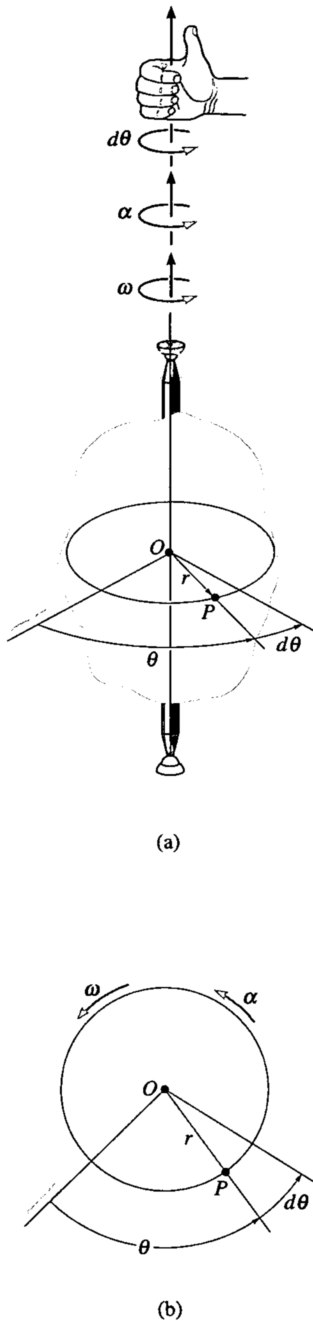



**Figura 16.4**

***Posição Angular.*** Num instante qualquer, a *posição angular* de $r$ é definida pelo ângulo $\theta$, medido de uma linha de referência *fixa* até $r$.

***Deslocamento Angular.*** A mudança da posição angular, que pode ser medida como um vetor infinitesimal $d\boldsymbol{\theta}$, é denominada *deslocamento angular.*[1] Esse vetor tem módulo $d\theta$, medido em radianos, ou revoluções (rev), onde 1 rev = 2 $\pi$ rad. Como o movimento ocorre em torno de um *eixo fixo*, a *direção* de $d\boldsymbol{\theta}$ é *sempre* ao longo do eixo, e o *sentido* é determinado pela regra da mão direita; isto é, os dedos da mão direita são curvados no sentido da rotação e o polegar aponta no sentido de $d\boldsymbol{\theta}$, que no caso da Figura 16.4*a* é para cima. Em duas dimensões, como se mostra na vista de topo do plano sombreado (Figura 16.4*b*), tanto $\theta$ quanto $d\theta$ têm sentido anti-horário e o polegar aponta para fora da página.

***Velocidade Angular.*** A taxa de variação da posição angular é denominada velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Uma vez que $d\boldsymbol{\theta}$ ocorre num tempo infinitesimal $dt$, então

$$(\circlearrowleft+) \qquad \boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \qquad (16.1)$$

O *módulo* desse vetor é medido usualmente em rad/s, que é a sua unidade no Sistema Internacional. Ele está expresso aqui em forma escalar, pois sua direção é sempre a do eixo de rotação, isto é, a de $d\boldsymbol{\theta}$ (Figura 16.4*a*). Quando indicamos o movimento angular no plano sombreado (Figura 16.4*b*) nos referimos ao sentido da rotação como horário ou anti-horário. Escolhemos *arbitrariamente* as rotações no sentido anti-horário como *positivas* e indicadas pela seta curva e sinal mostrados entre parênteses à esquerda da Equação 16.1. Observemos que o vetor $\boldsymbol{\omega}$ aponta para fora da página.

***Aceleração Angular.*** A *aceleração angular* $\boldsymbol{\alpha}$ mede a taxa temporal de variação da velocidade angular. Escalarmente, pode-se escrever

$$(\circlearrowleft+) \qquad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \qquad (16.2)$$

Usando-se a Equação 16.1, é possível expressar $\alpha$ como

$$(\circlearrowleft+) \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (16.3)$$

A direção de $\boldsymbol{\alpha}$ é a mesma de $\boldsymbol{\omega}$ (Figura 16.4*a*); o seu sentido, todavia, depende se $\boldsymbol{\omega}$ cresce ou decresce. Em particular, se $\boldsymbol{\omega}$ decresce, então $\boldsymbol{\alpha}$ é denominada *desaceleração angular* e tem sentido oposto ao de $\boldsymbol{\omega}$.

Eliminando $dt$ nas equações 16.1 e 16.2, obtemos uma relação diferencial entre a aceleração angular, a velocidade angular e o deslocamento angular:

$$(\circlearrowleft+) \qquad \boxed{\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega} \qquad (16.4)$$

A semelhança entre as relações diferenciais para o movimento angular e aquelas desenvolvidas para o movimento retilíneo de um ponto material ($v = ds/dt$, $a = dv/dt$ e $a\, ds = v\, dv$) é notável.

***Aceleração Angular Constante.*** Se a aceleração angular de um corpo é constante, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_c$, então as equações 16.1 16.2 e 16.4, quando integradas, resultam num conjunto de fórmulas que relacionam para o corpo a velocidade angular, a posição angular e o tempo. Essas equações são semelhantes às equações 12.4 a 12.6 para o movimento retilíneo de um ponto material. Os resultados são

[1] Mostra-se na Seção 20.1 que rotações finitas ou deslocamentos finitos angulares *não* são quantidades vetoriais, embora rotações infinitesimais $d\theta$ o sejam.

$(\circlearrowright+)$ $\omega = \omega_0 + \alpha_c t$ (16.5)

$(\circlearrowright+)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$ (16.6)

$(\circlearrowright+)$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$ (16.7)

Aceleração angular constante

Nessas equações, $\theta_0$ e $\omega_0$ são os valores iniciais da posição e velocidade angulares, respectivamente.

***Movimento de um Ponto P.*** À medida que o corpo rígido mostrado na Figura 16.4*a* gira, o ponto *P* desloca-se ao longo da *trajetória circular* de raio *r* e centro no ponto *O*. Essa trajetória está contida no plano sombreado visto do alto na Figura 16.4*d*.

*Posição.* A posição de *P* é definida pelo vetor de posição *r*, que se estende de *O* a *P*.

*Velocidade.* A velocidade de *P* tem módulo que pode ser obtido a partir de suas coordenadas polares $v_r = \dot{r}$ e $v_\theta = r\dot{\theta}$ (equações 12.25). Como *r* é constante, o componente radial $v_r = \dot{r} = 0$ e, portanto, $v = v_\theta = r\dot{\theta}$. Pelo fato de que $\omega = \dot{\theta}$ (Equação 16.1) a velocidade escalar é

$$v = \omega r \tag{16.8}$$

Como se mostra nas figuras 16.4*c* e 16.4*d*, a *direção* de **v** é *tangente* à trajetória circular.

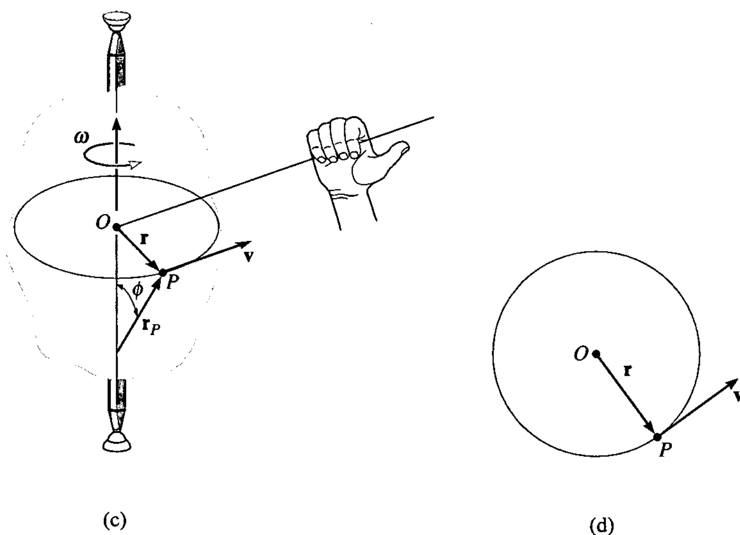
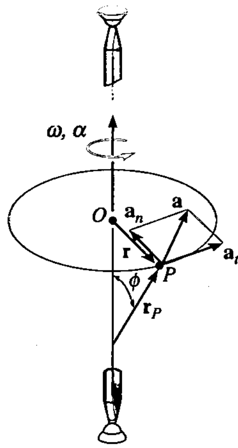



**Figura 16.4**

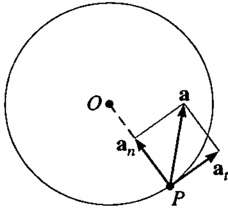
O vetor **v** também pode ser obtido utilizando-se o produto vetorial de $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{r}_P$ (veja o Apêndice C). Nesse caso, o vetor $\mathbf{r}_P$ tem origem em qualquer ponto do eixo de rotação e extremidade em *P* (Figura 16.4*c*). Tem-se

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \tag{16.9}$$

É importante observar a ordem dos vetores nessa equação, pois o produto vetorial não é comutativo, isto é, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \neq \mathbf{r}_P \times \boldsymbol{\omega}$. A esse respeito, observemos na Figura 16.4*c* como o sentido de **v** é estabelecido pela regra da mão direita. Curvam-se os dedos da mão direita no sentido de $\boldsymbol{\omega}$ para $\mathbf{r}_P$ ($\boldsymbol{\omega}$ 'vetor' $\mathbf{r}_P$). O polegar indica o sentido de **v**, que é tangente à trajetória e aponta no sentido do movimento. Da Equação C.8, a velocidade escalar, isto é, o




(e)




(f)

**Figura 16.4**

módulo de **v**, na Equação 16.9, é $v = \omega r_P$ sen $\phi$, e como $r = r_P$ sen $\phi$ (Figura 16.4*c*), então $v = \omega r$, o que está de acordo com a Equação 16.8. Como um caso especial, o vetor de posição **r** pode ser escolhido como $\mathbf{r}_P$. Nesse caso, **r** pertence ao plano do movimento e a velocidade do ponto *P* é

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (16.10)$$

*Aceleração.* A aceleração de *P* pode ser expressa em termos de seus componentes normal e tangencial.[2] Como $a_t = dv/dt$ e $a_n = v^2/\rho$, onde $\rho = r$, $v = \omega r$ e $\alpha = d\omega/dt$, tem-se

$$\boxed{a_t = \alpha r} \quad (16.11)$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 r} \quad (16.12)$$

O *componente tangencial da aceleração* (figuras 16.4*e* e 16.4*f*) representa a taxa temporal de variação da velocidade escalar. Se a velocidade escalar de *P* está aumentando, então $\mathbf{a}_t$ tem o sentido de **v**; se a velocidade escalar está decrescendo, $\mathbf{a}_t$ tem sentido oposto ao de **v**; finalmente, se a velocidade escalar é constante, $\mathbf{a}_t$ é nula.

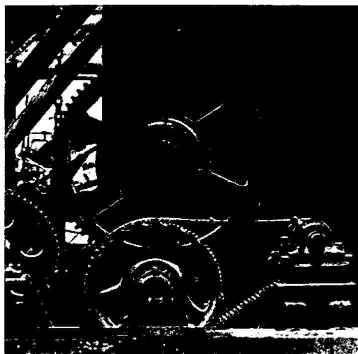
O *componente normal da aceleração* representa a taxa temporal de variação da direção da velocidade. O *vetor* $\mathbf{a}_n$ é sempre voltado para *O*, que é o centro da trajetória de *P* (figuras 16.4*e* e 16.4*f*).

Da mesma forma que a velocidade, a aceleração de *P* pode ser expressa em termos do produto vetorial. Tomando a derivada temporal da Equação 16.9, temos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

Lembrando que $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ e usando a Equação 16.9, ($d\mathbf{r}_P/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$), obtemos

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \quad (16.13)$$



*As várias engrenagens usadas na operação de um guindaste giram em torno de eixos fixos. Os engenheiros devem ser capazes de relacionar os movimentos angulares para projetar adequadamente o sistema de engrenagens.*

Segue da definição do produto vetorial que o primeiro termo no segundo membro dessa equação tem módulo $a_t = \alpha r_P$ sen $\phi = \alpha r$, e pela regra da mão direita $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P$ tem a direção e sentido de $\mathbf{a}_t$ (Figura 16.4*e*). Da mesma forma, o segundo termo tem módulo $a_n = \omega^2 r_P$ sen $\phi = \omega^2 r$; aplicando duas vezes a regra da mão direita, primeiro para determinar o resultado $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$ e depois $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P$, podemos ver que o resultado tem a mesma direção de $\mathbf{a}_n$, como mostrado na Figura 16.4*e*. Mais ainda, observa-se que o resultado tem a direção e o sentido de $-\mathbf{r}$, estando contido no plano do movimento. Podemos, portanto, expressar $\mathbf{a}_n$ de modo mais simples na forma $\mathbf{a}_n = -\omega^2\mathbf{r}$. Assim, a Equação 16.12 pode ser identificada pelos seus dois componentes:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r} \end{aligned}} \quad (16.14)$$

Como $\mathbf{a}_t$ e $\mathbf{a}_n$ são mutuamente perpendiculares, o módulo da aceleração pode ser determinado pelo teorema de Pitágoras: $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ (Figura 16.4*f*).

[2] Também podemos usar coordenadas polares. Como $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ e $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, substituindo $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$, e $\ddot{\theta} = \alpha$, obtemos as equações 16.11 e 16.12.

## PONTOS IMPORTANTES

- Um corpo pode estar sujeito a dois tipos de translação. Durante uma translação retilínea todos os pontos seguem trajetórias retilíneas paralelas, e durante uma translação curvilínea, os pontos seguem trajetórias curvilíneas que têm a mesma forma e são eqüidistantes entre si.
- Todos os pontos de um corpo em translação movem-se com a mesma velocidade e a mesma aceleração.
- Pontos de um corpo que gira em torno de um eixo fixo têm trajetórias circulares (exceto os pertencentes ao eixo de rotação).
- A relação $\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$ segue de $\alpha = d\omega/dt$ e de $\omega = d\theta/dt$, por eliminação de $dt$.
- Conhecidos $\omega$ e $\alpha$, a velocidade e a aceleração de qualquer ponto do corpo podem ser determinadas.
- A velocidade de qualquer ponto do corpo sempre é tangente à trajetória desse ponto.
- A aceleração tem dois componentes. O componente tangencial mede a taxa de variação da velocidade escalar (módulo da velocidade) e pode ser determinado usando-se $a_t = \alpha r$. O componente normal mede a taxa de variação da direção da velocidade e é determinado por $a_n = \omega^2 r$.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A velocidade e a aceleração de um ponto de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo podem ser determinadas usando-se o seguinte procedimento.

*Movimento Angular*

- Estabeleça um sentido positivo ao longo do eixo de rotação e mostre-o ao lado de cada equação cinemática.
- Conhecendo uma relação entre *duas* das quatro variáveis $\alpha$, $\omega$, $\theta$ e $t$, uma terceira variável pode ser determinada usando-se uma das seguintes equações cinemáticas que relacionam todas as três variáveis:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

- Se a aceleração angular do corpo é *constante*, então as seguintes equações podem ser usadas:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

- Obtida uma solução, os sentidos de $\theta$, $\omega$ e $\alpha$ são determinados pelos sinais algébricos de seus valores numéricos.

*Movimento de P*

- Em muitos casos, a velocidade de $P$ e os dois componentes de sua aceleração podem ser determinados pelas equações escalares:

$$v = \omega r$$

$$a_t = \alpha r$$

$$a_n = \omega^2 r$$

- Se a geometria do problema for de difícil visualização, as seguintes equações vetoriais poderão ser usadas:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Nesse caso, $\mathbf{r}_P$ é um vetor com origem em qualquer ponto do eixo de rotação e extremidade em $P$, enquanto $\mathbf{r}$ está contido no plano do movimento de $P$. Qualquer um desses vetores, bem como $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$, devem ser expressos em termos de seus componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; se necessário, os produtos vetoriais devem ser determinados com o uso da expansão do determinante representativo do produto vetorial (veja a Equação C.12).

## EXEMPLO 16.1

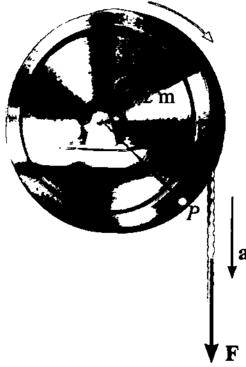



Figura 16.5

Enrola-se um cabo em torno de um disco inicialmente em repouso, como indica a Figura 16.5. Aplica-se uma força ao cabo, que então adquire uma aceleração $a = (4t)$ m/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine como funções do tempo (a) a velocidade angular do disco e (b) a posição angular do segmento $OP$, em radianos.

### SOLUÇÃO

***Parte (a).*** O disco deve girar em torno do eixo fixo passando por $O$. Logo, o ponto $P$ do disco tem movimento circular e sua aceleração tem componentes tangencial *e* normal. O componente tangencial é $(a_P)_t = (4t)$ m/s$^2$, pois o cabo está enrolado na borda do disco, movendo-se *tangente* a ela. Assim, a aceleração angular do disco é

$$(\curvearrowleft +) \qquad (a_P)_t = \alpha r$$

$$(4t)\text{ m/s}^2 = \alpha(0{,}2\text{ m})$$

$$\alpha = 20t \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

Usando esse resultado, podemos determinar a velocidade angular $\omega$ por $\alpha = d\omega/dt$, pois essa equação relaciona $\alpha$, $t$ e $\omega$. Integrando, com a condição inicial $\omega = 0$ em $t = 0$, temos

$$(\curvearrowleft +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = (20t)\text{ rad/s}^2$$

$$\int_0^\omega d\omega = \int_0^t 20t\, dt$$

$$\omega = 10t^2 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Por que não se pode usar a Equação 16.5 ($\omega = \omega_0 + \alpha_c t$) para se obter esse resultado?

***Parte (b).*** Usando o resultado obtido para a velocidade angular, podemos calcular a posição angular $\theta$ de $OP$ a partir de $\omega = d\theta/dt$, pois essa equação relaciona $\theta$, $\omega$ e $t$. Após integração com a condição inicial $\theta = 0$ em $t = 0$, temos

$$(\curvearrowleft +) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = (10t^2)\text{ rad/s}$$

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t 10t^2\, dt$$

$$\theta = 3{,}33t^3 \text{ rad} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## EXEMPLO 16.2

Usa-se o motor para girar uma roda com suas pás no interior do equipamento mostrado na foto. Os detalhes do projeto estão na Figura 16.6*a*. Se a polia $A$ conectada ao motor inicia seu movimento a partir do repouso, com uma aceleração angular $\alpha_A = 2$ rad/s$^2$, determine os módulos da velocidade e da aceleração do ponto $P$ da roda $B$, após esta ter completado uma revolução. Suponha que a correia de transmissão não escorregue na polia nem na roda.

## SOLUÇÃO



***Movimento Angular.*** Primeiro convertemos uma revolução em radianos. Como há $2\pi$ rad em uma revolução, então

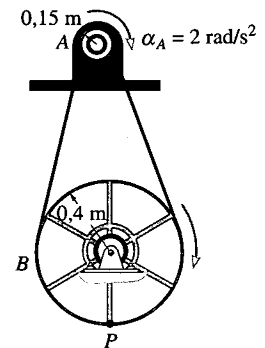
$$\theta_B = 1 \text{ rev}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 6{,}283 \text{ rad}$$

Para se determinar a velocidade angular da polia $A$, calcula-se primeiro o deslocamento angular. Como a correia não escorrega, um comprimento equivalente $s$ dessa correia deve se desenrolar tanto da polia quanto da roda num mesmo intervalo de tempo. Logo,

$$s = \theta_A r_A = \theta_B r_B; \qquad \theta_A(0{,}15 \text{ m}) = 6{,}283(0{,}4 \text{ m})$$
$$\theta_A = 16{,}76 \text{ rad}$$

Uma vez que $\alpha_A$ é constante, a velocidade angular da polia $A$ é, portanto,

$$(\circlearrowleft+) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$
$$\omega_A^2 = 0 + 2(2 \text{ rad/s}^2)(16{,}76 \text{ rad} - 0)$$
$$\omega_A = 8{,}188 \text{ rad/s}$$

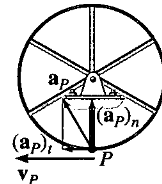


(a)

A correia tem a mesma velocidade e componente tangencial da aceleração quando passa pela polia e pela roda. Logo,

$$v = \omega_A r_A = \omega_B r_B; \qquad 8{,}188 \text{ rad/s}(0{,}15 \text{ m}) = \omega_B(0{,}4 \text{ m})$$
$$\omega_B = 3{,}070 \text{ rad/s}$$

$$a_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B; \qquad 2 \text{ rad/s}^2(0{,}15 \text{ m}) = \alpha_B(0{,}4 \text{ m})$$
$$\alpha_B = 0{,}750 \text{ rad/s}^2$$



(b)

**Figura 16.6**

***Movimento de P.*** Como mostra o diagrama cinemático na Figura 16.6*b*, temos

$$v_P = \omega_B r_B = 3{,}070 \text{ rad/s}(0{,}4 \text{ m}) = 1{,}23 \text{ m/s} \qquad \textit{Resposta}$$

$$(a_P)_t = \alpha_B r_B = 0{,}750 \text{ rad/s}^2(0{,}4 \text{ m}) = 0{,}3 \text{ m/s}^2$$

$$(a_P)_n = \omega_B^2 r_B = (3{,}070 \text{ rad/s})^2(0{,}4 \text{ m}) = 3{,}77 \text{ m/s}^2$$

Portanto,

$$a_P = \sqrt{(0{,}3)^2 + (3{,}77)^2} = 3{,}78 \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

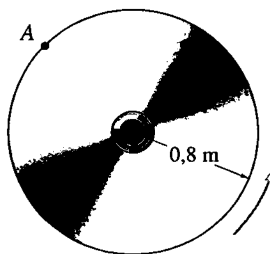
## PROBLEMAS

**16.1.** Uma roda tem velocidade angular inicial de 10 rad/s, no sentido horário, e aceleração angular de 3 rad/s$^2$. Determine o número de revoluções que devem ocorrer para se atingir uma velocidade angular de 15 rad/s, no sentido horário. Qual é o tempo necessário para isso?

**16.2.** A velocidade angular de um volante aumenta uniformemente de 15 rad/s para 60 rad/s em 80 s. Se o diâmetro do volante é de 2 pés, determine os módulos dos componentes normal e tangencial da aceleração de um ponto de sua periferia, quando $t = 80$ s. Determine também a distância percorrida pelo ponto durante esse tempo.

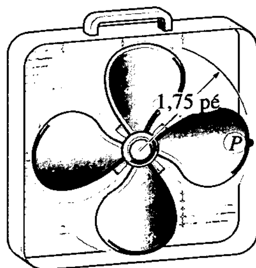
**16.3.** A velocidade angular do disco é definida por $\omega = (5t^2 + 2)$ rad/s, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módu-

los da velocidade e da aceleração do ponto $A$ do disco quando $t = 0{,}5$ s.



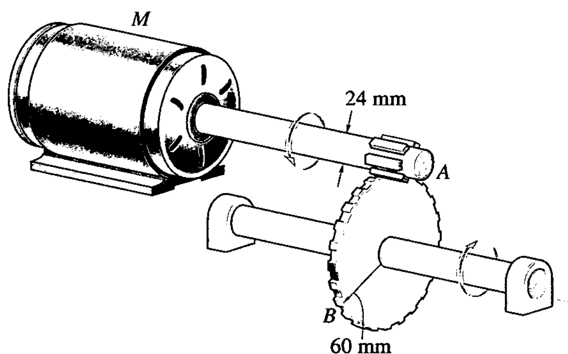

**Problema 16.3**

***16.4.** Imediatamente após o ventilador ter sido ligado, o motor comunica às lâminas uma aceleração angular $\alpha = (20e^{-0{,}6t})$ rad/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade escalar da ponta $P$ de uma das lâminas quando $t = 3$ s. Quantas revoluções são realizadas em 3 s? As lâminas estão em repouso em $t = 0$.



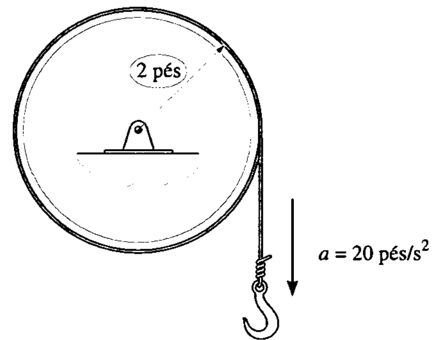

**Problema 16.4**

**16.5.** Em virtude de um aumento de potência, o motor $M$ gira o eixo $A$ com aceleração angular $\alpha = (0{,}06\theta^2)$ rad/s$^2$, onde $\theta$ é dado em radianos. Se o eixo estava girando inicialmente a uma velocidade angular $\omega_0 = 50$ rad/s, determine a velocidade angular do eixo $B$ após esse eixo ter sofrido um deslocamento angular $\Delta\theta = 10$ rev.



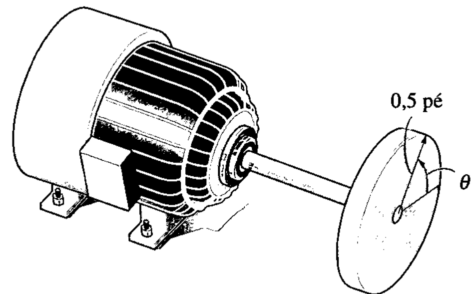

**Problema 16.5**

**16.6.** O gancho movimenta-se a partir do repouso com aceleração de 20 pés/s$^2$. Se ele está preso a uma corda enrolada no tambor, determine a aceleração angular do tambor e sua velocidade angular após se completarem 10 rev. Quantas revoluções adicionais ocorrerão se o gancho continuar em movimento por mais 4 s?



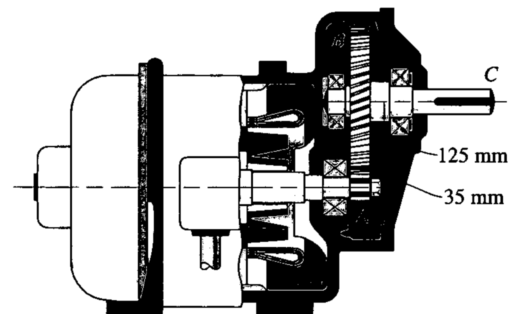

**Problema 16.6**

**16.7.** O disco movimentado pelo motor tem sua posição angular definida por $\theta = (20t + 4t^2)$ rad, onde $t$ é dado em segundos. Determine o número de revoluções, a velocidade e a aceleração angulares do disco quando $t = 90$ s.



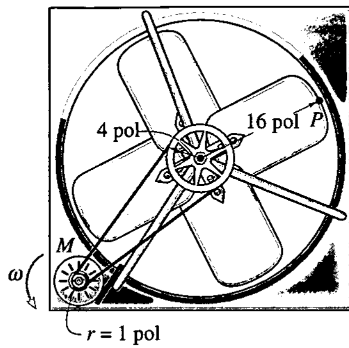

**Problema 16.7**

***16.8.** A engrenagem $A$ do eixo do motor tem aceleração $\alpha = 3$ rad/s$^2$. Se as engrenagens $A$ e $B$ têm as dimensões indicadas na figura, determine a velocidade e o deslocamento angulares do eixo de saída $C$, partindo do repouso quando $t = 2$ s. O eixo está fixado na engrenagem $B$, girando com ela.




**Problema 16.8**

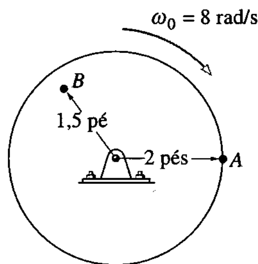
**16.9.** O motor $M$ começa a girar com velocidade angular $\omega = 4(1 - e^{-t})$ rad/s, onde $t$ é dado em segundos. Se as polias e o ventilador têm os raios indicados na figura, determine os módulos da velocidade e da aceleração do ponto $P$ numa das pás do ventilador quando $t = 0{,}5$ s. Qual é a velocidade máxima desse ponto?




Problema 16.9

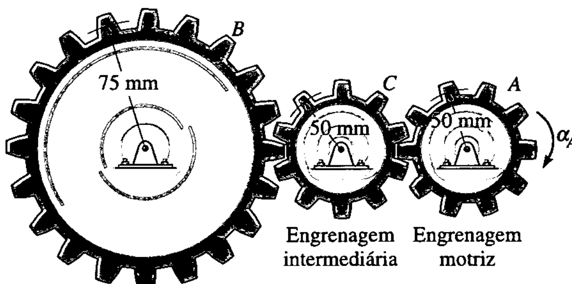
**16.10.** O disco está girando inicialmente com velocidade angular $\omega_0 = 8$ rad/s. Se ele for submetido a uma aceleração constante $\alpha = 6$ rad/s$^2$, determine os módulos da velocidade e dos componentes $n$ e $t$ da aceleração do ponto $A$, no instante $t = 0{,}5$ s.

**16.11.** O disco está girando inicialmente com velocidade angular $\omega_0 = 8$ rad/s. Se ele for submetido a uma aceleração constante $\alpha = 6$ rad/s$^2$, determine os módulos da velocidade e dos componentes $n$ e $t$ da aceleração do ponto $B$, imediatamente após o disco ter completado 2 revoluções.



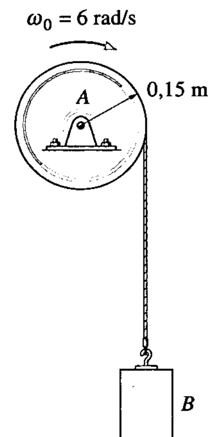

Problemas 16.10/11

***16.12.** Quando somente duas engrenagens estão engrenadas, a engrenagem motora $A$ e a conduzida $B$ sempre giram em sentidos opostos. Para tê-las girando no *mesmo* sentido, introduz-se uma engrenagem intermediária $C$. Para o caso mostrado na figura, determine a velocidade angular da engrenagem $B$ quando $t = 5$ s, se $A$ parte do repouso e tem aceleração angular $\alpha_A = (3t + 2)$ rad/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos.



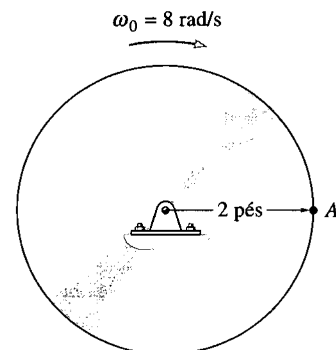

Problema 16.12

**16.13.** Um motor comunica a um disco aceleração angular $\alpha = (0{,}6t^2 + 0{,}75)$ rad/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Se a velocidade angular inicial do disco é $\omega_0 = 6$ rad/s, determine os módulos da velocidade e da aceleração do bloco $B$ quando $t = 2$ s.



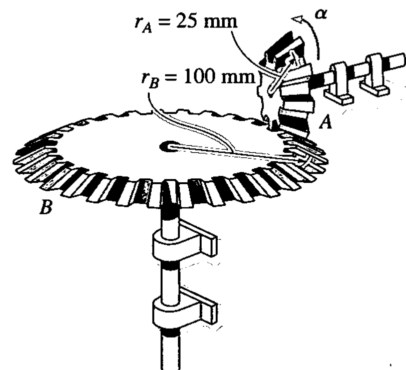

Problema 16.13

**16.14.** O disco está girando inicialmente com velocidade angular $\omega_0 = 8$ rad/s. Considerando uma aceleração angular constante $\alpha_c = 6$ rad/s$^2$, determine os módulos da velocidade e dos componentes $n$ e $t$ da aceleração do ponto $A$, no instante $t = 3$ s.




Problema 16.14

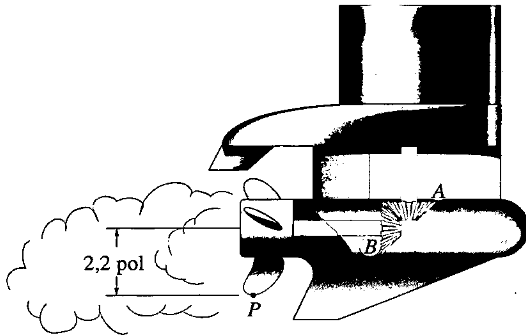
**16.15.** Considere as engrenagens $A$ e $B$ mostradas na figura. Se $A$ parte do repouso e tem aceleração angular constante $\alpha_A = 2$ rad/s$^2$, determine o tempo necessário para $B$ atingir uma velocidade angular $\omega_B = 50$ rad/s.




Problema 16.15

***16.16.** A engrenagem $A$ no eixo motor tem raio $r_A = 0{,}7$ pol e o pinhão $B$ no eixo propulsor do motor de popa tem raio $r_B = 1{,}4$ pol. Determine a velocidade angular do propulsor em $t = 3$ s, se o eixo motor gira com aceleração angular $\alpha = (300\sqrt{t})$ rad/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. O propulsor está inicialmente em repouso e a estrutura do motor não se move.

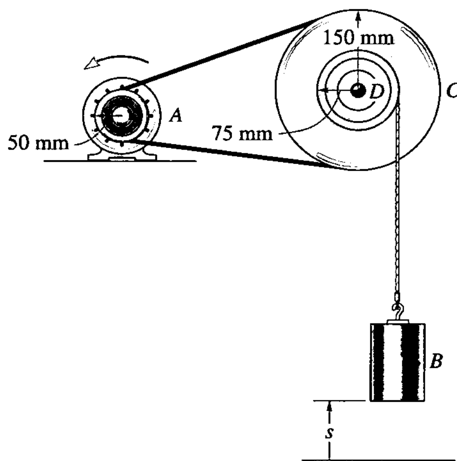
**16.17.** Para o motor de popa considerado no Problema 16.16 determine os módulos da velocidade e da aceleração de um ponto $P$ na extremidade da hélice no instante $t = 0{,}75$ s.




**Problemas 16.16/17**

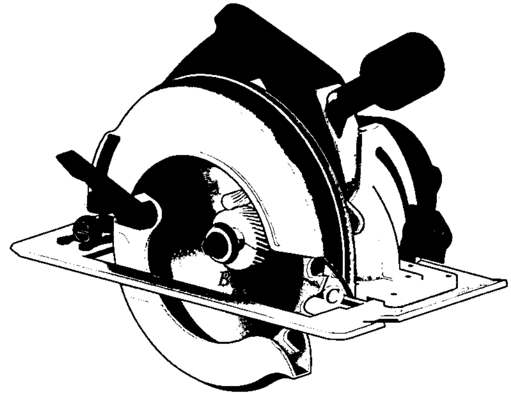
**16.18.** Partindo do repouso quando $s = 0$, a polia $A$ tem aceleração angular $\alpha = (6\theta)$ rad/s$^2$, onde $\theta$ é dado em radianos. Determine a velocidade do bloco $B$ quando ele atinge a posição $s = 6$ m. A polia tem um cubo interno $D$ que está fixo em $C$ e gira com ela.

**16.19.** Partindo do repouso quando $s = 0$, a polia $A$ tem aceleração angular constante $\alpha_c = 6$ rad/s$^2$. Determine a velocidade do bloco $B$ quando ele atinge a posição $s = 6$ m. A polia tem um cubo interno $D$ que está fixo em $C$ e gira com ela.



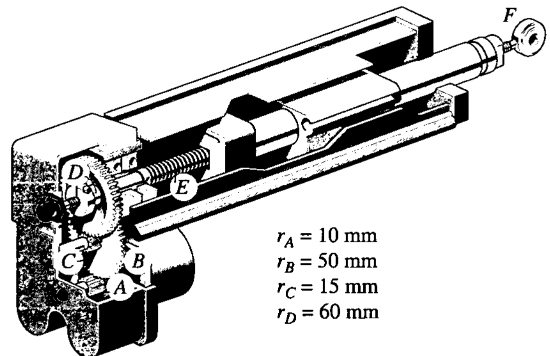

**Problemas 16.18/19**

***16.20.** O motor da serra circular gira seu eixo motor com velocidade angular $\omega = (20t^{2/3})$ rad/s, onde $t$ é dado em segundos. Se os raios das engrenagens $A$ e $B$ são 0,25 pol e 1 pol, respectivamente, determine os módulos da velocidade e da aceleração do dente $C$ da serra após o eixo motor ter girado de um ângulo $\theta = 5$ rad, partindo do repouso.




**Problema 16.20**

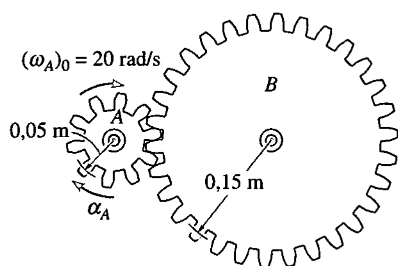
**16.21.** Devido ao parafuso $E$, o atuador movimenta o braço $F$, à medida que o motor gira a engrenagem $A$. Se as engrenagens têm os raios informados na figura e o parafuso $E$ tem um passo $p = 2$ mm, determine a velocidade de $F$ quando o motor gira $A$ com velocidade angular $\omega_A = 20$ rad/s. *Dica:* o passo do parafuso indica quanto este avança a cada revolução.




**Problema 16.21**

**16.22.** Um motor gira uma engrenagem $A$ com aceleração $\alpha_A = (0{,}25\theta^3 + 0{,}5)$ rad/s$^2$, onde $\theta$ é dado em radianos. Se $A$ tem velocidade inicial $(\omega_A)_0 = 20$ rad/s, determine a velocidade angular da engrenagem $B$ após $A$ ter sofrido um deslocamento angular de 10 rev.

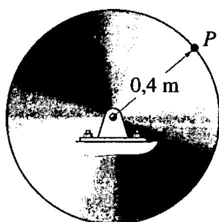
**16.23.** Um motor gira uma engrenagem $A$ com aceleração angular $\alpha_A = (4\theta^3)$ rad/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Se $A$ tem velocidade angular inicial $(\omega_A)_0 = 20$ rad/s, determine a velocidade angular da engrenagem $B$ quando $t = 2$ s.




**Problemas 16.22/23**

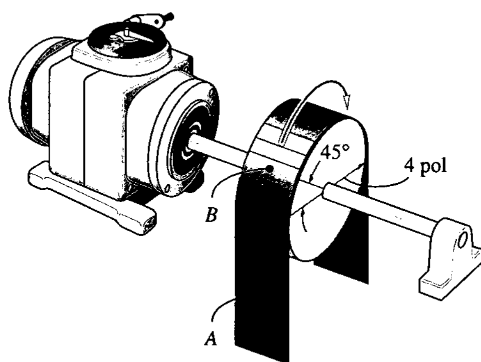
*16.24. O disco parte do repouso, adquirindo aceleração angular $\alpha = (10\theta^{1/3})$ rad/s$^2$, onde $\theta$ é dado em radianos. Determine a velocidade angular do disco e seu deslocamento angular quando $t = 4$ s.

16.25. O disco parte do repouso, adquirindo uma aceleração angular $\alpha = (10\theta^{1/3})$ rad/s$^2$, onde $\theta$ é dado em radianos. Determine os módulos dos componentes normal e tangencial da aceleração de um ponto $P$ na borda do disco quando $t = 4$ s.



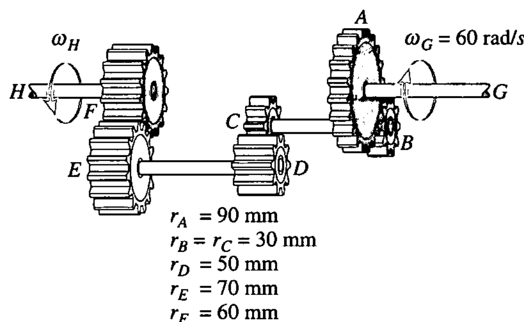

**Problemas 16.24/25**

16.26. A velocidade angular do tambor aumenta uniformemente de 6 rad/s, quando $t = 0$, para 12 rad/s, quando $t = 5$ s. Determine os módulos da velocidade e da aceleração dos pontos $A$ e $B$ na correia, quando $t = 1$ s. Nesse instante, os pontos situam-se como indicado na figura.



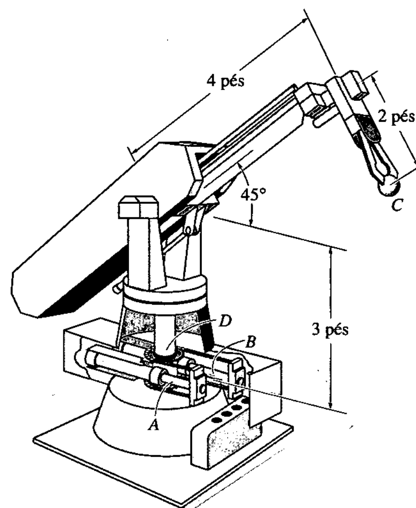

**Problema 16.26**

16.27. A operação de 'ré' para uma transmissão automotiva de três marchas está esquematizada na figura. Se o eixo $G$ está girando com velocidade angular de 60 rad/s, determine a velocidade angular do eixo de saída $H$. Cada engrenagem gira em torno de um eixo fixo. Observe que as engrenagens $A$ e $B$, $C$ e $D$ e $E$ e $F$ estão engatadas. Os raios das engrenagens são dados na figura.



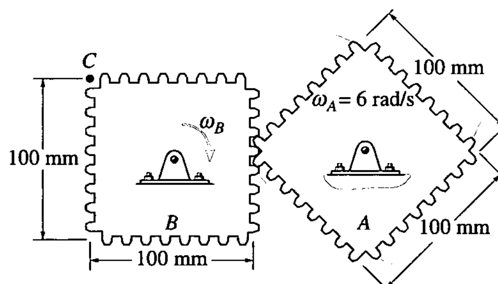

**Problema 16.27**

*16.28. A rotação do braço de robô ocorre graças ao movimento linear dos cilindros $A$ e $B$. Se o cilindro $A$ está se estendendo a uma taxa constante de 0,5 pé/s, enquanto $B$ se mantém fixo, determine os módulos da velocidade e da aceleração da peça $C$ presa pelas garras do braço. A engrenagem $D$ tem raio de 0,10 pé.



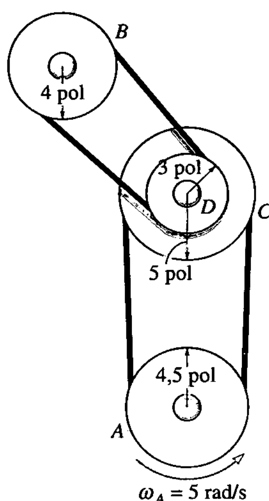

**Problema 16.28**

16.29. A engrenagem $A$ gira com velocidade angular constante $\omega_A = 6$ rad/s. Determine a maior velocidade angular de $B$ e a velocidade escalar máxima do ponto $C$.



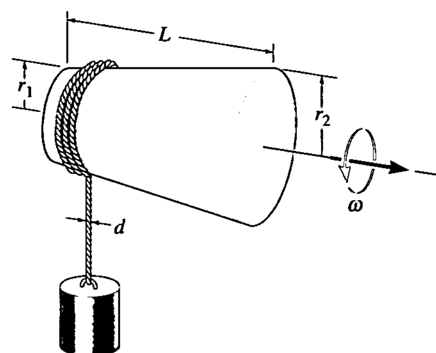

**Problema 16.29**

16.30. Um moinho usa um arranjo de polias e correias para transmissão de potência. Quando $t = 0$, um motor elétrico está girando a polia $A$ com velocidade angular $\omega_A = 5$ rad/s. Se a polia está sujeita a uma aceleração angular de 2 rad/s$^2$, determine a velocidade angular da polia $B$ após esta ter executado 6 revoluções. O cubo em $D$ está rigidamente *conectado* à polia $C$, girando com ela.



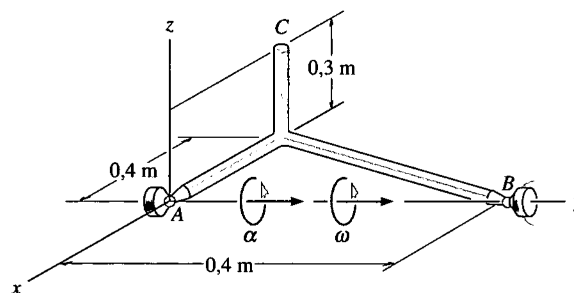

**Problema 16.30**

**16.31.** A corda de diâmetro $d$ está enrolada no tambor cônico que tem as dimensões mostradas na figura. Se o tambor gira a uma taxa constante $\omega$, determine a aceleração do bloco que está subindo. Despreze o pequeno deslocamento horizontal do bloco.




**Problema 16.31**

***16.32.** O arranjo de hastes é suportado por juntas esféricas em $A$ e $B$. Num dado instante o arranjo está girando em torno do eixo $y$ com velocidade angular $\omega = 5$ rad/s e aceleração angular $\alpha = 8$ rad/s$^2$. Determine os módulos da velocidade e da aceleração do ponto $C$ no instante considerado. Resolva o problema usando vetores cartesianos e as equações 16.9 e 16.13.




**Problema 16.32**

# *16.4 ANÁLISE DO MOVIMENTO ABSOLUTO

O *movimento plano geral* de um corpo é uma composição de uma translação com uma rotação. Supondo que o corpo é representado por uma placa fina, essa placa se translada em seu plano e gira em torno de um eixo perpendicular a ela. O movimento pode ser completamente definido pelo conhecimento da rotação de uma linha fixa no corpo e do movimento de um ponto desse corpo. Uma maneira de definir esses movimentos é utilizar uma coordenada de posição retilínea $s$ para situar o ponto em sua trajetória e uma coordenada de posição angular $\theta$ para especificar a orientação da linha. As duas coordenadas são então relacionadas explorando-se a geometria do problema. Pela *aplicação direta* das equações diferenciais $v = ds/dt$, $a = dv/dt$, $\omega = d\theta/dt$ e $\alpha = d\omega/dt$, o *movimento* do ponto e o *movimento angular* da linha podem ser relacionados. Em alguns casos, esse procedimento também pode ser usado para relacionar o movimento de um corpo com o de outro a ele conectado, ou para estudar o movimento de um corpo sujeito a uma rotação em torno de um eixo fixo.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

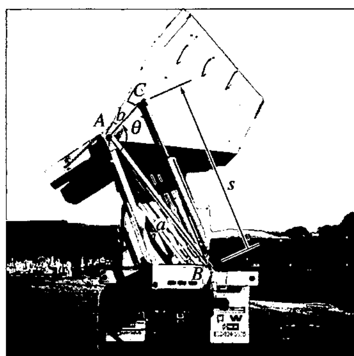
A velocidade e a aceleração de um ponto $P$ em movimento retilíneo podem ser relacionadas com a velocidade e a aceleração angulares de uma linha pertencente ao corpo, utilizando-se o seguinte procedimento.

***Equação para a Coordenada de Posição***

- Localize o ponto $P$ usando uma coordenada de posição $s$, que deve ser medida a partir de uma *origem fixa* e *dirigida ao longo da trajetória retilínea* do ponto $P$.
- Meça a partir de uma linha de referência a posição angular $\theta$ de uma linha pertencente ao corpo.
- A partir das dimensões do corpo, relacione $s$ com $\theta$, $s = f(\theta)$, usando geometria e/ou trigonometria.

***Derivadas Temporais***

- Calcule a primeira derivada de $s = f(\theta)$, em relação ao tempo, para obter uma relação entre $v$ e $\omega$.
- Calcule a segunda derivada temporal para obter uma relação entre $a$ e $\alpha$.
- Em cada caso a regra da cadeia do cálculo diferencial deve ser usada ao se calcularem as derivadas da equação da coordenada de posição.




*A caixa de depósito de lixo sobre o caminhão gira em torno de um eixo fixo passando pelo pino A. Esta operação é comandada pela extensão do cilindro hidráulico BC. A posição angular da caixa pode ser definida usando-se a coordenada de posição angular θ. A posição do ponto C na caixa é definida usando-se a coordenada retilínea s. Como a e b são comprimentos fixos, as coordenadas podem ser relacionadas pela lei dos cossenos,* $s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$. *Utilizando-se a regra da cadeia, a derivada temporal desta equação relaciona a velocidade escalar do cilindro hidráulico que se estende com a velocidade angular da caixa, isto é,* $v = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}(2ab\,\text{sen}\,\theta)$.

## EXEMPLO 16.3

A extremidade $R$ da barra mostrada na Figura 16.7 mantém-se em contato com a came por meio de uma mola. Se a came gira em torno de um eixo pelo ponto $O$, com uma aceleração angular $\alpha$ e velocidade angular $\omega$, determine a velocidade e a aceleração da barra quando a came tem uma posição arbitrária $\theta$.

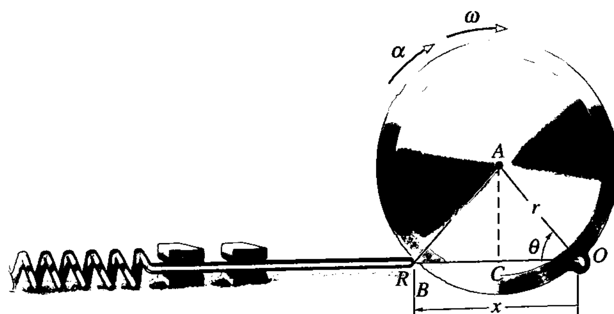



**Figura 16.7**

## SOLUÇÃO

***Equação da Coordenada de Posição.*** Podemos usar as coordenadas $\theta$ e $x$ para relacionar o *movimento rotacional* do segmento $OA$ da came com o *movi-*

*mento retilíneo* da barra. Essas coordenadas são medidas a partir de um ponto fixo $O$ e podem ser relacionadas entre si usando-se trigonometria. Como $OC = CB = r\cos\theta$ (Figura 16.7), então

$$x = 2r\cos\theta$$

***Derivadas Temporais.*** Usando a regra da cadeia, temos

$$\frac{dx}{dt} = -2r(\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = -2r\omega\operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resposta}$$

$$\frac{dv}{dt} = -2r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\operatorname{sen}\theta - 2r\omega(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = -2r(\alpha\operatorname{sen}\theta + \omega^2\cos\theta) \qquad \textit{Resposta}$$

Os sinais negativos indicam que $v$ e $a$ têm sentidos opostos ao do eixo positivo $x$.

## EXEMPLO 16.4

Num dado instante, o cilindro de raio $r$, mostrado na Figura 16.8, tem uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine a velocidade e a aceleração do seu centro $G$, considerando que o cilindro rola sem escorregar.

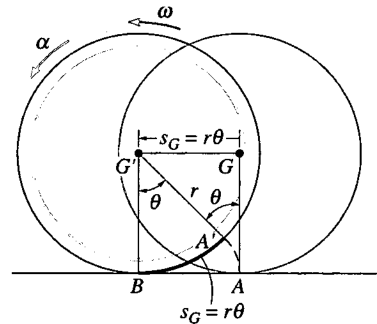



**Figura 16.8**

## SOLUÇÃO

***Equação da Coordenada de Posição.*** Por inspeção, o ponto $G$ se move *horizontalmente* para a esquerda de $G$ para $G'$ à medida que o cilindro rola (Figura 16.8). Conseqüentemente, sua nova posição $G'$ será especificada pela coordenada de posição *horizontal* $s_G$, que é medida a partir da posição inicial ($G$) do centro do cilindro. Observemos também que à medida que o cilindro rola sem escorregar, os pontos de sua superfície contatam o solo de tal modo que o comprimento de arco $A'B$ deve ser igual à distância $s_G$. Conseqüentemente, o movimento exige que a linha radial $GA$ gire de um ângulo $\theta$ para a posição $G'A'$. Como o arco $A'B = r\theta$, então $G$ percorre a distância

$$s_G = r\theta$$

***Derivadas Temporais.*** Levando em conta que $r$ é constante, as derivadas temporais sucessivas dessa equação, $\omega = d\theta/dt$ e $\alpha = d\omega/dt$, resultam em

$$s_G = r\theta$$

$$v_G = r\omega \qquad \textbf{Resposta}$$

$$a_G = r\alpha \qquad \textbf{Resposta}$$

Lembremos que essas relações são válidas apenas se o cilindro (disco, roda, bola etc.) rola *sem* escorregar.

## EXEMPLO 16.5

A janela mostrada na Figura 16.9 é aberta por meio do cilindro hidráulico $AB$. Se o cilindro se estende a uma taxa constante de 0,5 m/s, determine a velocidade e a aceleração angulares da janela quando $\theta = 30°$.

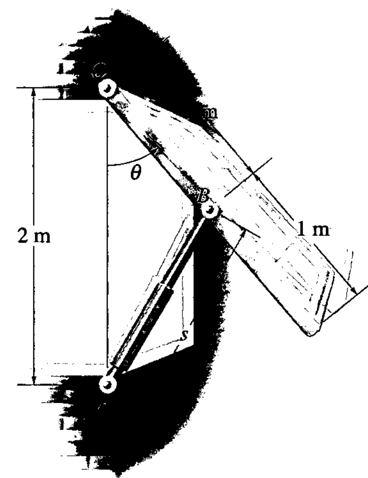



**Figura 16.9**

### SOLUÇÃO

***Equação da Coordenada de Posição.*** O movimento angular da janela pode ser obtido usando-se a coordenada $\theta$, enquanto a extensão ou o *movimento ao longo do cilindro hidráulico* é definida usando-se a coordenada $s$, que mede a distância do ponto fixo $A$ ao ponto móvel $B$. Essas coordenadas podem ser relacionadas pela lei dos cossenos:

$$s^2 = (2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2 - 2(2\text{ m})(1\text{ m})\cos\theta$$

$$s^2 = 5 - 4\cos\theta \qquad (1)$$

Quando $\theta = 30°$,

$$s = 1.239\text{ m}$$

***Derivadas Temporais.*** Derivando a Equação 1, temos

$$2s\frac{ds}{dt} = 0 - 4(-\text{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$s(v_s) = 2(\text{sen}\,\theta)\omega \qquad (2)$$

Como $v_s = 0{,}5$ m/s, então, para $\theta = 30°$,

$$(1{,}239\text{ m})(0{,}5\text{ m/s}) = 2\,\text{sen}\,30°\omega$$

$$\omega = 0{,}620\text{ rad/s} \qquad \textbf{Resposta}$$

A derivada temporal da Equação 2 resulta em

$$\frac{ds}{dt}v_s + s\frac{dv_s}{dt} = 2(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\omega + 2(\text{sen}\,\theta)\frac{d\omega}{dt}$$

$$v_s^2 + sa_s = 2(\cos\theta)\omega^2 + 2(\text{sen}\,\theta)\alpha$$

Como $a_s = dv_s/dt = 0$, então

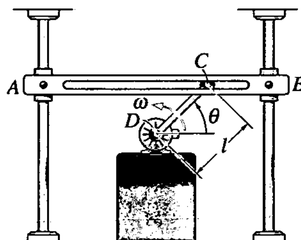
$$(0{,}5\text{ m/s})^2 + 0 = 2\cos 30°(0{,}620\text{ rad/s})^2 + 2\,\text{sen}\,30°\alpha$$

$$\alpha = -0{,}415\text{ rad/s}^2 \qquad \textbf{Resposta}$$

O sinal negativo da aceleração angular indica que a janela está se desacelerando.

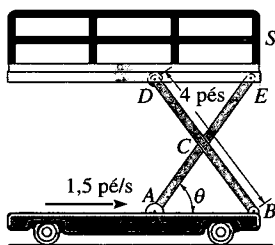
## PROBLEMAS

**16.33.** A barra $DC$ gira uniformemente em torno do eixo em $D$ com velocidade angular constante $\omega$. Determine a velocidade e a aceleração da barra $AB$ que é obrigada pelas guias a se mover verticalmente.



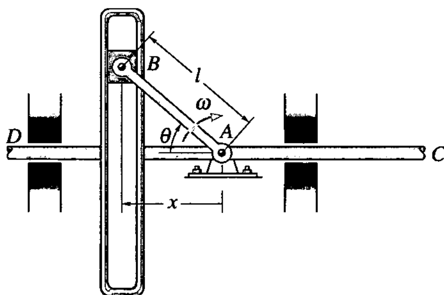

**Problema 16.33**

**16.34.** A plataforma $S$ pode ser elevada hidraulicamente pelo movimento do rolete $A$ que se aproxima do pino $B$. Se a velocidade de $A$ é de 1,5 pé/s, determine a velocidade com que a plataforma sobe, em função de $\theta$. As barras de 4 pés estão articuladas por pinos em seus pontos médios.




**Problema 16.34**

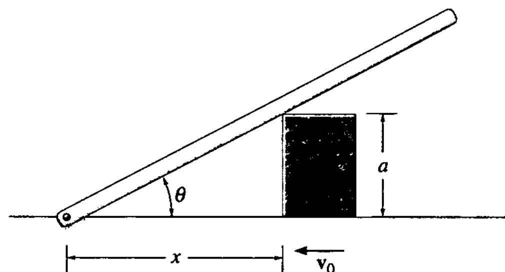
**16.35.** Usa-se o mecanismo para converter o movimento de rotação com velocidade angular constante $\omega$ da barra $AB$ em movimento de translação da barra $CD$. Determine a velocidade e a aceleração de $CD$ para qualquer ângulo $\theta$.



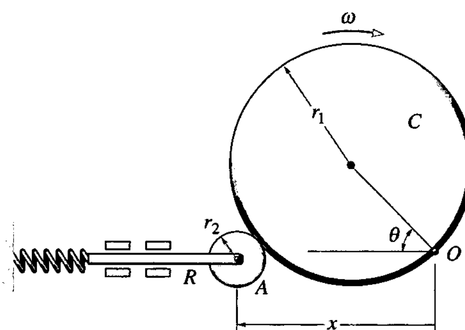

**Problema 16.35**

***16.36.** O bloco se desloca para a esquerda com velocidade constante $\mathbf{v}_0$. Determine a velocidade e a aceleração angulares da barra, em função de $\theta$.

**16.37.** Determine a velocidade da barra $R$ em função do ângulo $\theta$ da came se esta gira com velocidade angular constante $\omega$. O pino em $O$ não causa interferência no movimento de $A$ sobre $C$.

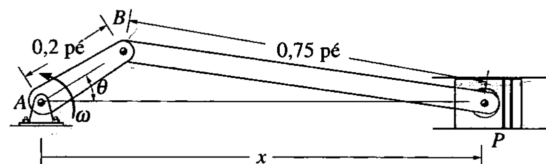



**Problema 16.36**



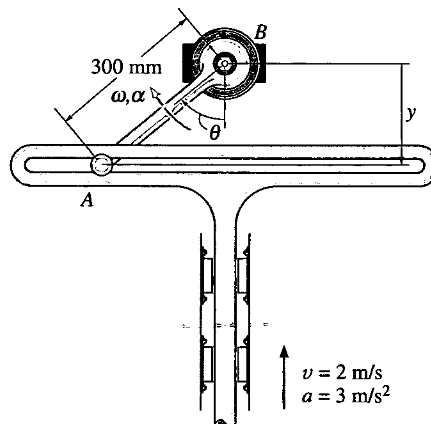

**Problema 16.37**

**16.38.** A manivela $AB$ gira com velocidade angular constante $\omega = 150$ rad/s. Determine a velocidade do pistão $P$ no instante em que $\theta = 30°$.



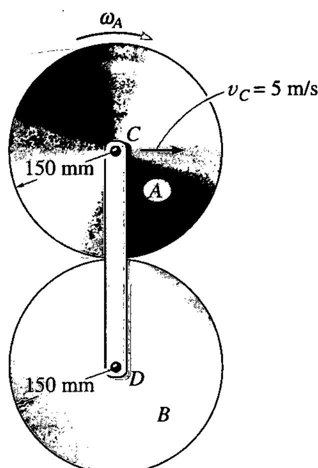

**Problema 16.38**

**16.39.** No instante em que $\theta = 50°$, a guia está subindo com aceleração de 3 m/s$^2$ e velocidade de 2 m/s. Determine a aceleração e a velocidade angulares da barra $AB$ no instante considerado. *Observação:* o movimento para cima da guia ocorre no sentido negativo de $y$.



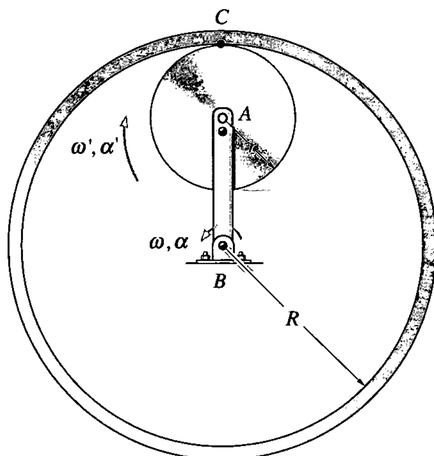

**Problema 16.39**

***16.40.** O disco $A$ rola sem escorregar sobre a superfície de um cilindro *fixo* $B$. Determine a velocidade angular de $A$ se o seu centro $C$ tem velocidade $v_c = 5$ m/s. Quantas revoluções $A$ terá feito em torno de seu centro ao fim de uma volta completa da barra $DC$?



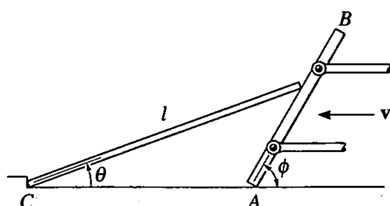

**Problema 16.40**

**16.41.** O braço $AB$ tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$. Se não há escorregamento entre o disco e a superfície curva fixa, determine a velocidade e a aceleração angulares do disco.



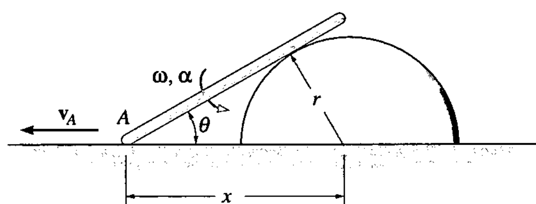

**Problema 16.41**

**16.42.** A placa inclinada move-se para a esquerda com velocidade constante $\mathbf{v}$. Determine a velocidade e a aceleração angulares da barra delgada de comprimento $l$. A barra apoiada no degrau pode girar em torno de $C$ à medida que escorrega sobre a placa.



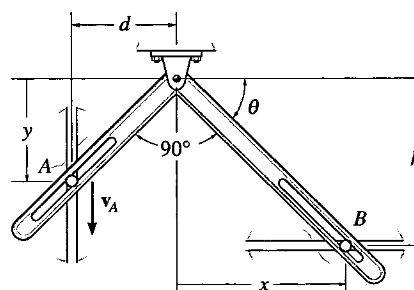

**Problema 16.42**

**16.43.** A extremidade $A$ da barra está se movendo para a esquerda com velocidade constante $\mathbf{v}_A$. Determine a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ da barra, em função de sua posição $x$.



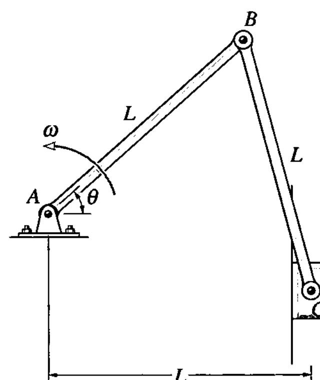

**Problema 16.43**

***16.44.** Os pinos $A$ e $B$ têm de se deslocar nas ranhuras vertical e horizontal, respectivamente. Se o braço ranhurado impõe ao pino $A$ um movimento para baixo com velocidade $\mathbf{v}_A$, determine a velocidade de $B$, na situação mostrada na figura.



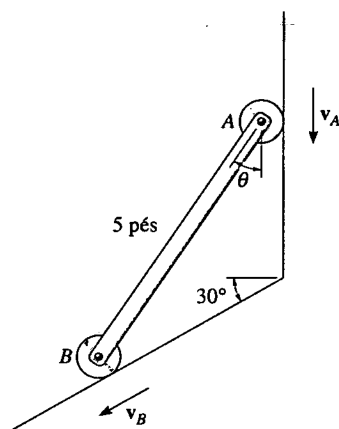

**Problema 16.44**

**16.45.** A barra $AB$ gira uniformemente em torno do pino $A$, com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine a velocidade e a aceleração do bloco $C$, no instante em que $\theta = 60°$.



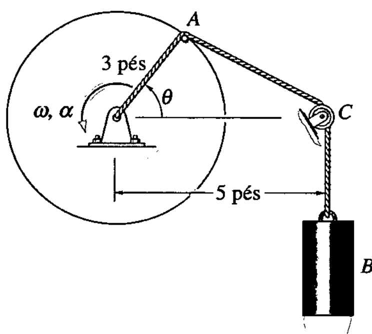

**Problema 16.45**

**16.46.** O movimento da barra está limitado pelos planos inclinados, como mostrado na figura. Se a velocidade do rolete $A$ é $v_A = 6$ pés/s, quando $\theta = 45°$, determine a velocidade angular da barra e a velocidade do rolete $B$, nesse instante.



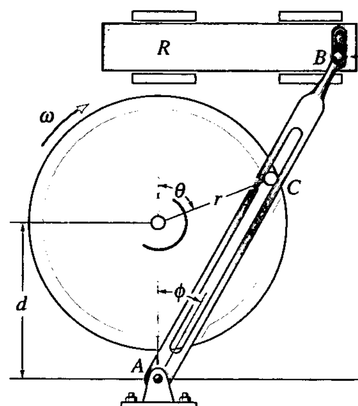

Problema 16.46

**16.47.** O disco está girando com uma velocidade angular $\omega$ e uma aceleração angular $\alpha$. Determine a velocidade e a aceleração do cilindro $B$. Despreze o tamanho da polia $C$.



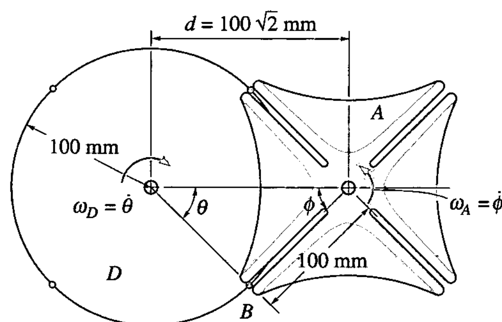

Problema 16.47

***16.48.** A barra ranhurada está articulada em $A$ e pode mover horizontalmente a peça $R$. Se o disco gira com velocidade angular constante $\omega$, determine a velocidade e a aceleração da peça $R$. O pino $C$ está fixo no disco e se move com ele.




Problema 16.48

**16.49.** A roda de Genebra $A$ fornece movimento de rotação intermitente com velocidade angular $\omega_A$, por movimento contínuo do disco $D$, com velocidade angular $\omega_D = 2$ rad/s. Para $d = 100\sqrt{2}$ mm, a roda tem velocidade angular nula no instante em que o pino $B$ entra ou sai de qualquer uma das quatro ranhuras. Determine o módulo da velocidade angular $\omega_A$ da roda de Genebra para qualquer ângulo $\theta$ em que o pino $B$ esteja em contato com uma ranhura.




Problema 16.49

## 16.5 Análise do Movimento Relativo: Velocidade

O movimento plano geral de um corpo rígido pode ser descrito como uma *combinação* de uma translação com uma rotação. Para ver *separadamente* esses 'componentes' do movimento, usaremos uma *análise de movimento relativo*, considerando dois conjuntos de eixos coordenados. O sistema de coordenadas $x, y$ é fixo e mede a posição *absoluta* de dois pontos, $A$ e $B$, do corpo (Figura 16.10*a*). A origem do sistema de coordenadas $x', y'$ será fixada no 'ponto de base' $A$, cujo movimento, em geral, é *conhecido*. Os eixos desse sistema de coordenadas não giram com o corpo; a eles será permitido apenas movimento de translação relativamente ao sistema fixo.

***Posição.*** O vetor de posição $\mathbf{r}_A$ mostrado na Figura 16.10*a* especifica a localização do 'ponto de base' $A$, e o vetor de posição relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ localiza o ponto $B$ em relação ao ponto $A$. Por adição vetorial, a *posição* de $B$ é, portanto,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

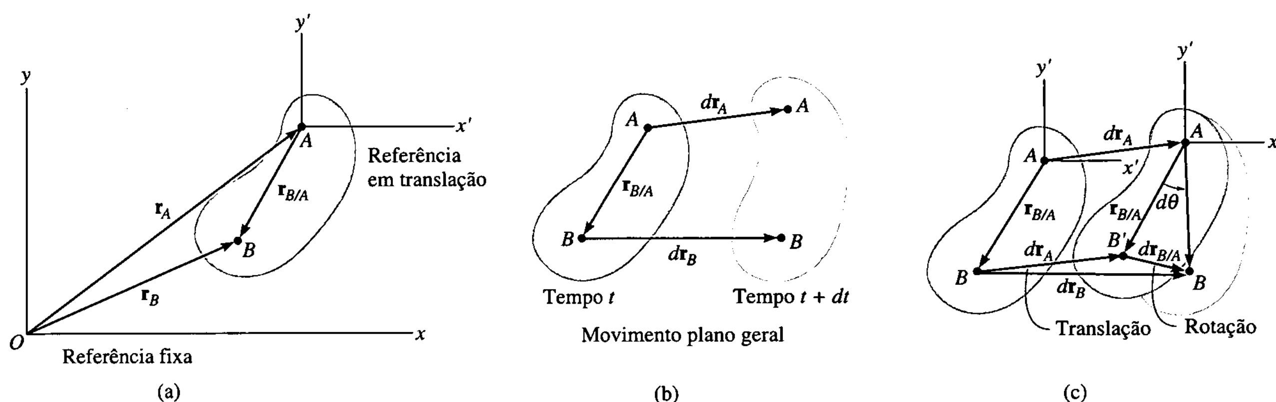
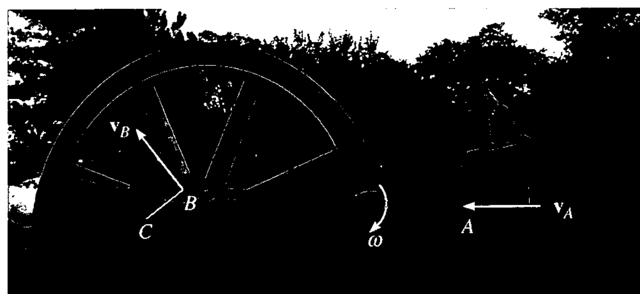



**Figura 16.10**

***Deslocamento.*** Durante o intervalo de tempo $dt$, os pontos $A$ e $B$ deslocam-se de $d\mathbf{r}_A$ e $d\mathbf{r}_B$, como mostrado na Figura 16.10*b*. Se consideramos o movimento plano geral por partes, primeiro o corpo sofre uma *translação* definida por $d\mathbf{r}_A$, de modo que o ponto de base $A$ se move para sua *posição final* e $B$ se move para $B'$(Figura 16.10*c*). O corpo, então, *gira* de um ângulo $d\theta$ em torno de $A$, de modo que $B'$ sofre um *deslocamento relativo* $d\mathbf{r}_{B/A}$, movendo-se para a sua posição final $B$. Devido à rotação em torno de $A$, $d\mathbf{r}_{B/A} = \mathbf{r}_{B/A}\, d\theta$ e o deslocamento de $B$ é

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

devido à rotação em torno de $A$ (termo $d\mathbf{r}_{B/A}$)
devido à translação de $A$ (termo $d\mathbf{r}_A$)
devido à translação e à rotação (termo $d\mathbf{r}_B$)




*O bloco deslizante $A$ move-se horizontalmente para a esquerda com velocidade $\mathbf{v}_A$ e impõe à manivela $CB$ uma rotação anti-horária, de modo que $\mathbf{v}_B$, tangente à trajetória circular, é voltado para cima e para a esquerda. A biela $AB$ tem movimento plano geral, com velocidade angular $\omega$ no instante indicado na figura.*

***Velocidade.*** Para se determinar a relação entre as velocidades dos pontos $A$ e $B$, é necessário derivar a equação da posição, ou simplesmente dividir a equação do deslocamento por $dt$. Disso resulta

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Os termos $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$ e $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$ são medidos no sistema fixo $x, y$ e representam as *velocidades absolutas* dos pontos $A$ e $B$, respectivamente. O módulo do terceiro termo é $r_{B/A}\, d\theta/dt = r_{B/A}\dot{\theta} = r_{B/A}\omega$, onde $\omega$ é a velocidade angular do corpo no instante considerado. Denominaremos esse termo *velocidade relativa* e o representaremos por $\mathbf{v}_{B/A}$, que é a velocidade de $B$ em relação a $A$, medida por um observador fixo no sistema em translação $x'$, $y'$. Como o corpo é rígido, note que esse observador vê o ponto $B$ movendo-se

apenas num *arco de circunferência* de raio $r_{B/A}$. Em outras palavras, *o corpo parece mover-se como se ele estivesse girando com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em torno do eixo z' passando por A*. Conseqüentemente, $\mathbf{v}_{B/A}$ tem módulo $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ e direção perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$. Temos, portanto,

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}} \qquad (16.15)$$

onde

$\mathbf{v}_B$ = velocidade do ponto $B$
$\mathbf{v}_A$ = velocidade do ponto de base $A$
$\mathbf{v}_{B/A}$ = velocidade do ponto $B$ em relação a $A$

Esse movimento relativo é *circular*, com velocidade de *módulo* $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ e direção perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$.

Cada um dos três termos na Equação 16.15 está representado graficamente nos *diagramas cinemáticos* mostrados nas figuras 16.10*d* a 16.10*f*. Vemos que a velocidade de $B$ (Figura 16.10*d*), é determinada considerando que o corpo translada com velocidade $\mathbf{v}_A$ (Figura 16.10*e*) e gira em torno de $A$ com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ (Figura 16.10*f*). A adição vetorial desses dois efeitos, aplicada a $B$, resulta na velocidade $\mathbf{v}_B$, como mostrado na Figura 16.10*g*.

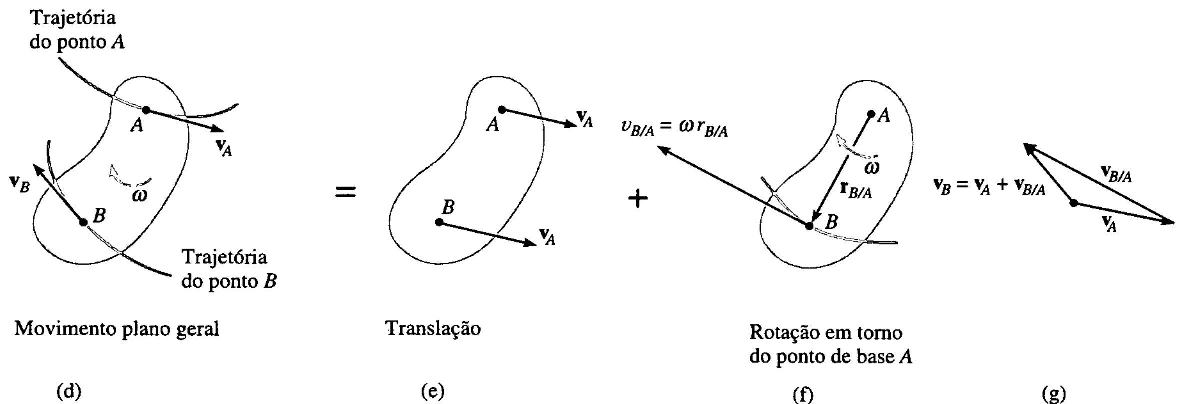



**Figura 16.10**

Como a velocidade relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ representa o efeito do *movimento circular* em torno de $A$, esse termo pode ser expresso pelo produto escalar $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ (Equação 16.9). Logo, usando esse resultado, podemos reescrever a Equação 16.15 como

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}} \qquad (16.16)$$

onde

$\mathbf{v}_B$ = velocidade do ponto $B$
$\mathbf{v}_A$ = velocidade do ponto de base $A$
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidade angular do corpo
$\mathbf{r}_{B/A}$ = vetor de posição do ponto $B$ relativamente a $A$

A equação para a velocidade 16.15 ou 16.16 pode ser usada de forma prática para se estudar o movimento plano geral de um corpo rígido que pode girar em torno de um pino ou está em contato com outros corpos em movimento. Ao se aplicar essas equações, os pontos $A$ e $B$ devem ser escolhidos, em geral, como pontos de conexão com outros corpos ou pontos de contato com corpos cujos movimentos sejam *conhecidos*. Por exemplo, os pontos $A$ e $B$ da barra $AB$ (Figura 16.11*a*) têm trajetórias circulares, pois a roda e a barra

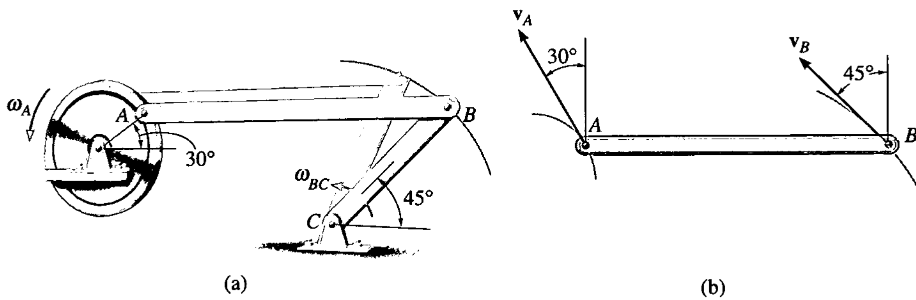



**Figura 16.11**

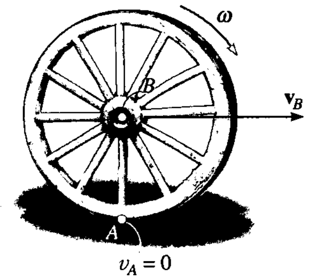



**Figura 16.12**

*CB* têm movimentos de rotação. As *direções* de $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ podem ser estabelecidas, pois as velocidades são sempre *tangentes* às trajetórias dos pontos *A* e *B* (Figura 16.11*b*). No caso da roda mostrada na Figura 16.12, que rola sem escorregar, o ponto *A* pode ser escolhido quando toca o solo. Nessa posição, *A* tem (momentaneamente) velocidade nula, pois o solo não se move. Mais ainda, o centro da roda, *B*, desloca-se ao longo de uma trajetória horizontal, logo $\mathbf{v}_B$ é horizontal.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A equação para a velocidade relativa pode ser aplicada, quer usando-se análise vetorial cartesiana, quer escrevendo-se os componentes escalares *x* e *y* diretamente. Para aplicação, sugere-se o seguinte procedimento.

### ANÁLISE VETORIAL

*Diagrama Cinemático*

- Estabeleça as direções dos eixos fixos *x*, *y* e desenhe um diagrama cinemático para o corpo. Indique nesse diagrama as velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ dos pontos *A* e *B*, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e o vetor de posição relativa $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Se os módulos de $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ e $\boldsymbol{\omega}$ são desconhecidos, os sentidos desses vetores podem ser arbitrados.

*Equação da Velocidade*

- Para aplicar $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ expresse os vetores na forma cartesiana e os substitua na equação. Calcule o produto vetorial e, em seguida, iguale os respectivos componentes **i** e **j** para obter duas equações escalares.
- Se a solução apresentar uma resposta *negativa* para uma incógnita, isso indicará que o sentido do vetor é oposto ao arbitrado no diagrama cinemático.

### ANÁLISE ESCALAR

*Diagrama Cinemático*

- Se a equação da velocidade for aplicada na forma escalar, então o módulo e a direção da velocidade relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ deverão ser estabelecidos. Desenhe um diagrama cinemático como aquele da Figura 16.10*f*, que mostre o movimento relativo. Como se considera o corpo 'ligado por um pino' no ponto de base *A*, o módulo da velocidade relativa é dado por $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$. A direção e o sentido de $\mathbf{v}_{B/A}$ podem ser obtidos do diagrama, com a direção de $\mathbf{v}_{B/A}$ sendo perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$ e seu sentido sendo tomado de acordo com o do movimento de rotação indicado pelo vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.†

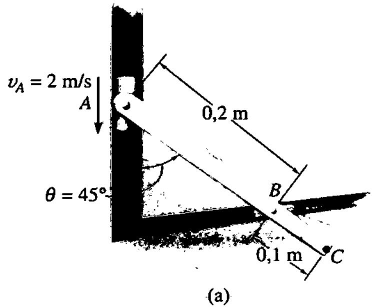
*Equação da Velocidade*

- Escreva a Equação 16.15 na forma simbólica, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$, e sob cada um dos termos represente graficamente os vetores, mostrando seus módulos, direções e sentidos. As equações escalares são determinadas a partir dos componentes *x* e *y* desses vetores.

† A notação $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pino})}$ pode ser útil para se lembrar que *A* é 'ligado por pino'.

## EXEMPLO 16.6

A barra mostrada na Figura 16.13*a* é guiada pelos blocos $A$ e $B$, que se movem nas ranhuras fixas. Se a velocidade de $A$ é de 2 m/s para baixo, determine a velocidade de $B$ no instante em que $\theta = 45°$.



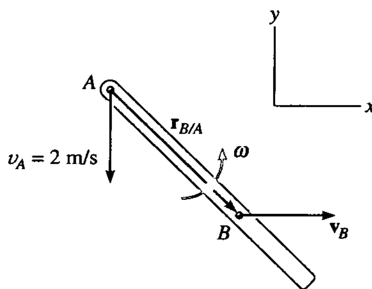




**Figura 16.13**

### SOLUÇÃO (ANÁLISE VETORIAL)

***Diagrama Cinemático.*** Como $A$ e $B$ têm de se mover nas ranhuras fixas e a velocidade $\mathbf{v}_A$ é orientada para baixo, a velocidade $\mathbf{v}_B$ deve ser orientada horizontalmente para a direita (Figura 16.13*b*). Esses movimentos causam na barra um giro no sentido anti-horário; isto é, pela regra da mão direita, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é orientada para fora, perpendicularmente ao plano do movimento. Conhecendo-se o módulo, a direção e o sentido de $\mathbf{v}_A$ e as direções e sentidos de $\mathbf{v}_B$ e $\boldsymbol{\omega}$, é possível aplicar aos pontos $A$ e $B$ a equação da velocidade $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ para se obterem os módulos $v_B$ e $\omega$. Como $\mathbf{r}_{B/A}$ é necessário ao cálculo, ele também é indicado na Figura 16.13*b*.

***Equação da Velocidade.*** Expressando cada um dos vetores mostrados na Figura 16.13*b* em termos dos seus componentes **i**, **j**, **k** e aplicando a Equação 16.16 ao ponto de base $A$ e ao ponto $B$, temos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + [\omega\mathbf{k} \times (0{,}2 \text{ sen } 45°\mathbf{i} - 0{,}2 \cos 45°\mathbf{j})]$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0{,}2\omega \text{ sen } 45°\mathbf{j} + 0{,}2\omega \cos 45°\mathbf{i}$$

Igualando os componentes **i** e **j**, obtemos

$$v_B = 0{,}2\omega \cos 45° \qquad 0 = -2 + 0{,}2\omega \text{ sen } 45°$$

Logo,

$$\omega = 14{,}1 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$ ***Resposta***

Como ambos os resultados são *positivos*, os *sentidos* de $\mathbf{v}_B$ e $\boldsymbol{\omega}$ são *de fato* os mostrados na Figura 16.13*b*. Devemos enfatizar que esses resultados são válidos somente no instante em que $\theta = 45°$. Calculando para $\theta = 44°$, obtemos $v_B = 2{,}07$ m/s e $\omega = 14{,}4$ rad/s; para $\theta = 46°$, $v_B = 1{,}93$ m/s e $\omega = 13{,}9$ rad/s etc.

Agora que a velocidade de um ponto ($A$) e a velocidade angular são *conhecidas*, podemos determinar a velocidade de qualquer outro ponto da barra. Como um exercício, veja se pode aplicar a Equação 16.16 aos pontos $A$ e $C$ ou aos pontos $B$ e $C$, mostrando que quando $\theta = 45°$, a velocidade $\mathbf{v}_C$ tem módulo $v_C = 3{,}16$ m/s e está orientada a $\theta = 18{,}4°$ para cima, a partir da horizontal.

## EXEMPLO 16.7

O cilindro mostrado na Figura 16.14*a* rola sem escorregar sobre a superfície da correia transportadora que se move a 2 pés/s. Determine a velocidade do ponto $A$. O cilindro gira no sentido horário com velocidade angular $\omega = 15$ rad/s.

## SOLUÇÃO I (ANÁLISE VETORIAL)

*Diagrama Cinemático.* Como não há escorregamento, o ponto $B$ do cilindro que contata a correia tem a mesma velocidade desta (Figura 16.14$b$). A velocidade angular do cilindro é conhecida, de modo que é possível aplicar a equação da velocidade ao ponto $A$ e ao ponto de base $B$ para se determinar $\mathbf{v}_A$.

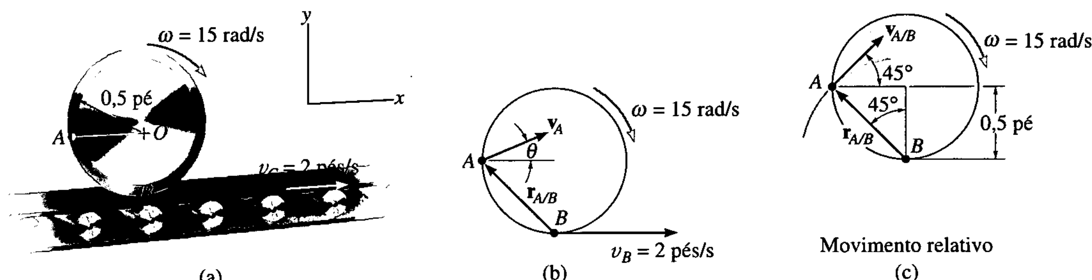



**Figura 16.14**

*Equação da Velocidade.*

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-15\mathbf{k}) \times (-0{,}5\mathbf{i} + 0{,}5\mathbf{j})$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 7{,}50\mathbf{j} + 7{,}50\mathbf{i}$$

de modo que

$$(v_A)_x = 2 + 7{,}50 = 9{,}50 \text{ pés/s} \quad (1)$$

$$(v_A)_y = 7{,}50 \text{ pés/s} \quad (2)$$

Assim,

$$v_A = \sqrt{(9{,}50)^2 + (7{,}50)^2} = 12{,}1 \text{ pés/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{7{,}50}{9{,}50} = 38{,}3° \measuredangle^{\theta}_{v_A} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## SOLUÇÃO II (ANÁLISE ESCALAR)

Um procedimento alternativo consiste em obter diretamente os componentes escalares de $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$. Do diagrama cinemático que mostra o movimento relativo 'circular' indicado por $\mathbf{v}_{A/B}$ (Figura 16.14$c$), temos

$$v_{A/B} = \omega r_{A/B} = (15 \text{ rad/s})\left(\frac{0{,}5 \text{ pé}}{\cos 45°}\right) = 10{,}6 \text{ pés/s} \measuredangle^{45°}$$

Assim,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\begin{bmatrix}(v_A)_x \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(v_A)_y \\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \text{ pés/s} \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10{,}6 \text{ pés/s} \\ \measuredangle^{45°}\end{bmatrix}$$

Igualando os componentes $x$ e $y$ chegamos aos mesmos resultados obtidos anteriormente:

$(\overset{+}{\rightarrow})$ $\quad (v_A)_x = 2 + 10{,}6 \cos 45° = 9{,}50$ pés/s

$(+\uparrow)$ $\quad (v_A)_y = 0 + 10{,}6 \operatorname{sen} 45° = 7{,}50$ pés/s

## EXEMPLO 16.8

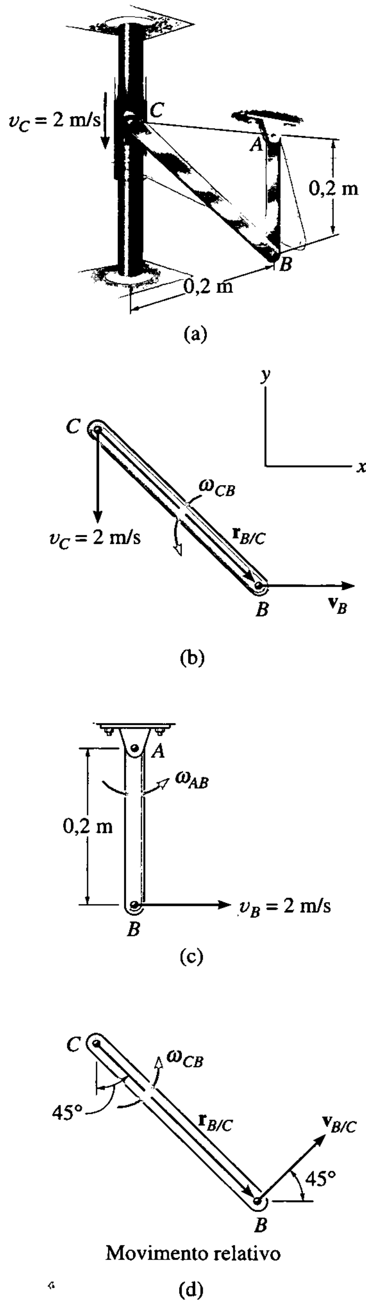



**Figura 16.15**

Num dado instante, o colar $C$ mostrado na Figura 16.15*a* está descendo com uma velocidade de 2 m/s. Determine as velocidades angulares de $CB$ e $AB$, nesse instante.

### SOLUÇÃO I (ANÁLISE VETORIAL)

***Diagrama Cinemático.*** O movimento de descida de $C$ obriga $B$ a mover-se para a direita, bem como $CB$ e $AB$ a girarem no sentido anti-horário. Para resolvermos o problema vamos escrever a equação cinemática apropriada para cada barra.

***Equação da Velocidade.***

*Barra CB* (movimento plano geral): Consideremos a Figura 16.15*b*.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C}$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + \omega_{CB}\mathbf{k} \times (0{,}2\mathbf{i} - 0{,}2\mathbf{j})$$

$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0{,}2\omega_{CB}\mathbf{j} + 0{,}2\omega_{CB}\mathbf{i}$$

$$v_B = 0{,}2\omega_{CB} \qquad (1)$$

$$0 = -2 + 0{,}2\omega_{CB} \qquad (2)$$

$$\omega_{CB} = 10 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$ ***Resposta***

$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

*Barra AB* (rotação em torno de um eixo fixo): Consideremos a Figura 16.15*c*.

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_B$$

$$2\mathbf{i} = \omega_{AB}\mathbf{k} \times (-0{,}2\mathbf{j})$$

$$2 = 0{,}2\omega_{AB}$$

$$\omega_{AB} = 10 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$ ***Resposta***

### SOLUÇÃO II (ANÁLISE ESCALAR)

As equações dos componentes escalares de $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$ podem ser obtidas diretamente. O diagrama cinemático na Figura 16.15*d* mostra o movimento relativo 'circular' indicado por $\mathbf{v}_{B/C}$. Temos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{CB}(0{,}2\sqrt{2} \text{ m}) \\ \measuredangle^{45°} \end{bmatrix}$$

Decompondo esses vetores nas direções $x$ e $y$, temos

$(\overset{+}{\rightarrow})$ $\quad v_B = 0 + \omega_{CB}(0{,}2\sqrt{2} \cos 45°)$

$(+\uparrow)$ $\quad 0 = -2 + \omega_{CB}(0{,}2\sqrt{2} \operatorname{sen} 45°)$

que são os mesmos resultados apresentados nas equações 1 e 2.

## EXEMPLO 16.9

A barra $AB$ mostrada na Figura 16.16$a$ gira no sentido horário, com uma velocidade angular de 30 rad/s, no instante em que $\theta = 60°$. Determine as velocidades angulares da barra $BC$ e da roda nesse instante.

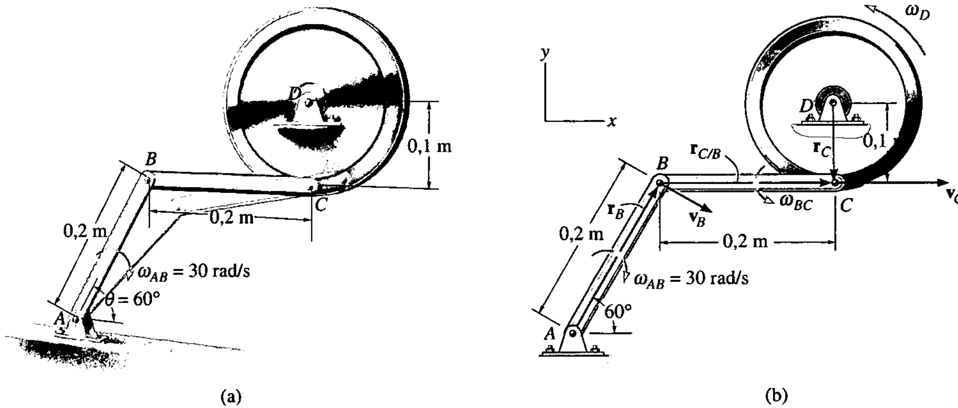



**Figura 16.16**

## SOLUÇÃO (ANÁLISE VETORIAL)

***Diagrama Cinemático.*** Por inspeção, as velocidades dos pontos $B$ e $C$ são definidas pelas rotações da barra $AB$ e da roda em torno dos seus eixos. O 'vetor de posição' e a velocidade angular de cada barra estão no diagrama cinemático na Figura 16.6$b$. Para resolver o problema vamos escrever a equação cinemática apropriada para cada barra.

***Equação da velocidade.***

*Barra AB* (rotação em torno de um eixo fixo):

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_B$$
$$= (-30\mathbf{k}) \times (0{,}2\cos 60°\mathbf{i} + 0{,}2\,\text{sen}\,60°\mathbf{j})$$
$$= \{5{,}20\mathbf{i} - 3{,}0\mathbf{j}\}\ \text{m/s}$$

*Barra BC* (movimento plano geral):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$
$$v_C\mathbf{i} = 5{,}20\mathbf{i} - 3{,}0\mathbf{j} + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (0{,}2\mathbf{i})$$
$$v_C\mathbf{i} = 5{,}20\mathbf{i} + (0{,}2\omega_{BC} - 3{,}0)\mathbf{j}$$
$$v_C = 5{,}20\ \text{m/s}$$
$$0 = 0{,}2\omega_{BC} - 3{,}0$$
$$\omega_{BC} = 15\ \text{rad/s}\circlearrowleft$$

***Resposta***

*Roda* (rotação em torno de um eixo fixo):

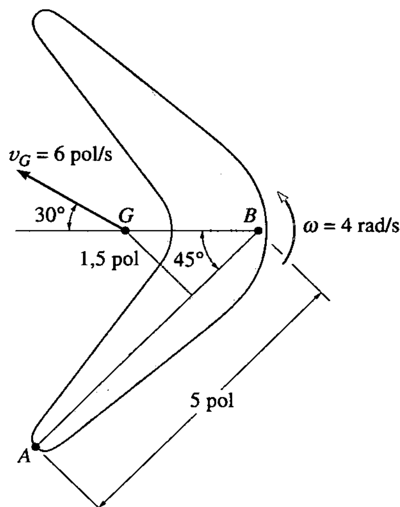
$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_C$$
$$5{,}20\mathbf{i} = (\omega_D\mathbf{k}) \times (-0{,}1\mathbf{j})$$
$$5{,}20 = 0{,}1\omega_D$$
$$\omega_D = 52\ \text{rad/s}\circlearrowleft$$

***Resposta***

Observemos que, por inspeção (Figura 16.16$a$), $v_B = (0{,}2)(30) = 6$ m/s, $\measuredangle^{30°}$ e $\mathbf{v}_C$ é orientada para a direita. Como exercício, use essa informação e tente obter $\omega_{BC}$, aplicando $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B}$ expresso em componentes.

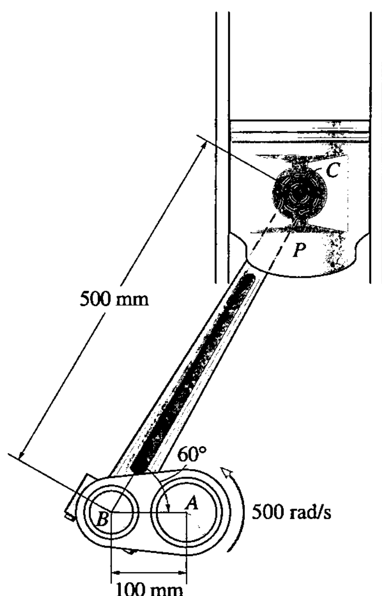
## PROBLEMAS

**16.50.** Num dado instante, um bumerangue tem velocidade angular $\omega = 4$ rad/s e seu centro de massa $G$ tem velocidade $v_G = 6$ pol/s. Determine a velocidade do ponto $B$ nesse instante.




**Problema 16.50**

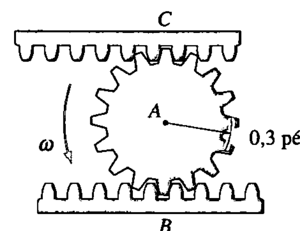
**16.51.** A manivela $AB$ gira a 500 rad/s em torno de um eixo fixo passando por $A$. Determine a velocidade do pistão $P$ no instante em que ele passa pela posição mostrada na figura.




**Problema 16.51**

***16.52.** O pinhão $A$ rola sobre a cremalheira fixa $B$ com velocidade angular $\omega = 4$ rad/s. Determine a velocidade da cremalheira $C$.

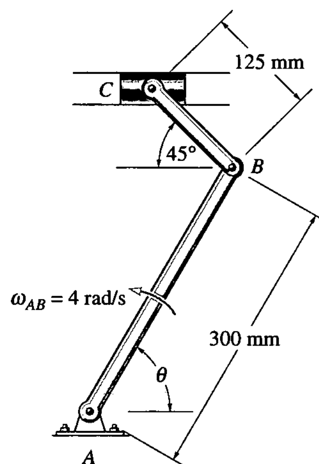
**16.53.** O pinhão $A$ rola sobre cremalheiras. Se $B$ está se deslocando para a direita a 8 pés/s e $C$ para a esquerda a 4 pés/s, determine a velocidade angular de $A$ e a velocidade de seu centro de massa.




**Problemas 16.52/53**

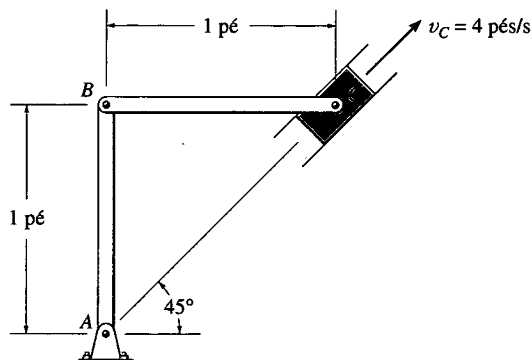
**16.54.** O mecanismo mostrado na figura foi desenvolvido para dar à lâmina presa no cursor $C$ um golpe lento e retornar rapidamente. Determine a velocidade do cursor $C$ no instante em que $\theta = 60°$, se a barra $AB$ gira a 4 rad/s.

**16.55.** Determine a velocidade do cursor $C$ no instante em que $\theta = 45°$, se a barra $AB$ está girando a 4 rad/s.



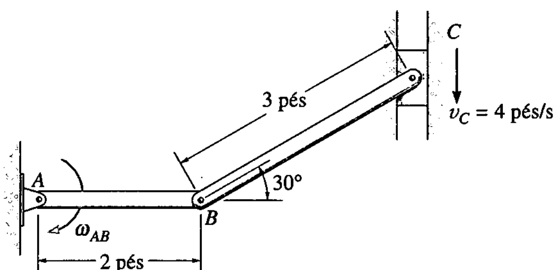

**Problemas 16.54/55**

***16.56.** A velocidade do cursor $C$ é de 4 pés/s tubo acima. Determine a velocidade angular das barras $AB$ e $BC$ e a velocidade do ponto $B$ na situação mostrada na figura.



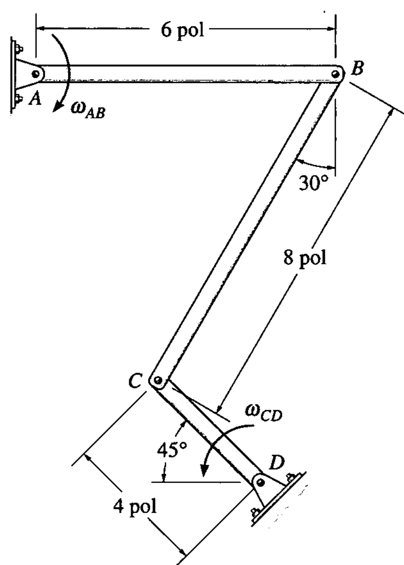

**Problema 16.56**

**16.57.** Se o bloco $C$ está descendo a 4 pés/s, determine a velocidade angular da barra $AB$ na situação mostrada na figura.



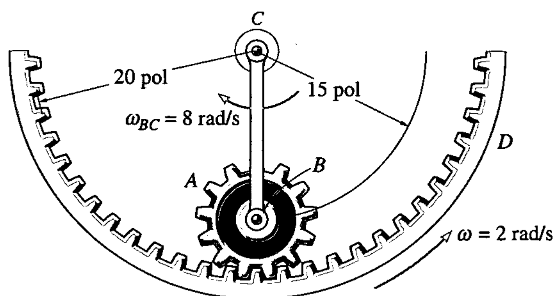

Problema 16.57

**16.58.** Se a barra $AB$ gira com velocidade angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s, determine a velocidade angular de $CD$ na situação mostrada na figura.



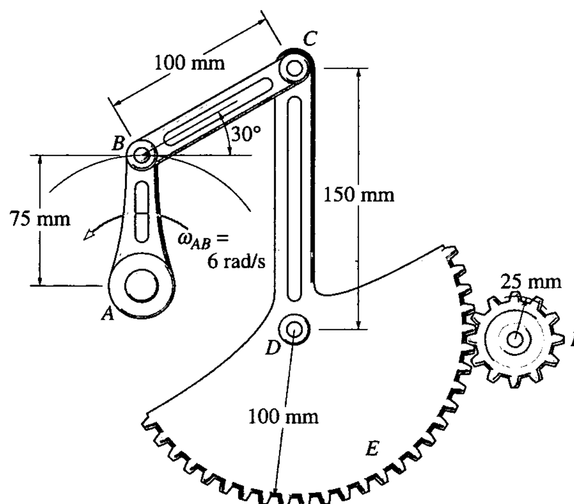

Problema 16.58

**16.59.** A engrenagem planetária $A$ está ligada por pino em $B$. A barra $BC$ gira no sentido horário com velocidade angular de 8 rad/s, enquanto a engrenagem $D$ gira no sentido anti-horário com velocidade de 2 rad/s. Determine a velocidade angular da engrenagem $A$.




Problema 16.59

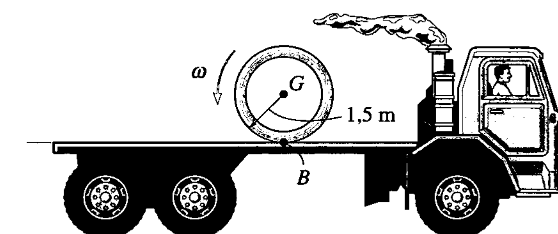
***16.60.** A rotação da barra $AB$ impõe um movimento oscilatório à engrenagem $F$. Se $AB$ tem velocidade angular $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine a velocidade angular da engrenagem $F$ na situação mostrada na figura. A engrenagem $E$ está ligada rigidamente ao braço $CD$ e pode girar em torno do ponto fixo $D$.




Problema 16.60

**16.61.** Num dado instante, o caminhão está se deslocando para a direita a 3 m/s, enquanto o tubo está rolando no sentido anti-horário com velocidade angular $\omega = 8$ rad/s, sem escorregar no ponto $B$. Determine a velocidade do centro de massa $G$ do tubo.

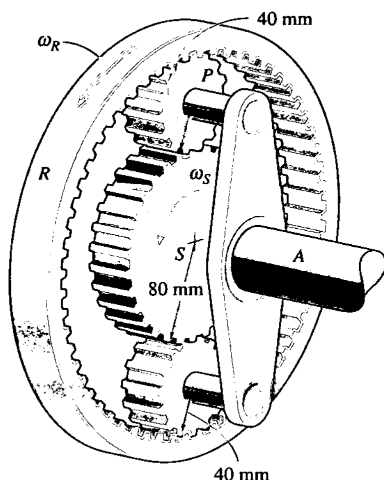
**16.62.** Num dado instante, o caminhão está se deslocando para a direita a 8 m/s. Se o tambor não escorrega em $B$, determine sua velocidade angular, considerando que para um observador no solo o centro de massa $G$ parece estar estacionário.



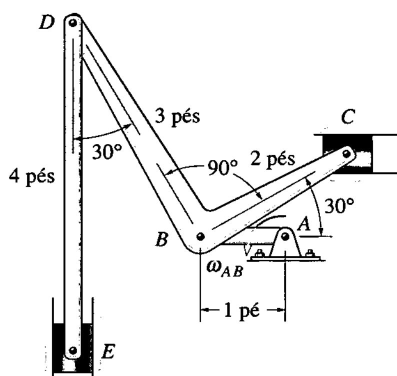

Problemas 16.61/62

**16.63.** O sistema de engrenagens planetárias mostrado na figura é usado na transmissão automática de um automóvel. Bloqueando ou soltando certas engrenagens, é possível movimentar o carro a diferentes velocidades. Considere o caso em que a engrenagem $R$ é mantida fixa, $\omega_R = 0$, e a engrenagem central $S$ gira com velocidade angular $\omega_S = 5$ rad/s. Determine a velocidade angular de cada uma das engrenagens planetárias $P$, assim como a velocidade angular do eixo $A$.

***16.64.** Se a barra $AB$ gira em torno do pino $A$, com velocidade $\omega_{AB} = 5$ rad/s, determine as velocidades dos blocos $C$ e $E$, na situação mostrada na figura.

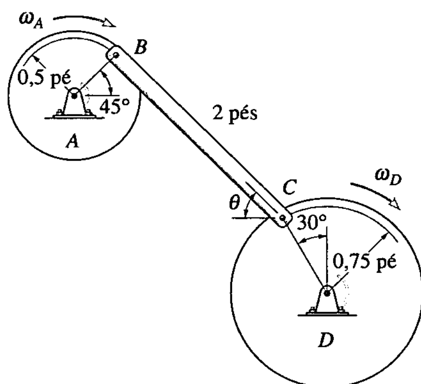



**Problema 16.63**



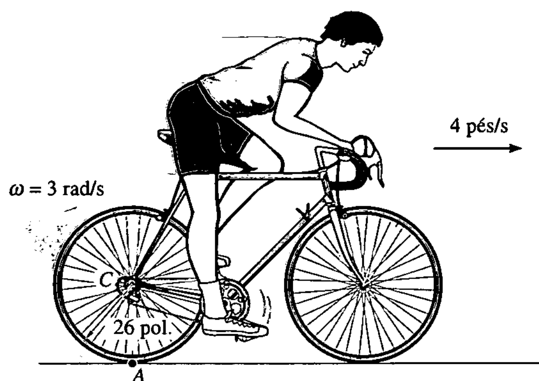

**Problema 16.64**

**16.65.** Se o disco $D$ tem velocidade angular constante $\omega_D$ = 2 rad/s, determine a velocidade angular do disco $A$ no instante em que $\theta = 60°$.



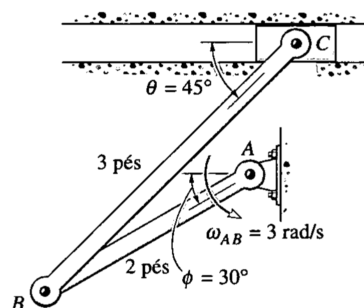

**Problema 16.65**

**16.66.** A bicicleta tem velocidade $v$ = 4 pés/s, enquanto a roda traseira gira no sentido horário com velocidade angular $\omega$ = 3 rad/s, o que provoca um escorregamento de seu ponto de contato $A$. Determine a velocidade do ponto $A$ da roda.



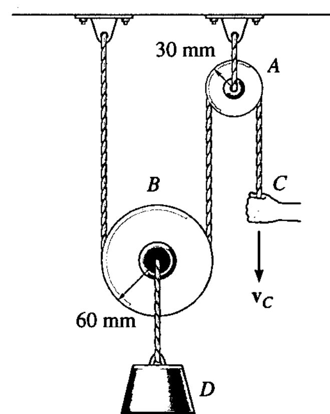

**Problema 16.66**

**16.67.** Se a velocidade angular da barra $AB$ é $\omega_{AB}$ = 3 rad/s, determine a velocidade do bloco $C$ e a velocidade angular da barra $CB$, no instante em que $\theta = 45°$ e $\phi = 30°$.




**Problema 16.67**

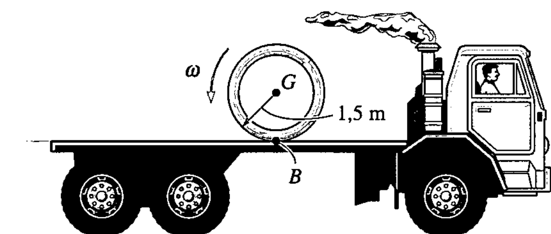
***16.68.** Se a extremidade da corda está sendo puxada com velocidade $v_C$ = 120 mm/s, determine as velocidades angulares das polias $A$ e $B$ e a velocidade do bloco $D$. Suponha que a corda não escorregue nas polias.




**Problema 16.68**

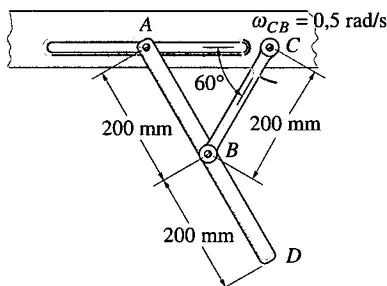
**16.69.** O caminhão desloca-se para a direita a $8t$ m/s, enquanto o tubo rola sem escorregar, com velocidade angular (no sentido anti-horário) $\omega = 2t$ rad/s, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade do centro de massa do tubo, em função do tempo.

**16.70.** Num dado instante, o caminhão desloca-se para a direita a 12 m/s. Se o tubo não escorrega em $B$, determine sua velocidade angular, considerando que para um observador no solo o centro de massa $G$ está se deslocando para a direita a 3 m/s.



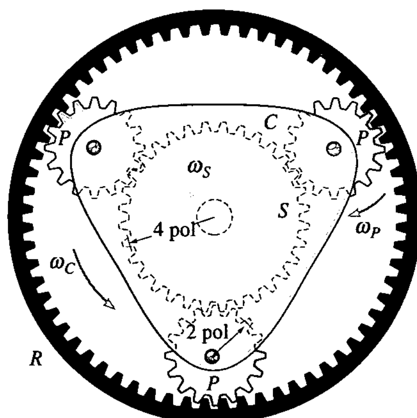

**Problemas 16.69/70**

**16.71.** A figura mostra a janela automática de uma lanchonete vista do alto. Durante a operação, um motor aciona a barra $CB$, imprimindo-lhe uma velocidade angular $\omega_{CB} = 0{,}5$ rad/s. Determine para a situação mostrada na figura a velocidade da extremidade $A$, que se desloca pela guia ranhurada.



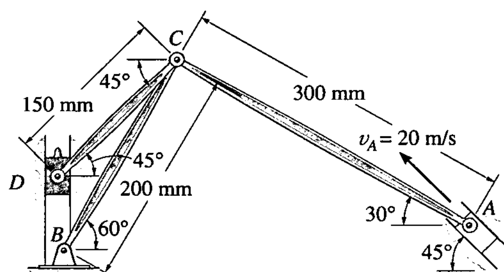

**Problema 16.71**

***16.72.** Parte de uma transmissão automática consiste numa engrenagem *fixa* $R$, três engrenagens planetárias $P$, uma engrenagem central $S$ e um elemento de ligação $C$. Se a engrenagem central gira a uma velocidade angular $\omega_S = 6$ rad/s, determine a velocidade angular $\omega_C$ do *elemento de ligação*. Observe que $C$ está articulado por pinos nos centros das engrenagens planetárias.



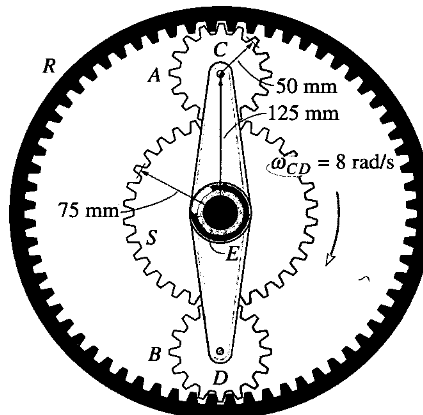

**Problema 16.72**

**16.73.** O mecanismo mostrado na figura é usado numa máquina de rebitar. O mecanismo consiste num pistão $A$, três barras e um rebitador que está preso num cursor $D$. Determine a velocidade de $D$, na situação mostrada na figura, em que $A$ se desloca com velocidade $v_A = 20$ m/s.



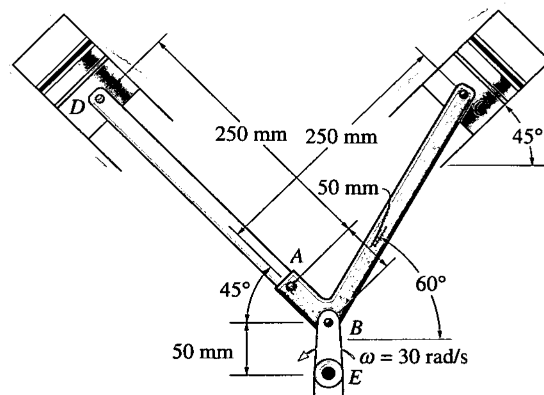

**Problema 16.73**

**16.74.** Numa transmissão de um automóvel, os pinhões planetários $A$ e $B$ giram em eixos que estão montados no elemento de ligação $CD$. Como mostrado na figura, $CD$ está preso a um eixo $E$ que se alinha com o centro da engrenagem central *fixa* $S$. Esse eixo não está preso na engrenagem $S$. Se $CD$ gira com velocidade $\omega_{CD} = 8$ rad/s, determine a velocidade da engrenagem $R$.



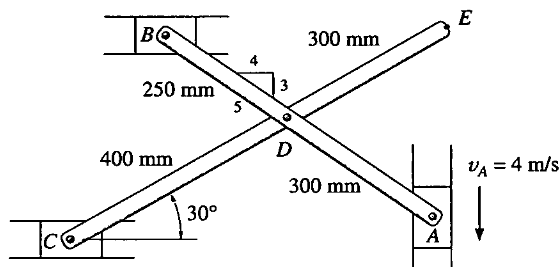

**Problema 16.74**

**16.75.** Um motor de dois cilindros foi desenvolvido de forma a ter os dois pistões conectados à manivela $BE$ por meio de uma barra mestra $ABC$ articulada com a barra $AD$. Se a manivela gira com velocidade $\omega = 30$ rad/s, determine as velocidades dos pistões $C$ e $D$, na situação mostrada na figura.



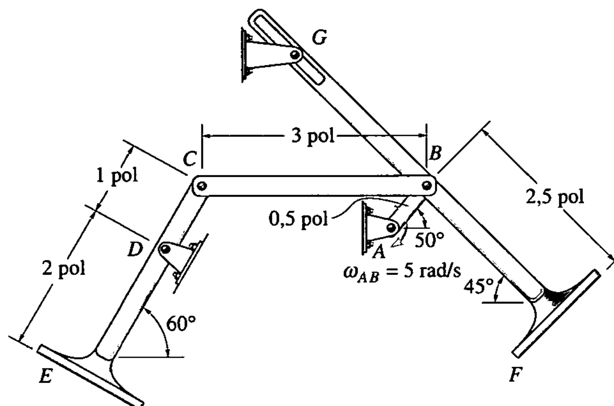

**Problema 16.75**

***16.76.** Se o cursor $A$ desce com velocidade $v_A = 4$ m/s, determine as velocidades dos blocos $B$ e $C$, na situação mostrada na figura.




**Problema 16.76**

**16.77.** A figura ilustra um mecanismo para caminhar usado com freqüência em animais de brinquedo. Se a manivela $AB$ é movida a corda, de forma que sua velocidade angular é $\omega_{AB} = 5$ rad/s, determine a velocidade do pé traseiro $E$, na situação mostrada na figura. Embora não seja necessário para a solução deste problema, informa-se que a extremidade superior da perna dianteira tem uma ranhura guia que é vinculada pelo pino fixo em $G$.

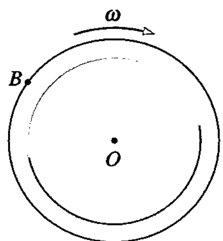



**Problema 16.77**

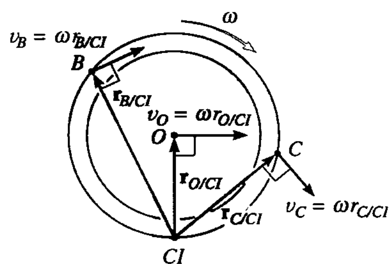
## 16.6 Centro Instantâneo de Velocidade Nula

A velocidade de qualquer ponto $B$ de um corpo rígido poderá ser obtida de maneira muito direta se escolhermos como ponto de base $A$ um ponto que tenha *velocidade nula* no instante considerado na análise. Nesse caso, $\mathbf{v}_A = 0$ e a equação da velocidade, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, torna-se $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$. Para um corpo em movimento plano geral, o ponto $A$ de velocidade nula é denominado *centro instantâneo de velocidade nula* (*CI*), localizando-se no eixo *instantâneo de velocidade nula*. Esse eixo é sempre perpendicular ao plano do movimento, e sua intersecção com o plano define o *CI*. Como o ponto $A$ coincide com o *CI*, então $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/IC}$ e, assim, o ponto $B$ move-se momentaneamente em torno de *CI*, numa *trajetória circular*; em outras palavras, o corpo parece girar em torno do eixo instantâneo. O *módulo* de $\mathbf{v}_B$ é simplesmente $v_B = \omega r_{B/CI}$, onde $\omega$ é a velocidade angular do corpo. Devido ao movimento circular, a *direção* de $\mathbf{v}_B$ deve ser sempre perpendicular a $\mathbf{r}_{B/IC}$.

Por exemplo, consideremos a roda mostrada na Figura 16.17*a*. Se ela rola *sem escorregar*, então em cada instante o ponto de contato com o solo tem velocidade nula. Logo, esse ponto representa o *CI* da roda (Figura 16.17*b*). Se se imagina que a roda está momentaneamente ligada por um pino a esse ponto, as velocidades dos pontos $B$, $C$, $O$, etc. podem ser obtidas usando-se $v = \omega r$. Nessa equação, as distâncias radiais $r_{B/CI}$, $r_{C/CI}$ e $r_{O/CI}$, mostradas na Figura 16.17*b*, devem ser determinadas da geometria da roda.

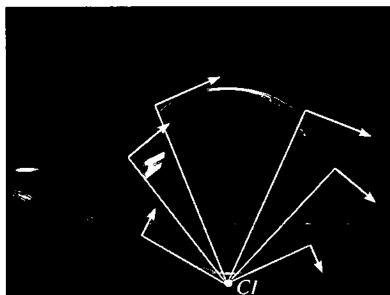



(a)



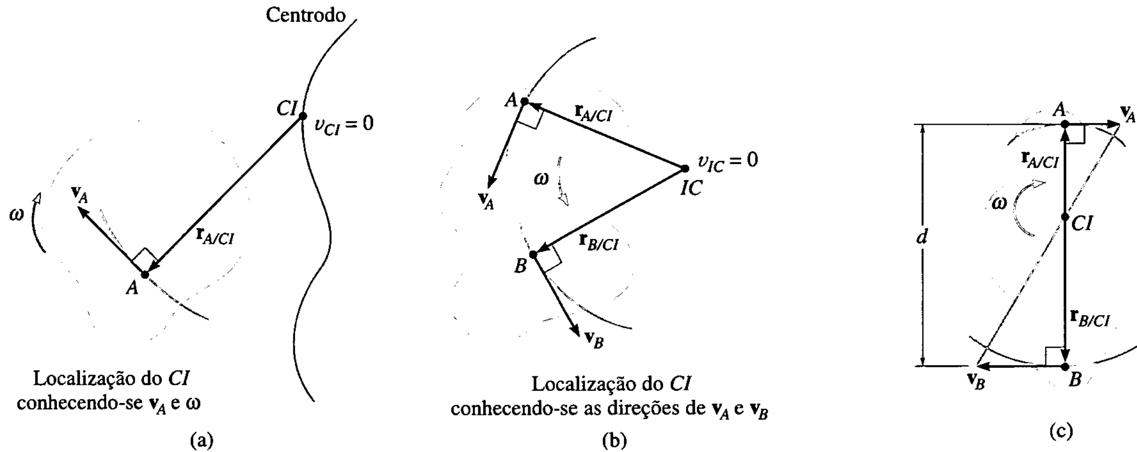

(b)

**Figura 16.17**




*O CI desta roda de bicicleta está em contato com o solo. Nas proximidades desse ponto, alguns raios da roda são visíveis, enquanto no topo eles se tornam borrados. Vejamos também como se movem os pontos na borda da roda, observando a distribuição das velocidades.*

***Localização do CI.*** Para localizar o *CI* podemos usar o fato de que a *velocidade* de um ponto qualquer do corpo é *sempre perpendicular* ao *vetor de posição* do ponto relativamente ao *CI*. Existem várias possibilidades:



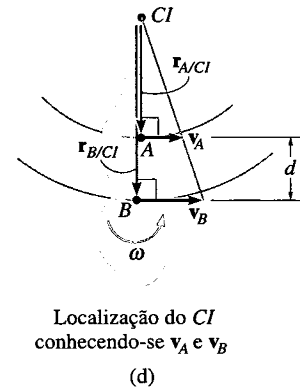
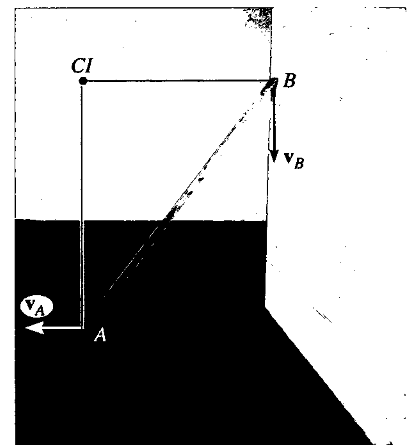




**Figura 16.18**

- *Dadas a velocidade* $\mathbf{v}_A$ de *um ponto A do corpo e a velocidade angular* $\boldsymbol{\omega}$ (Figura 16.18*a*). Nesse caso, o *CI* localiza-se num ponto da linha traçada perpendicularmente a $\mathbf{v}_A$, tal que a distância de *A* ao *CI* é $r_{A/CI} = v_A/\omega$. Observe que o *CI* localiza-se acima e à direita de *A*, pois $\mathbf{v}_A$ indica uma rotação no sentido horário em torno do *CI*.
- *Dadas as direções de duas velocidades não paralelas* $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ (Figura 16.18*b*). Construa a partir dos pontos *A* e *B* segmentos de reta perpendiculares a $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$. Prolongue os segmentos até a sua intersecção, que é o *CI*.
- *Dados os módulos e a direção de duas velocidades paralelas* $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$. A localização do *CI* é determinada por triângulos semelhantes. As figuras 16.18*c* e *d* exemplificam este caso. Em ambas as situações mostradas nas figuras, $r_{A/CI} = v_A/\omega$ e $r_{B/CI} = v_B/\omega$. Se *d* é a distância (conhecida) entre os pontos *A* e *B*, então, da Figura 16.18*c*, $r_{A/CI} + r_{B/CI} = d$ e, da Figura 16.18*d*, $r_{A/CI} - r_{B/CI} = d$. Como um caso especial, observe que, se o corpo estivesse em movimento de translação, $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$, e, então, o *CI* estaria localizado no infinito, caso em que $r_{A/CI} = r_{B/CI} \rightarrow \infty$, correspondendo, como esperado, a $\omega = (v_A/r_{A/CI}) = (v_B/r_{B/CI}) \rightarrow 0$.

Observemos que o ponto escolhido como centro instantâneo de velocidade nula *somente pode ser usado para um dado instante*, pois o corpo muda de posição de instante para instante. O lugar geométrico dos centros instantâneos de um corpo em movimento é denominado *centrodo* (Figura 16.18*a*), de modo que cada ponto do centrodo atua como *CI* do corpo apenas em um determinado instante.

Embora o *CI* possa ser usado convenientemente para determinar a velocidade de qualquer ponto do corpo, ele geralmente *não tem aceleração nula* e, portanto, não deve ser usado para determinar as acelerações dos pontos do corpo.




*O movimento da prancha escorregando para baixo é um movimento plano geral. Como as direções e sentidos das velocidades das suas extremidades A e B são conhecidos, o CI é facilmente localizado. Em cada instante, a prancha gira momentaneamente em torno do CI. Desenhe a prancha em diferentes posições, estabeleça o CI para cada posição e trace o centrodo.*

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A velocidade de um ponto em movimento plano geral pode ser determinada com referência ao seu centro instantâneo de velocidade nula, desde que a localização do CI seja previamente estabelecida por meio de um dos três métodos descritos.

- Como mostrado no diagrama cinemático na Figura 16.19, o corpo pode ser imaginado como 'estendido' e 'pivotado' no *CI*, de forma que em cada instante ele gira em torno do pivô com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.
- O módulo da velocidade para cada um dos pontos arbitrários *A*, *B* e *C* do corpo pode ser determinado usando-se a equação $v = \omega r$, onde $r$ é a distância radial do *CI* a cada ponto.
- Cada velocidade $\mathbf{v}$ é perpendicular à linha radial que lhe é associada e tem sentido consistente com o do movimento de rotação, com velocidade $\boldsymbol{\omega}$, dessa linha (Figura 16.19).

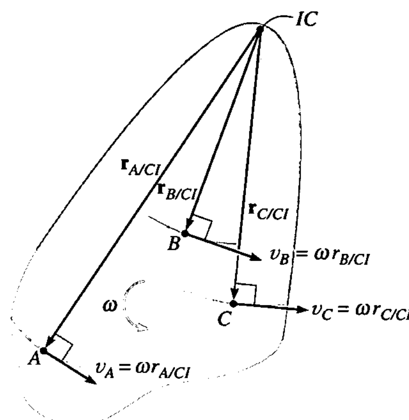
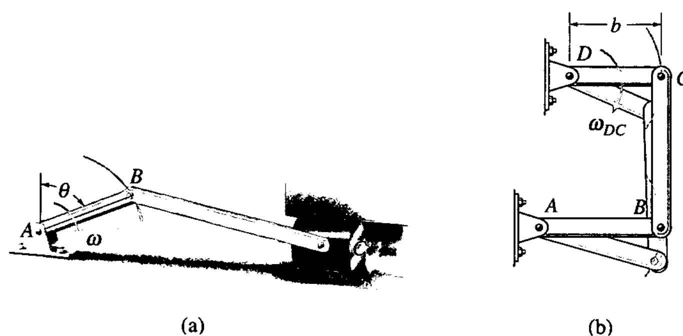



**Figura 16.19**

## EXEMPLO 16.10

Mostre como se pode determinar o centro instantâneo de velocidade nula para (a) a barra *BC* mostrada na Figura 16.20*a* e (b) a barra de ligação *CB* mostrada na Figura 16.20*b*.



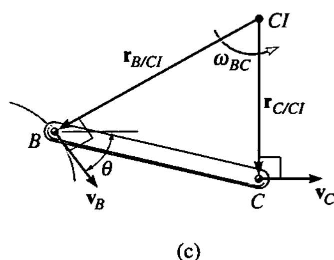
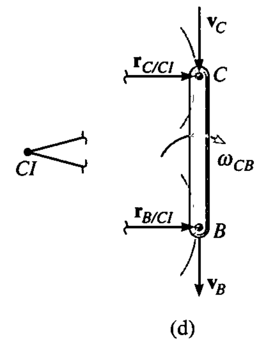




**Figura 16.20**

### SOLUÇÃO

***Parte (a).*** Como mostrado na Figura 16.20*a*, o ponto *B* tem uma velocidade $\mathbf{v}_B$, que é imposta pela rotação no sentido horário da barra *AB*. O ponto *B* se desloca numa trajetória circular, de modo que $\mathbf{v}_B$ é perpendicular a *AB* e forma um ângulo $\theta$ com a horizontal, como mostrado na Figura 16.20*c*. Ao movimento do ponto *B* corresponde o movimento *horizontal* para a frente, com velocidade $\mathbf{v}_C$, efetuado pelo pistão. A intersecção das retas perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_C$ (Figura 16.20*c*) determina o *CI*.

***Parte (b).*** Os pontos $B$ e $C$ seguem trajetórias circulares, pois as barras $AB$ e $CD$ têm movimentos de rotação em torno de seus eixos fixos (Figura 16.20*b*). Como a velocidade é sempre tangente à trajetória, tanto a velocidade $\mathbf{v}_C$ do ponto $C$ da barra $DC$ quanto $\mathbf{v}_B$ do ponto $B$ da barra $B$ estão orientadas verticalmente para baixo, ao longo da barra $CB$ (Figura 16.20*d*). As linhas radiais traçadas perpendicularmente a essas duas velocidades são paralelas que se interceptam no 'infinito', isto é, $r_{C/CI} \rightarrow \infty$ e $r_{B/CI} \rightarrow \infty$. Assim, $\omega_{CB} = (v_C/r_{C/IC}) = \rightarrow 0$. Como resultado, a barra $CB$ tem momentaneamente um movimento de translação. Todavia, num instante posterior, $CB$ estará inclinada, de forma que o centro instantâneo terá se deslocado para uma posição finita.

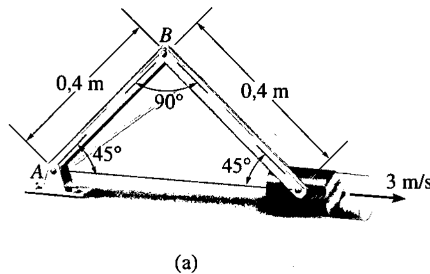


(d)

**Figura 16.20**

## EXEMPLO 16.11

O bloco $D$ mostrado na Figura 16.21*a* move-se com velocidade de 3 m/s. Determine as velocidades angulares das barras $BD$ e $AB$, na situação indicada na figura.



(a)

## SOLUÇÃO

À medida que $D$ se desloca para a direita, o braço $AB$ gira em torno de $A$, no sentido horário. Logo, $\mathbf{v}_B$ é perpendicular a $AB$. O centro instantâneo de velocidade nula para $BD$ localiza-se na intersecção dos segmentos de reta perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_D$ (Figura 16.21*b*). Pela geometria,

$$r_{B/CI} = 0{,}4 \operatorname{tg} 45° \text{m} = 0{,}4 \text{ m}$$

$$r_{D/CI} = \frac{0{,}4 \text{ m}}{\cos 45°} = 0{,}566 \text{ m}$$

Como o módulo de $\mathbf{v}_D$ é conhecido, a velocidade angular da barra $BD$ é

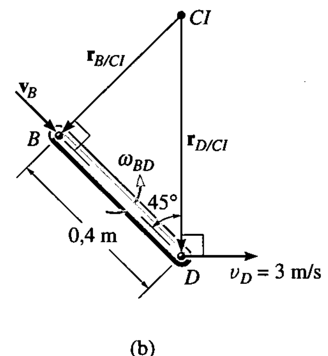
$$\omega_{BD} = \frac{v_D}{r_{D/CI}} = \frac{3 \text{ m/s}}{0{,}566 \text{ m}} = 5{,}30 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resposta}$$

A velocidade de $B$ é, portanto,

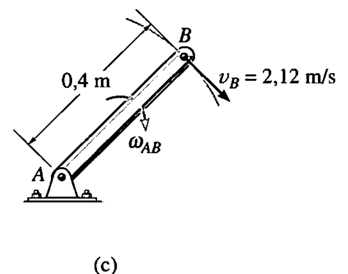
$$v_B = \omega_{BD}(r_{B/CI}) = 5{,}30 \text{ rad/s}(0{,}4 \text{ m}) = 2{,}12 \text{ m/s} \searrow^{45°}$$

Da Figura 16.21*c*, a velocidade angular de $AB$ é

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{r_{B/A}} = \frac{2{,}12 \text{ m/s}}{0{,}4 \text{ m}} = 5{,}30 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resposta}$$



(b)

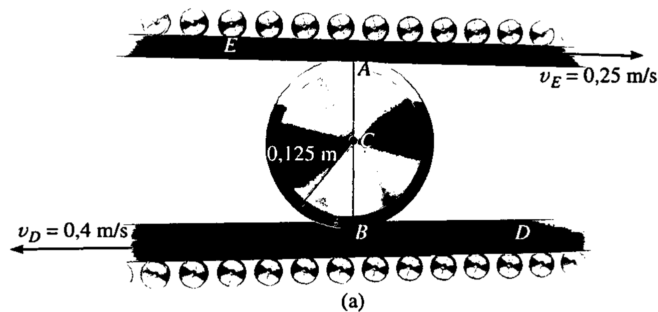


(c)

**Figura 16.21**

## EXEMPLO 16.12

O cilindro mostrado na Figura 16.22*a* rola sem escorregar entre as placas *E* e *D*. Determine a velocidade angular do cilindro e a velocidade de seu centro *C*.




### SOLUÇÃO

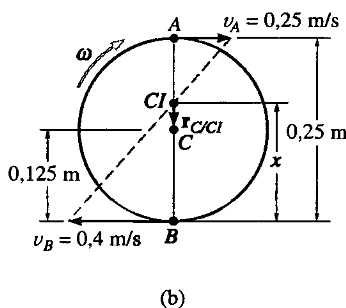



**Figura 16.22**

Como não há escorregamento, os pontos de contato *A* e *B* do cilindro têm as mesmas velocidades das placas *E* e *D*, respectivamente. Além disso, as velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ são *paralelas*, de forma que, pela proporcionalidade dos triângulos retângulos, o *CI* localiza-se num ponto da linha *AB* (Figura 16.22*b*). Supondo que esse ponto esteja a uma distância *x* de *B*, temos

$$v_B = \omega x; \qquad 0{,}4 \text{ m/s} = \omega x$$

$$v_A = \omega(0{,}25 \text{ m} - x); \qquad 0{,}25 \text{ m/s} = \omega(0{,}25 \text{ m} - x)$$

Dividindo membro a membro essas equações, eliminamos $\omega$ e obtemos

$$0{,}4(0{,}25 - x) = 0{,}25x$$

$$x = \frac{0{,}1}{0{,}65} = 0{,}154 \text{ m}$$

Logo, a velocidade angular do cilindro é

$$\omega = \frac{v_B}{x} = \frac{0{,}4 \text{ m/s}}{0{,}154 \text{ m}} = 2{,}60 \text{ rad/s} \circlearrowright$$ ***Resposta***

A velocidade do ponto *C* é, portanto,

$$v_C = \omega r_{C/CI} = 2{,}60 \text{ rad/s}(0{,}154 \text{ m} - 0{,}125 \text{ m})$$
$$= 0{,}0750 \text{ m/s} \leftarrow$$ ***Resposta***

## PROBLEMAS

**16.78.** Resolva o Problema 16.51 usando o método do centro instantâneo de velocidade nula.

**16.79.** Resolva o Problema 16.54 usando o método do centro instantâneo de velocidade nula.

***16.80.** Resolva o Problema 16.60 usando o método do centro instantâneo de velocidade nula.

**16.81.** Resolva o Problema 16.61 usando o método do centro instantâneo de velocidade nula.

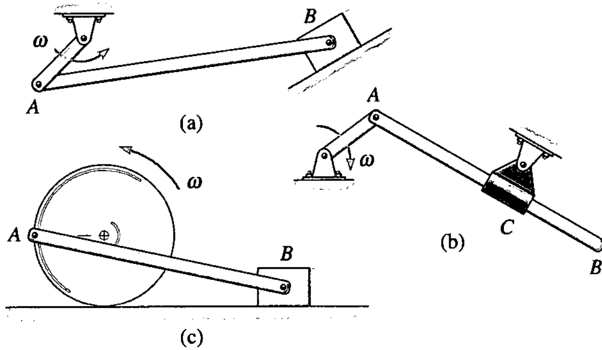
**16.82.** Resolva o Problema 16.62 usando o método do centro instantâneo de velocidade nula.

**16.83.** Resolva o Problema 16.63 usando o método do centro instantâneo de velocidade nula.

***16.84.** Resolva o Problema 16.65 usando o método do centro instantâneo de velocidade nula.

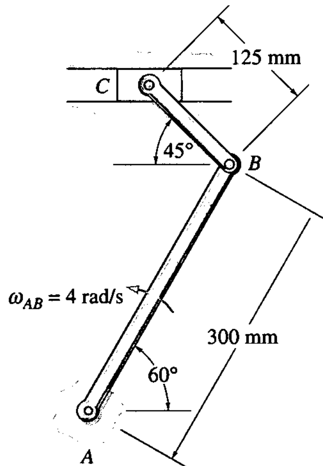
**16.85.** Resolva o Problema 16.66 usando o método do centro instantâneo de velocidade nula.

**16.86.** Em cada caso, mostre graficamente como localizar o centro instantâneo de velocidade nula da barra $AB$. Suponha que a geometria seja conhecida.




**Problema 16.86**

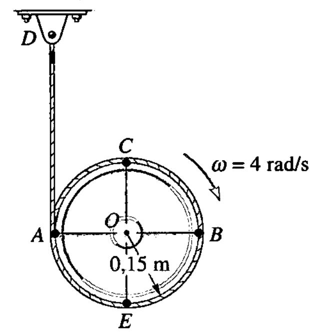
**16.87.** O mecanismo mostrado na figura foi projetado para dar a uma lâmina presa no cursor $C$ um golpe lento e retornar rapidamente. Determine a velocidade angular da barra $CB$, na situação mostrada na figura. A barra $AB$ gira com velocidade angular de 4 rad/s.



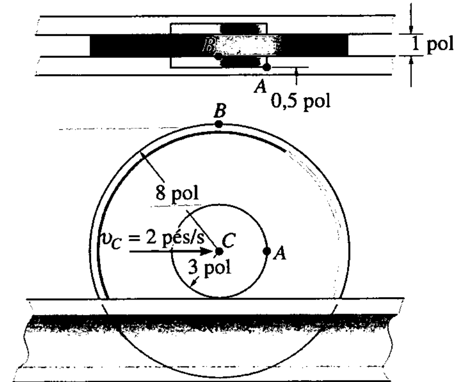

**Problema 16.87**

***16.88.** Na situação mostrada na figura, o disco gira com velocidade angular $\omega = 4$ rad/s. Determine as velocidades dos pontos $A$, $B$ e $C$.

**16.89.** O cubo da roda rola sem escorregar na superfície horizontal. Se a velocidade de seu centro é $v_C = 2$ pés/s para a direita, determine as velocidades dos pontos $A$ e $B$ mostrados na figura.

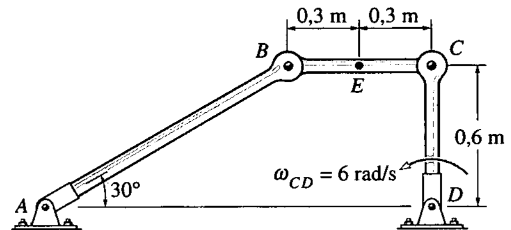



**Problema 16.88**



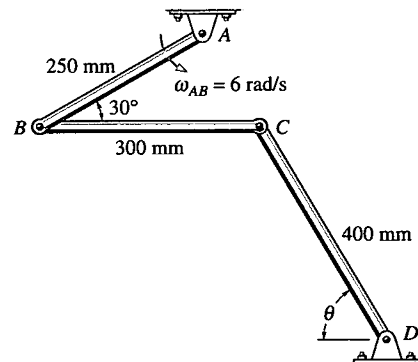

**Problema 16.89**

**16.90.** Se a barra de ligação $CD$ tem velocidade angular $\omega_{CD} = 6$ rad/s, determine a velocidade do ponto $E$ da barra $BC$ e a velocidade angular da barra $AB$, na situação mostrada na figura.



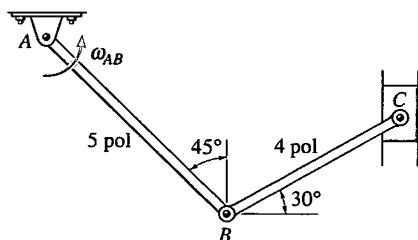

**Problema 16.90**

**16.91.** Se a barra de ligação $AB$ gira com velocidade angular $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine as velocidades angulares das barras $BC$ e $CD$, no instante em que $\theta = 60°$.



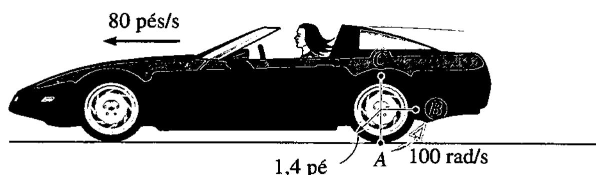

**Problema 16.91**

***16.92.** Determine a velocidade angular da barra de ligação $AB$, na situação indicada na figura. O bloco $C$ sobe com velocidade de 12 pol/s.




**Problema 16.92**

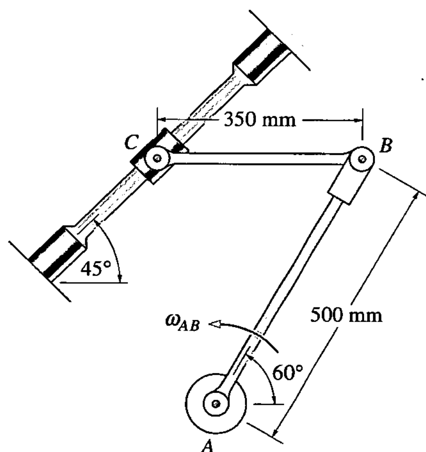
**16.93.** Conforme o carro avança a 80 pés/s numa pista molhada, as rodas traseiras, devido a um escorregamento, giram com uma velocidade angular $\omega = 100$ rad/s. Determine as velocidades dos pontos $A$, $B$ e $C$.




**Problema 16.93**

**16.94.** Sabendo que a velocidade angular da barra $AB$ é $\omega_{AB}$ = 4 rad/s, determine a velocidade do colar $C$ e a velocidade angular da barra $CB$, na situação mostrada na figura. A barra $CB$ é horizontal nesse instante.

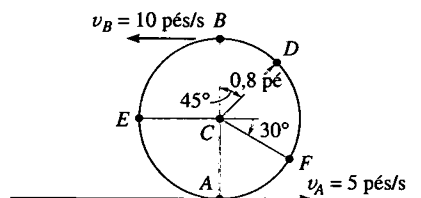
**16.95.** Se o cursor $C$ está se movendo para baixo e para a esquerda com velocidade $v_C$ = 8 m/s, determine a velocidade angular da barra $AB$, na situação mostrada na figura.




**Problemas 16.94/95**

***16.96.** Devido ao escorregamento, os pontos $A$ e $B$ na borda do disco têm as velocidades indicadas na figura. Determine as velocidades do centro $C$ e do ponto $D$.

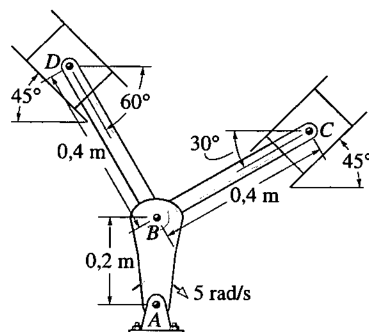
**16.97.** Devido ao escorregamento, os pontos $A$ e $B$ na borda do disco têm as velocidades indicadas na figura. Determine as velocidades do centro $C$ e do ponto $E$.




**Problemas 16.96/97**

**16.98.** O mecanismo usado numa embarcação naval consiste em uma manivela $AB$ e nas barras de ligação $BC$ e $BD$. Determine a velocidade do pistão $C$ no instante em que a manivela, com velocidade angular de 5 rad/s, está na posição mostrada na figura.

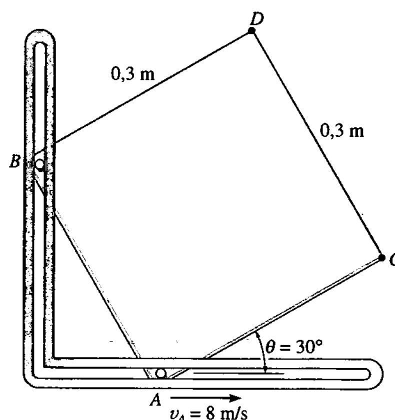
**16.99.** O mecanismo usado numa embarcação naval consiste em uma manivela $AB$ e nas barras de ligação $BC$ e $BD$. Determine a velocidade do pistão $D$ no instante em que a manivela, com velocidade angular de 5 rad/s, está na posição mostrada na figura.




**Problemas 16.98/99**

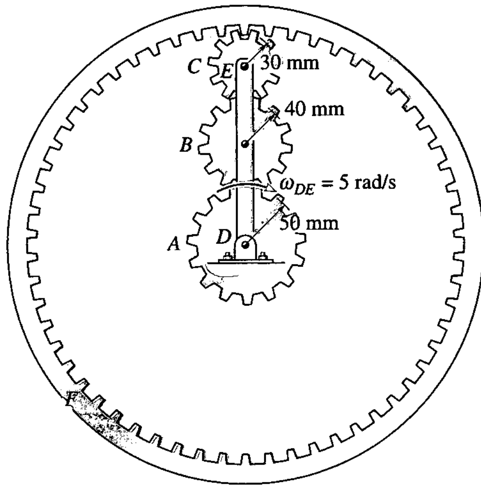
***16.100.** A placa quadrada tem seu movimento imposto pelos pinos $A$ e $B$ vinculados às ranhuras. Quando $\theta$ = 30°, o ponto $A$ está se movendo com velocidade $v_A$ = 8 m/s. Determine a velocidade do ponto $D$ nesse instante.

**16.101.** A placa quadrada tem seu movimento imposto pelos pinos $A$ e $B$ vinculados às ranhuras. Quando $\theta$ = 30°, o ponto $A$ está se movendo com velocidade $v_A$ = 8 m/s. Determine a velocidade do ponto $D$ nesse instante.



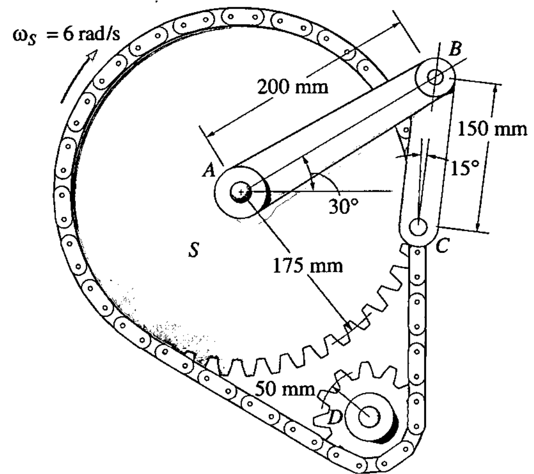

**Problemas 16.100/101**

**16.102.** O trem de engrenagens epicíclico é movido pela barra de ligação $DE$, que tem velocidade angular $\omega_{DE} = 5$ rad/s. Se a engrenagem $F$ é fixa, determine as velocidades angulares das engrenagens $A$, $B$ e $C$.



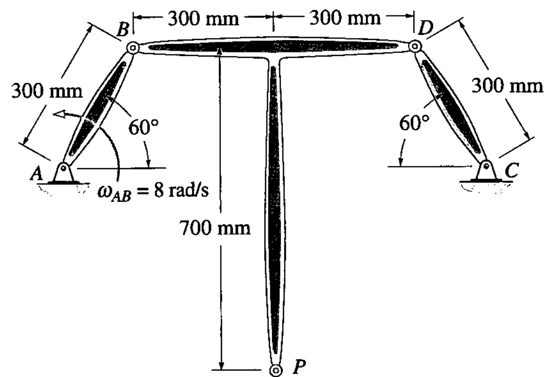

**Problema 16.102**

**16.103.** O mecanismo esquematizado na figura produz um movimento intermitente na barra de ligação $AB$. Se a roda dentada $S$ gira com velocidade angular $\omega_S = 6$ rad/s, determine a velocidade angular da barra $AB$, na situação mostrada na figura. A roda dentada $S$ está montada num eixo que é separado do eixo colinear solidário a $AB$ em $A$. O pino $C$ está preso a um dos elos da corrente.




**Problema 16.103**

***16.104.** As hastes de ligação $AB$ e $CD$ giram em torno dos pinos fixos em $A$ e $C$, respectivamente. Se $AB$ tem velocidade angular $\omega_{AB} = 8$ rad/s, determine a velocidade angular de $BDP$ e a velocidade do ponto $P$.



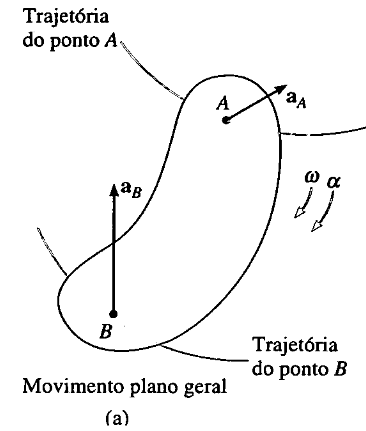

**Problema 16.104**

# 16.7 ANÁLISE DO MOVIMENTO RELATIVO: ACELERAÇÃO

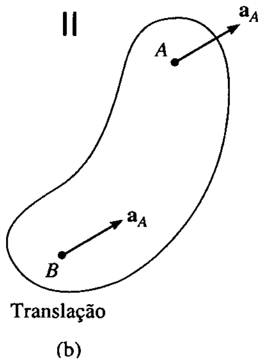
Uma equação que relaciona as acelerações de dois pontos de um corpo rígido em movimento plano geral pode ser determinada derivando-se em relação ao tempo a equação da velocidade $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$. Isso nos fornece

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

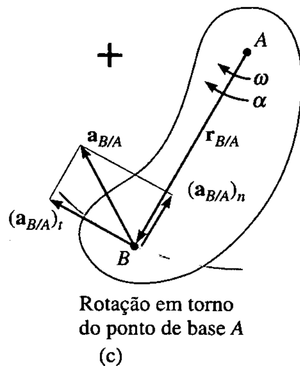
Os termos $d\mathbf{v}_B/dt = \mathbf{a}_B$ e $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{a}_A$ são medidos num sistema de *eixos fixos x, y*, representando as *acelerações absolutas* dos pontos $B$ e $A$. O último termo representa a aceleração de $B$ em relação a $A$, medida por um observador fixo num sistema de eixos $x'$, $y'$ em translação, que têm como origem o ponto de base $A$. Na Seção 16.5 mostramos que para esse observador o ponto $B$ parece mover-se ao longo de um *arco de circunferência* com raio de curva-



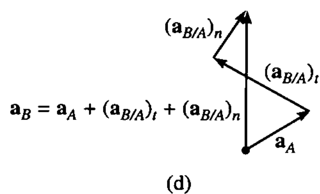

Movimento plano geral
(a)




Translação
(b)




Rotação em torno
do ponto de base $A$
(c)




(d)

**Figura 16.23**

tura $r_{AB}$. Conseqüentemente, a aceleração relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ pode ser expressa em termos de seus componentes tangencial e normal, isto é, $\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$, onde $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ e $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$. Logo, a equação da aceleração relativa pode ser escrita na forma

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n} \tag{16.17}$$

onde

$\mathbf{a}_B$ = aceleração de $B$

$\mathbf{a}_A$ = aceleração de $A$

$(\mathbf{a}_{B/A})_t$ = componente tangencial da aceleração relativa de '$B$ em relação a $A$'. O *módulo* é $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ e a *direção* é perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$.

$(\mathbf{a}_{B/A})_n$ = componente normal da aceleração relativa de '$B$ em relação a $A$'. O *módulo* é $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$, a *direção é a de BA* e o *sentido*, sempre de $B$ para $A$.

Cada um dos quatro termos na Equação 16.17 está representado graficamente nos *diagramas cinemáticos* mostrados na Figura 16.23. Vemos que em qualquer instante a aceleração de $B$ (Figura 16.23*a*) é determinada considerando que o corpo translada com aceleração $\mathbf{a}_A$ (Figura 16.23*b*) e simultaneamente gira em torno do ponto de base $A$ com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ (Figura 16.23*c*). A adição vetorial desses dois efeitos aplicada a $B$ resulta na aceleração $\mathbf{a}_B$, como se mostra na Figura 16.23*d*. Devemos observar da Figura 16.23*a* que, por se moverem em *trajetórias curvilíneas*, os pontos $A$ e $B$ têm acelerações com *componentes tangenciais e normais*. (Lembremos que a aceleração de um ponto é tangente à trajetória apenas quando esta é *retilínea* ou o ponto está passando por um ponto de inflexão da curva.)

Como os componentes da aceleração relativa representam o efeito do *movimento circular* observado num referencial em translação com origem no ponto de base $A$, esses termos podem ser expressos como $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A}$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$ (Equação 16.14). Logo, a Equação 16.17 se torna

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}} \tag{16.18}$$

onde

$\mathbf{a}_B$ = aceleração de $B$

$\mathbf{a}_A$ = aceleração de $A$

$\boldsymbol{\alpha}$ = aceleração angular do corpo

$\boldsymbol{\omega}$ = velocidade angular do corpo

$\mathbf{r}_{B/A}$ = vetor de posição relativa traçado de $A$ para $B$

Se a Equação 16.17 ou 16.18 for aplicada de forma prática ao estudo do movimento acelerado de um corpo rígido que está articulado a outros corpos, deveremos entender que os *pontos coincidentes na rótula* movem-se com a *mesma aceleração*, pois ambos descrevem a *mesma* trajetória. Por exemplo, o ponto $B$ marcado tanto na barra $AB$ quanto na barra $BC$ do mecanismo esquematizado na Figura 16.24*a* tem a mesma aceleração, pois as barras estão articuladas em $B$. O movimento de $B$ se dá ao longo de uma *trajetória curvilínea*, de modo que a aceleração $\mathbf{a}_B$ pode ser expressa em termos de seus componentes tangencial e normal. Na outra extremidade da barra $BC$, o ponto $C$ se move ao longo de uma trajetória retilínea, que é definida pelo pistão. Logo, $\mathbf{a}_C$ é horizontal (Figura 16.24*b*).

Se dois corpos fizerem contato entre si *sem haver escorregamento*, e os *pontos de contato* moverem-se ao longo de *trajetórias diferentes*, os *componentes tangenciais* das acelerações dos pontos serão *iguais*, mas os *componentes normais não* serão os mesmos. Por exemplo, consideremos as duas engrenagens

mostradas na Figura 16.25*a*. O ponto $A$ está localizado na engrenagem $B$ e o ponto coincidente $A'$, na engrenagem $C$. Devido ao movimento de rotação, $(\mathbf{a}_A)_t = (\mathbf{a}_{A'})_t$; entretanto, como os pontos seguem trajetórias diferentes, $(\mathbf{a}_A)_n \neq (\mathbf{a}_{A'})_n$, e, portanto, $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_{A'}$ (Figura 16.25*b*).

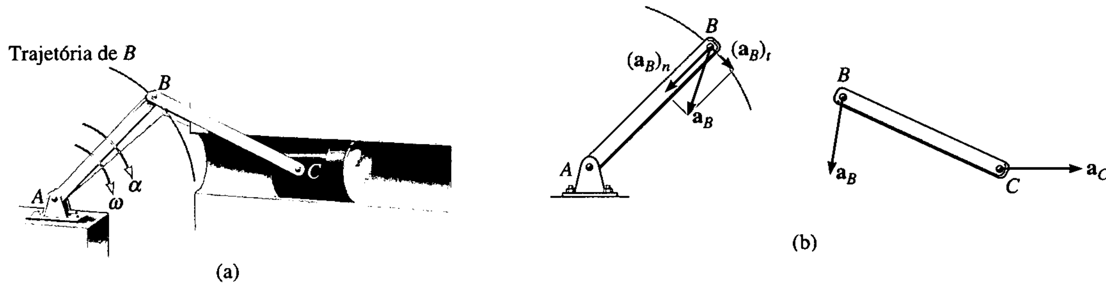



**Figura 16.24**

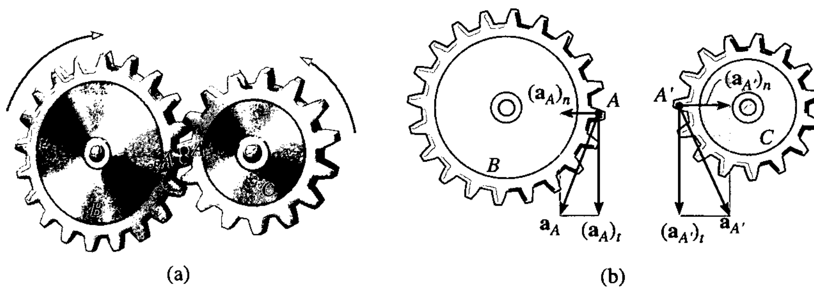



**Figura 16.25**

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A equação da aceleração relativa pode ser aplicada considerando-se quaisquer dois pontos $A$ e $B$ de um corpo, quer usando-se uma análise vetorial cartesiana, quer escrevendo-se diretamente as equações para os componentes escalares $x$ e $y$.

***Análise da Velocidade***

- Determine a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo usando uma análise vetorial, como foi discutido na Seção 16.5 ou 16.6. Determine também as velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ dos pontos $A$ e $B$ *se esses pontos seguem trajetórias curvilíneas.*

ANÁLISE VETORIAL

***Diagrama Cinemático***

- Estabeleça os eixos fixos $x$, $y$ e construa o diagrama cinemático do corpo. Indique nele $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Se os pontos $A$ e $B$ se deslocam ao longo de *trajetórias curvilíneas*, suas acelerações devem ser indicadas em termos de seus componentes tangencial e normal, isto é, $\mathbf{a}_A = (\mathbf{a}_A)_t + (\mathbf{a}_A)_n$ e $\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_t + (\mathbf{a}_B)_n$.

***Equação da Aceleração***

- Para aplicar $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$, expresse os vetores na forma de vetores cartesianos e os substitua na equação. Calcule o produto vetorial e então iguale os respectivos componentes $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ para obter duas equações escalares.
- Se a solução resultar em uma resposta com valor negativo para as incógnitas, isto estará indicando que o sentido do vetor é oposto ao que foi arbitrado no diagrama cinemático.

ANÁLISE ESCALAR

***Diagrama Cinemático***

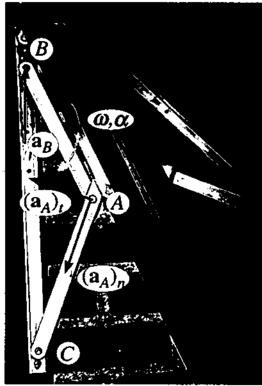
- Se a equação $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$ for aplicada, então os módulos e as direções dos componentes da aceleração relativa $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ deverão ser estabelecidos. Construa um diagrama cinemático como se mostra na Figura 16.23*c*. Considerando o corpo momentaneamente 'ligado por um pino' no ponto de base $A$, os *módulos* são $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ e $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$. As direções e os sentidos são estabelecidos a partir do dia-

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (CONTINUAÇÃO)

grama, de forma que $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ seja perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$, de acordo com o movimento de rotação representado por $\boldsymbol{\alpha}$, e $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ seja orientado de $B$ para $A$.†

***Equação da Aceleração***

- Represente graficamente os vetores na equação $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$, mostrando seus módulos, direções e sentidos abaixo deles. As equações escalares são determinadas a partir dos componentes $x$ e $y$ desses vetores.




*A foto mostra o mecanismo utilizado em uma janela. Neste caso, CA gira em torno de um eixo fixo passando por C e AB apresenta um movimento plano geral. Como o ponto A move-se ao longo de uma trajetória curvilínea, sua aceleração tem dois componentes, enquanto o ponto B se desloca ao longo de um trilho retilíneo e sua aceleração tem a direção e o sentido indicados na foto.*

† A notação $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pino})})_t + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pino})})_n$ pode ser útil para lembrar que se supõe o ponto de base $A$ 'ligado a um pino'.

## EXEMPLO 16.13

A barra $AB$ mostrada na Figura 16.26$a$ tem de se mover mantendo $A$ e $B$ apoiados nos planos inclinados. O ponto $A$ tem uma aceleração de 3 m/s$^2$ e uma velocidade de 2 m/s, ambas orientadas plano abaixo, no instante em que a barra está horizontal. Determine a aceleração angular da barra nesse instante.

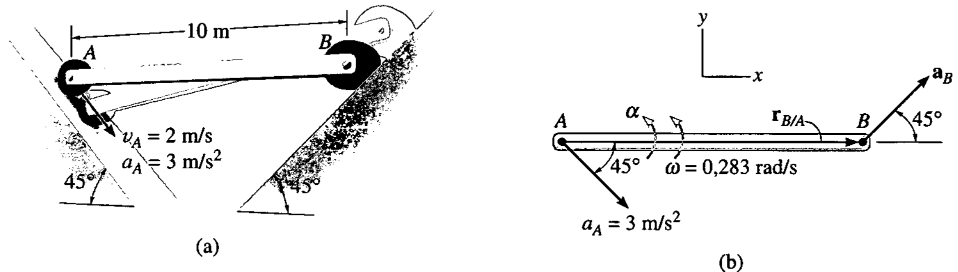



**Figura 16.26**

## SOLUÇÃO I (ANÁLISE VETORIAL)

Apliquemos a equação da aceleração aos pontos $A$ e $B$ da barra. Para isso é necessário determinar primeiro a velocidade angular da barra. Mostre que $\omega = 0{,}283$ rad/s ↺, usando a equação da velocidade ou o método dos centros instantâneos.

***Diagrama Cinemático.*** Como os pontos $A$ e $B$ movem-se ao longo de trajetórias retilíneas, suas acelerações *não* têm componentes normais. Há duas incógnitas na Figura 12.26$b$: $a_B$ e $\alpha$.

***Equação da Aceleração.*** Aplicando a Equação 16.18 aos pontos $A$ e $B$ da barra e expressando cada vetor na forma cartesiana, temos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B \cos 45°\mathbf{i} + a_B \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} = 3 \cos 45°\mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} 45°\mathbf{j} + (\alpha\mathbf{k}) \times (10\mathbf{i}) - (0{,}283)^2(10\mathbf{i})$$

Efetuando o produto vetorial e igualando os componentes **i** e **j**, obtemos as equações

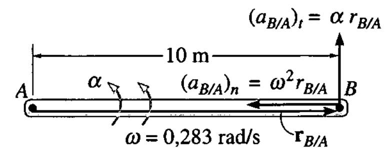
$$a_B \cos 45° = 3 \cos 45° - (0{,}283)^2(10) \qquad (1)$$

$$a_B \operatorname{sen} 45° = -3 \operatorname{sen} 45° + \alpha(10) \qquad (2)$$

Resolvendo

$$a_B = 1{,}87 \text{ m/s}^2 \angle^{45°}$$

$$\alpha = 0{,}344 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resposta}$$




(c)

**Figura 16.26**

## SOLUÇÃO II (ANÁLISE ESCALAR)

Como um procedimento alternativo, as equações escalares 1 e 2 podem ser obtidas diretamente. Do diagrama cinemático, mostrando os componentes da aceleração relativa $\mathbf{a}_B$ $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ (Figura 16.26*c*), temos

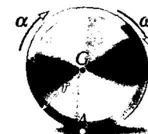
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

$$\begin{bmatrix} a_B \\ \angle^{45°} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \text{ m/s}^2 \\ \searrow^{45°} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(10 \text{ m}) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0{,}283 \text{ rad/s})^2(10 \text{ m}) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

Igualando os componentes $x$ e $y$, temos as equações 1 e 2, que podem ser resolvidas como fizemos na análise vetorial (Solução I).

## EXEMPLO 16.14

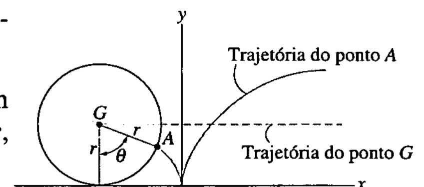
Num dado instante, o cilindro de raio $r$, mostrado na Figura 16.27*a*, tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine a velocidade e a aceleração de seu centro $G$ se o cilindro rola sem escorregar.




(a)

## SOLUÇÃO (ANÁLISE VETORIAL)

Conforme o cilindro rola, o ponto $G$ move-se ao longo de uma reta horizontal e o ponto $A$, na periferia do cilindro, desloca-se ao longo de uma trajetória curvilínea denominada *ciclóide* (Figura 16.27*b*). Apliquemos as equações da velocidade e da aceleração a esses dois pontos.



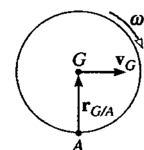

(b)

***Análise Vetorial.*** Como não há escorregamento, $\mathbf{v}_A = 0$, no instante em que $A$ toca o solo. Assim, do diagrama cinemático mostrado na Figura 16.27*c*, temos

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r}_{G/A}$$

$$v_G\mathbf{i} = \mathbf{0} + (-\omega\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j})$$

$$v_G = \omega r \qquad (1) \qquad \textit{Resposta}$$




(c)

**Figura 16.27**

Esse resultado também pode ser obtido diretamente, observando-se que o ponto $A$ representa o centro instantâneo de velocidade nula.

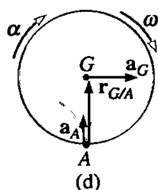



**Figura 16.27**

***Diagrama Cinemático.*** A aceleração do ponto $G$ é horizontal, já que esse ponto se desloca numa *trajetória retilínea*. *Imediatamente antes* de o ponto $A$ tocar o solo, sua velocidade está orientada para baixo na direção $y$ (Figura 16.27*b*) e, imediatamente após o contato, sua velocidade está orientada *para cima*. Por essa razão, o ponto $A$ começa a acelerar para cima quando ele deixa o solo (Figura 16.27*d*). Os módulos de $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_G$ são desconhecidos.

***Equação da Aceleração***

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$$

$$a_G\mathbf{i} = a_A\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j}) - \omega^2(r\mathbf{j})$$

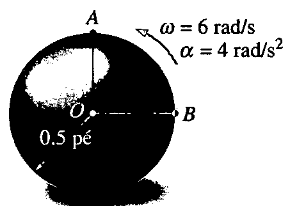
Calculando o produto vetorial e igualando os componentes **i** e **j**, temos

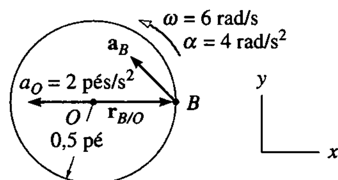
$$a_G = \alpha r \qquad (2) \qquad \textit{Resposta}$$

$$a_A = \omega^2 r \qquad (3)$$

Esses resultados importantes, $v_G = \omega_r$ e $a_G = \alpha r$, também foram obtidos no Exemplo 16.4. Eles são aplicados a qualquer objeto circular — uma bola, uma polia, um disco etc. — que rola *sem* escorregar. Observemos também que $a_A = \omega^2 r$ indica que o centro instantâneo de velocidade nula, ponto $A$, *não* é ponto de aceleração nula.

## EXEMPLO 16.15



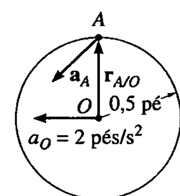




**Figura 16.28**

A bola rola sem escorregar e tem o movimento angular indicado na Figura 16.28*a*. Determine as acelerações dos pontos $B$ e $A$.

### SOLUÇÃO (ANÁLISE VETORIAL)

***Diagrama Cinemático.*** Usando os resultados do exemplo anterior, podemos calcular a aceleração do centro da bola: $a_0 = \alpha r = (4 \text{ rad/s}^2)(0{,}5 \text{ pé}) = 2$ pés/s$^2$. Apliquemos a equação da aceleração aos pontos $O$ e $B$ e aos pontos $O$ e $A$.

***Equação da Aceleração.***
Para o ponto $B$ (Figura 16.28*b*),

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/O} - \omega^2\mathbf{r}_{B/O}$$

$$\mathbf{a}_B = -2\mathbf{i} + (4\mathbf{k}) \times (0{,}5\mathbf{i}) - (6)^2(0{,}5\mathbf{i})$$

$$\mathbf{a}_B = \{-20\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\} \text{ pés/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

Para o ponto $A$ (Figura 16.28*c*),

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} - \omega^2\mathbf{r}_{A/O}$$

$$\mathbf{a}_A = -2\mathbf{i} + (4\mathbf{k}) \times (0{,}5\mathbf{j}) - (6)^2(0{,}5\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_A = \{-4\mathbf{i} - 18\mathbf{j}\} \text{ pés/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 16.16

Uma corda se desenrola do carretel mostrado na Figura 16.29*a*, de forma que num dado instante este tem velocidade angular de 3 rad/s e uma aceleração angular de 4 rad/s². Determine a aceleração do ponto *B*.

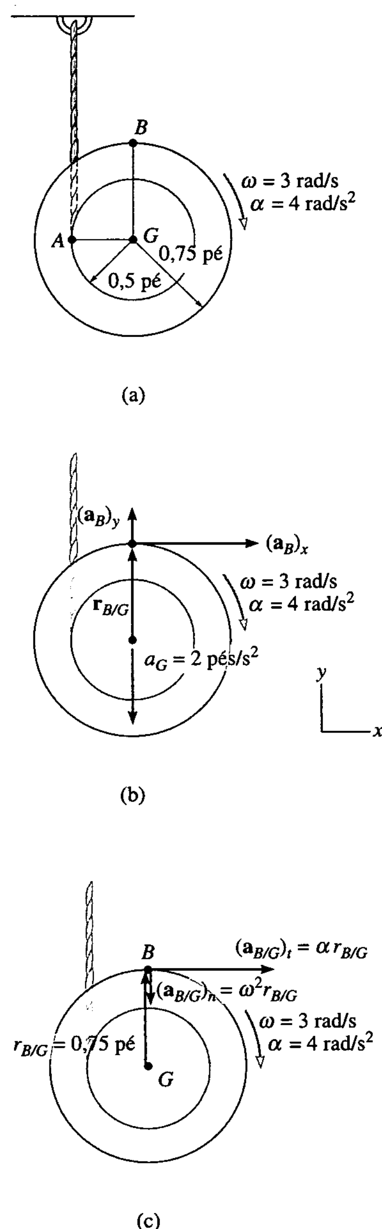



Figura 16.29

### SOLUÇÃO I (ANÁLISE VETORIAL)

O carretel 'aparenta' rolar para baixo sem escorregar no ponto *A*. Logo, podemos usar os resultados do Exemplo 16.14 para determinar a aceleração do ponto *G*; isto é,

$$a_G = \alpha r = 4\text{ rad/s}^2\,(0{,}5\text{ pé}) = 2\text{ pés/s}^2$$

Apliquemos a equação da aceleração aos pontos *G* e *B*.

***Diagrama Cinemático.*** O ponto *B* se desloca ao longo da *trajetória curvilínea* de raio de curvatura *desconhecido*.[3] Sua aceleração será representada pelos seus componentes *x* e *y* (desconhecidos), como indicado na Figura 16.29*b*.

***Equação da Aceleração.***

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/G} - \omega^2\mathbf{r}_{B/G}$$

$$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = -2\mathbf{j} + (-4\mathbf{k}) \times (0{,}75\mathbf{j}) - (3)^2(0{,}75\mathbf{j})$$

Igualando os termos em **i** e **j**, obtemos os componentes *x* e *y* da aceleração de *B*:

$$(a_B)_x = 4(0{,}75) = 3\text{ pés/s}^2 \rightarrow \quad (1)$$

$$(a_B)_y = -2 - 6{,}75 = -8{,}75\text{ pés/s}^2 = 8{,}75\text{ pés/s}^2 \downarrow \quad (2)$$

O módulo, a direção e o sentido de $\mathbf{a}_B$ são, portanto,

$$a_B = \sqrt{(3)^2 + (8{,}75)^2} = 9{,}25\text{ pés/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{8{,}75}{3} = 71{,}1° \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

### SOLUÇÃO II (ANÁLISE ESCALAR)

Este problema pode ser resolvido escrevendo-se diretamente as equações em componentes escalares. O diagrama cinemático na Figura 16.29*c* mostra os componentes da aceleração relativa $(\mathbf{a}_{B/G})_t$ e $(\mathbf{a}_{B/G})_n$. Assim,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{B/G})_t + (\mathbf{a}_{B/G})_n$$

$$\begin{bmatrix}(a_B)_x \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(a_B)_y \\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\text{ pés/s}^2 \\ \downarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\text{ rad/s}^2(0{,}75\text{ pé}) \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(3\text{ rad/s})^2(0{,}75\text{ pé}) \\ \downarrow\end{bmatrix}$$

Os resultados para os componentes *x* e *y* são os obtidos nas equações 1 e 2 acima.

3 Observemos que o raio de curvatura $\rho$ da trajetória *não* é igual ao raio do carretel, pois este *não* está girando em torno do ponto *G*. Além disso, $\rho$ *não* é definido como a distância de *A* (*CI*) a *B*, uma vez que a localização do *CI* depende apenas da velocidade de um ponto, e não da geometria de sua trajetória.

## EXEMPLO 16.17

O colar $C$ mostrado na Figura 16.30$a$ desce com aceleração de 1 m/s². Na situação mostrada, $C$ tem velocidade de 2 m/s, o que impõe às barras de ligação $CB$ e $AB$ uma velocidade angular $\omega_{AB} = \omega_{CB} = 10$ rad/s. (Veja o Exemplo 16.8.) Determine as acelerações angulares de $CB$ e de $AB$ na situação indicada.

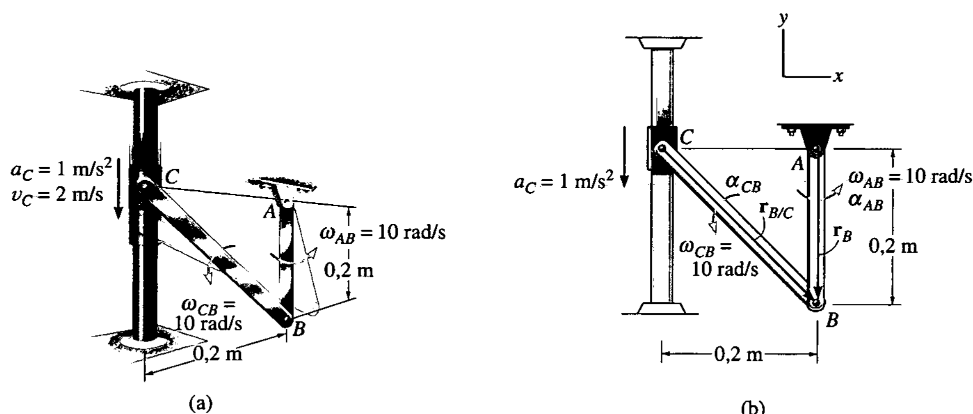



**Figura 16.30**

### SOLUÇÃO (ANÁLISE VETORIAL)

***Diagrama Cinemático.*** Os diagramas cinemáticos das barras $AB$ e $CB$ estão na Figura 16.30$b$. Para resolver o problema, apliquemos a equação cinemática apropriada a cada barra.

***Equação da Aceleração.***
*Barra AB* (rotação em torno de um eixo fixo):

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{a}_B = (\alpha_{AB}\mathbf{k}) \times (-0{,}2\mathbf{j}) - (10)^2(-0{,}2\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_B = 0{,}2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

Observemos que $\mathbf{a}_B$ tem dois componentes, pois o ponto se move ao longo de uma *trajetória curvilínea.*

*Barra BC* (movimento plano geral): Usando o resultado para $\mathbf{a}_B$ e aplicando a Equação 16.18, temos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{CB}^2 \mathbf{r}_{B/C}$$

$$0{,}2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + (\alpha_{CB}\mathbf{k}) \times (0{,}2\mathbf{i} - 0{,}2\mathbf{j}) - (10)^2(0{,}2\mathbf{i} - 0{,}2\mathbf{j})$$

$$0{,}2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + 0{,}2\alpha_{CB}\mathbf{j} + 0{,}2\alpha_{CB}\mathbf{i} - 20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

Logo:

$$0{,}2\alpha_{AB} = 0{,}2\alpha_{CB} - 20$$

$$20 = -1 + 0{,}2\alpha_{CB} + 20$$

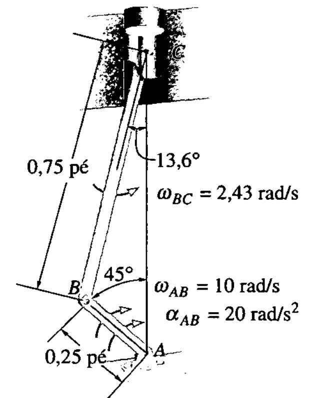
Resolvendo para as acelerações angulares:

$$\alpha_{CB} = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$ ***Resposta***

$$\alpha_{AB} = -95 \text{ rad/s}^2 = 95 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 16.18

A manivela $AB$ de um motor gira com aceleração angular de 20 rad/s$^2$ no sentido horário (Figura 16.31*a*). Determine a aceleração do pistão no instante em que $AB$ está na posição mostrada na figura. Nesse instante, $\omega_{AB} = 10$ rad/s e $\omega_{BC} = 2{,}43$ rad/s.



(a)

### SOLUÇÃO (ANÁLISE VETORIAL)

***Diagrama Cinemático.*** A Figura 16.31*b* mostra os diagramas cinemáticos para a manivela $AB$ e a biela $BC$. A aceleração $\mathbf{a}_C$ é vertical, pois $C$ se desloca ao longo de uma trajetória retilínea.

***Equação da aceleração.*** Expressando cada vetor de posição na forma cartesiana

$$\mathbf{r}_B = \{-0{,}25 \text{ sen } 45°\mathbf{i} + 0{,}25 \cos 45°\mathbf{j}\} \text{ pés} = \{-0{,}177\mathbf{i} + 0{,}177\mathbf{j}\} \text{ pés}$$

$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0{,}75 \text{ sen } 13{,}6°\mathbf{i} + 0{,}75 \cos 13{,}6°\mathbf{j}\} \text{ pés} = \{0{,}176\mathbf{i} + 0{,}729\mathbf{j}\} \text{ pés}$$

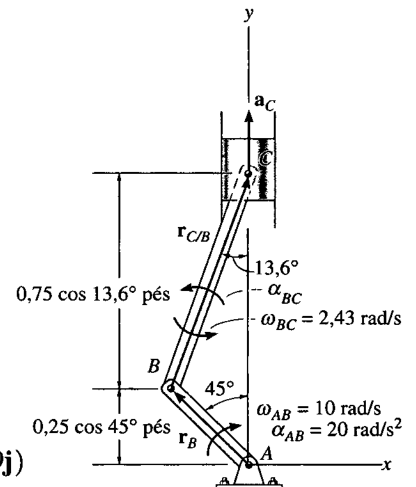
*Manivela AB* (rotação em torno de um eixo fixo):

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_B$$

$$= (-20\mathbf{k}) \times (-0{,}177\mathbf{i} + 0{,}177\mathbf{j}) - (10)^2(-0{,}177\mathbf{i} + 0{,}177\mathbf{j})$$

$$= \{21{,}21\mathbf{i} - 14{,}14\mathbf{j}\} \text{ pés/s}^2$$

*Biela BC* (movimento plano geral): Usando o resultado para $\mathbf{a}_B$ e observando-se que $\mathbf{a}_C$ tem direção vertical, temos



(b)

**Figura 16.31**

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2\mathbf{r}_{C/B}$$

$$a_C\mathbf{j} = 21{,}21\mathbf{i} - 14{,}14\mathbf{j} + (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (0{,}176\mathbf{i} + 0{,}729\mathbf{j}) - (2{,}43)^2(0{,}176\mathbf{i} + 0{,}729\mathbf{j})$$

$$a_C\mathbf{j} = 21{,}21\mathbf{i} - 14{,}14\mathbf{j} + 0{,}176\alpha_{BC}\mathbf{j} - 0{,}729\alpha_{BC}\mathbf{i} - 1{,}04\mathbf{i} - 4{,}30\mathbf{j}$$

$$0 = 20{,}17 - 0{,}729\alpha_{BC}$$

$$a_C = 0{,}176\alpha_{BC} - 18{,}45$$

Resolvendo

$$\alpha_{BC} = 27{,}7 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

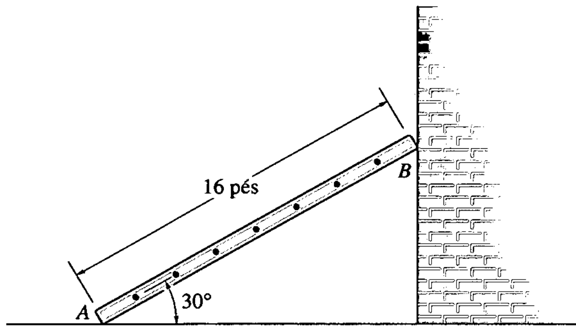
$$a_C = -13{,}6 \text{ pés/s}^2$$ ***Resposta***

Uma vez que o pistão está subindo, o sinal negativo para $a_C$ indica que ele está desacelerando, isto é, $\mathbf{a}_C = \{-13{,}6\mathbf{j}\}$ pés/s$^2$. Isso implica que a velocidade do pistão decresce até que $AB$ se torne vertical, quando então ela se anula momentaneamente.

# PROBLEMAS

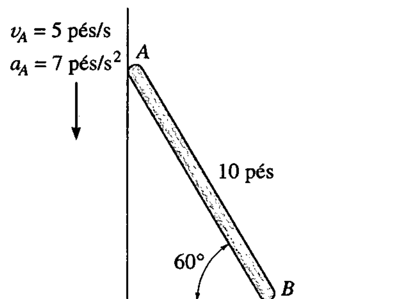
**16.105.** Num dado instante, o pé $A$ da escada tem aceleração $a_A = 4$ pés/s$^2$ e velocidade $v_A = 6$ pés/s, ambas para a esquerda. Determine a aceleração do topo $B$ e a aceleração angular da escada, nesse instante.

**16.106.** Num dado instante, o topo $B$ da escada tem aceleração $a_B = 2$ pés/s$^2$ e velocidade $v_B = 4$ pés/s, ambas para baixo. Determine a aceleração do pé $A$ e a aceleração angular da escada, nesse instante.



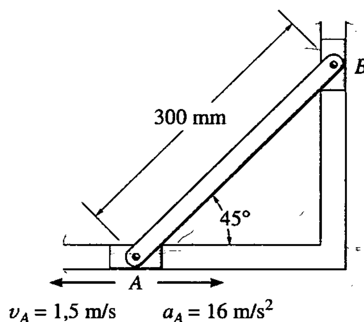

**Problemas 16.105/106**

**16.107.** Num dado instante, a extremidade superior $A$ de uma barra tem a velocidade e a aceleração mostradas na figura. Determine a aceleração da extremidade inferior $B$ e a aceleração angular da barra, nesse instante.



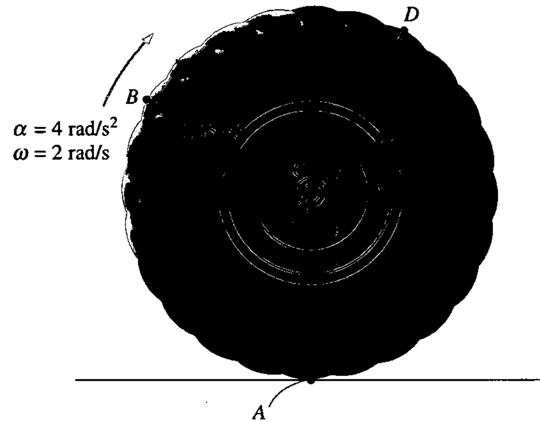

**Problema 16.107**

***16.108.** Num dado instante, o bloco deslizante $A$ tem a velocidade e a aceleração mostradas na figura. Determine a aceleração do bloco $B$ e a aceleração angular da barra de ligação, nesse instante.



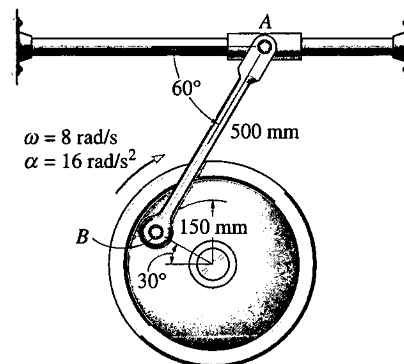

**Problema 16.108**

**16.109.** A roda está se deslocando para a direita com velocidade angular $\omega = 2$ rad/s e aceleração angular $\alpha = 4$ rad/s$^2$. Se o ponto $A$ não escorrega, determine a aceleração do ponto $B$.



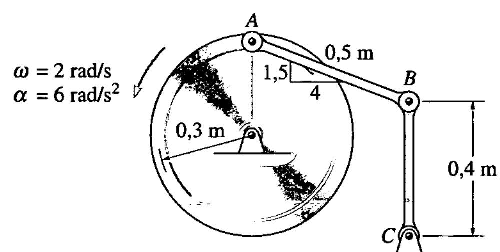

**Problema 16.109**

**16.110.** Num dado instante, a roda está girando com a velocidade e a aceleração mostradas na figura. Determine a aceleração do colar $A$, nesse instante.



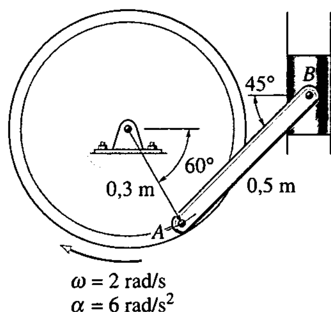

**Problema 16.110**

**16.111.** O volante gira com velocidade angular $\omega = 2$ rad/s e aceleração angular $\alpha = 6$ rad/s$^2$. Determine a aceleração angular das barras de ligação $AB$ e $BC$, na situação mostrada na figura.




**Problema 16.111**

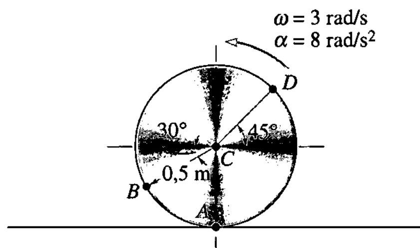
***16.112.** Num dado instante, o volante está girando com a velocidade e a aceleração angulares indicadas na figura. Determine a aceleração do bloco $B$, nesse instante.




Problema 16.112

**16.113.** O disco está se deslocando para a esquerda com aceleração angular $\alpha = 8$ rad/s$^2$ e velocidade angular $\omega = 3$ rad/s. Se ele não escorrega em $A$, determine a aceleração do ponto $B$.

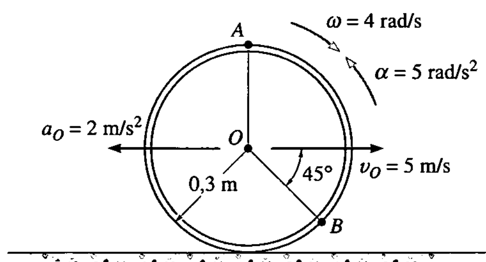
**16.114.** O disco está se deslocando para a esquerda com aceleração angular $\alpha = 8$ rad/s$^2$ e velocidade angular $\omega = 3$ rad/s. Se ele não escorrega em $A$, determine a aceleração do ponto $D$.




**Problemas 16.113/114**

**16.115.** Lança-se um aro sobre uma superfície áspera de forma que num dado instante ele tem velocidade angular $\omega = 4$ rad/s e desaceleração angular $\alpha = 5$ rad/s$^2$, como se indica na figura. Considerando que seu centro tem velocidade $v_O = 5$ m/s e desaceleração $a_O = 2$ m/s$^2$, determine a aceleração do ponto $A$, nesse instante.

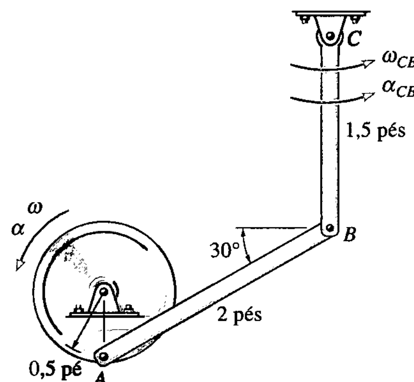
***16.116.** Lança-se um aro sobre uma superfície áspera, de forma que num dado instante ele tem velocidade angular $\omega = 4$ rad/s e desaceleração angular $\alpha = 5$ rad/s$^2$, como se indica na figura. Considerando que seu centro tem velocidade $v_O = 5$ m/s e desaceleração $a_O = 2$ m/s$^2$, determine a aceleração do ponto $B$, nesse instante.



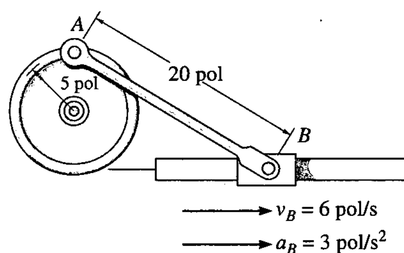

**Problemas 16.115/116**

**16.117.** O disco gira com velocidade angular $\omega = 5$ rad/s e aceleração angular $\alpha = 6$ rad/s$^2$. Determine a aceleração da barra de ligação $CB$, na situação considerada.

**16.118.** Num dado instante, o bloco deslizante $B$ desloca-se para a direita com a velocidade e a aceleração mostradas na figura. Determine a velocidade e a aceleração angulares da roda nesse instante.

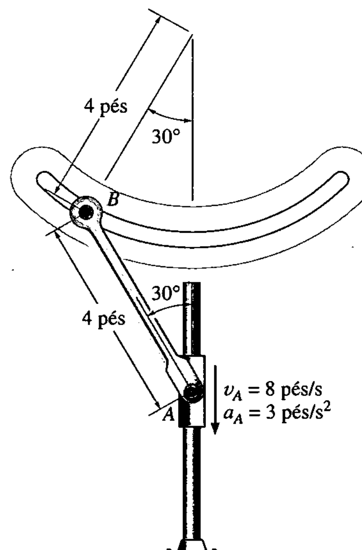



**Problema 16.117**




**Problema 16.118**

**16.119.** As extremidades da barra $AB$ têm de se mover nas trajetórias mostradas na figura. Num dado instante, $A$ tem velocidade de 8 pés/s e aceleração de 3 pés/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração angulares de $AB$, nesse instante.




**Problema 16.119**

***16.120.** A barra $AB$ tem movimento angular definido na figura. Determine a aceleração do colar $C$, na situação considerada.

**Problema 16.120**

**16.121.** Num dado instante, a barra $AB$ tem movimento angular definido na figura. Determine a velocidade e a aceleração do cursor $C$, nesse instante.

**Problema 16.121**

**16.122.** Num dado instante, as engrenagens $A$ e $B$ têm os movimentos angulares indicados na figura. Determine a aceleração angular da engrenagem $C$ e a aceleração de seu centro $D$, nesse instante. Observe que o cubo de $C$ está engrenado com $A$ e a sua periferia está engrenada com $B$.

**16.123.** O mecanismo mostrado na figura produz na manivela $AC$ um movimento oscilante necessário à operação de uma impressora. Se a barra de ligação $DE$ tem o movimento angular definido na figura, determine as respectivas velocidade angular da engrenagem $F$ e velocidade e aceleração angulares da manivela $AC$.

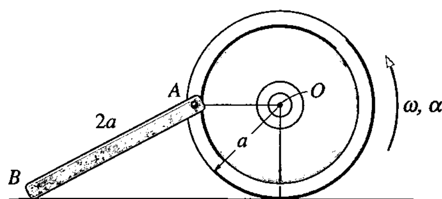
**Problema 16.122**

**Problema 16.123**

***16.124.** Com o desenrolamento da corda, o cilindro gira, de modo que num dado instante ele tem aceleração angular $\alpha = 4$ rad/s$^2$ e velocidade angular $\omega = 2$ rad/s. Determine as respectivas acelerações dos pontos $A$ e $B$.

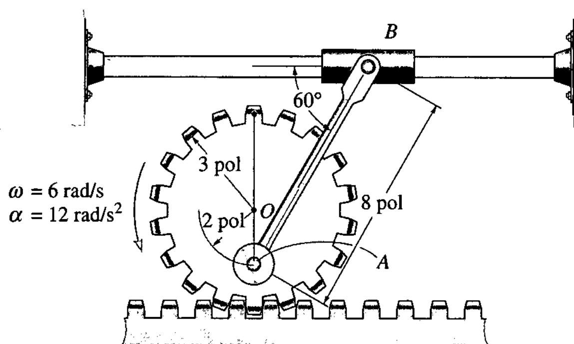
**Problema 16.124**

**16.125.** A roda rola sem escorregar, de forma que, na situação mostrada na figura, sua velocidade angular é $\boldsymbol{\omega}$ e sua aceleração angular é $\boldsymbol{\alpha}$. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $B$ da barra, na situação considerada.



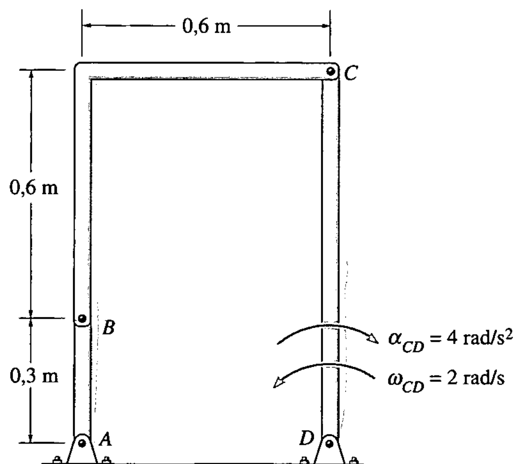

**Problema 16.125**

**16.126.** Num dado instante, a engrenagem tem o movimento angular definido na figura. Determine as acelerações dos pontos $A$ e $B$ da barra de ligação, bem como a aceleração angular dessa barra, nesse instante.



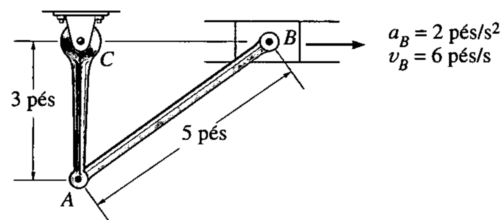

**Problema 16.126**

**16.127.** Determine a aceleração angular da barra de ligação $AB$, considerando que a barra $CD$ tem a velocidade e a desaceleração angulares indicadas na figura.



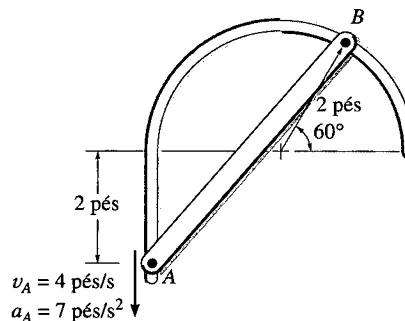

**Problema 16.127**

***16.128.** O bloco deslizante $B$ move-se para a direita com aceleração de 2 pés/s$^2$. Na situação mostrada na figura, a velocidade de $B$ é de 6 pés/s. Determine a aceleração angular da barra $AB$ e a aceleração do ponto $A$, na situação considerada.



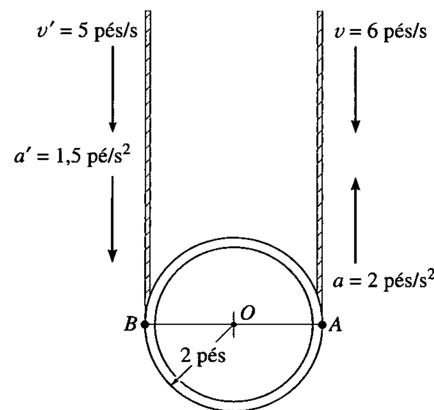

**Problema 16.128**

**16.129.** As extremidades da barra $AB$ movem-se nas trajetórias mostradas na figura. Num dado instante, $A$ tem velocidade $v_A = 4$ pés/s e aceleração $a_A = 7$ pés/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração angulares de $AB$, nesse instante.




**Problema 16.129**

**16.130.** Num dado instante, os cabos que suportam o tubo têm os movimentos indicados na figura. Determine a velocidade e a aceleração angulares do tubo e a velocidade e a aceleração do ponto $B$.




**Problema 16.130**

# 16.8 Análise do Movimento Relativo Usando-se um Sistema de Eixos em Rotação

Nas seções anteriores, a análise do movimento relativo para a velocidade e a aceleração foi efetuada usando-se um sistema de eixos em translação. Esse tipo de análise é útil para a determinação do movimento de pontos do *mesmo* corpo, ou o movimento de pontos localizados de corpos articulados. Em outros problemas, entretanto, corpos rígidos (mecanismos) são construídos de forma tal que ocorre *escorregamento* nas suas articulações. A análise cinemática para tais casos é mais bem desenvolvida utilizando-se um sistema de eixos coordenados em *translação* e *rotação*. Além disso, esse tipo de sistema de referência é útil para a análise de movimentos de dois pontos de um mecanismo que *não* pertencem ao *mesmo* corpo rígido e para especificar a cinemática de um ponto material quando este se move ao longo de uma trajetória em rotação.

Na análise a seguir, desenvolvem-se duas equações que relacionam a velocidade e a aceleração de dois pontos, sendo um deles a origem de um sistema de referência em movimento de translação e rotação num plano.[4] Devido à generalidade da dedução que se segue, esses dois pontos podem representar tanto dois pontos materiais em movimentos independentes quanto dois pontos dos mesmos (ou diferentes) corpos rígidos.

***Posição.*** Consideremos os pontos $A$ e $B$ mostrados na Figura 16.32*a*. Suas posições são especificadas pelos vetores de posição $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$, medidos num sistema de coordenadas $X$, $Y$, $Z$ fixo. Como mostrado na figura, o 'ponto de base' $A$ representa a origem do sistema de coordenadas $x, y, z$, que se supõe estar em translação e rotação em relação ao sistema $X$, $Y$, $Z$. A posição de $B$ em relação a $A$ é especificada pelo vetor de posição relativa $\mathbf{r}_{B/A}$. Os componentes desse vetor podem ser expressos tanto em termos dos vetores unitários nas direções $X$ e $Y$, isto é, $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$, quanto pelos vetores unitários nas direções $x$ e $y$, isto é, $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Para o desenvolvimento que se segue, $\mathbf{r}_{B/A}$ será medido relativamente ao referencial móvel $x$, $y$. Logo, se $B$ tem coordenadas $(x_B, y_B)$ (Figura 16.32*a*), então

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

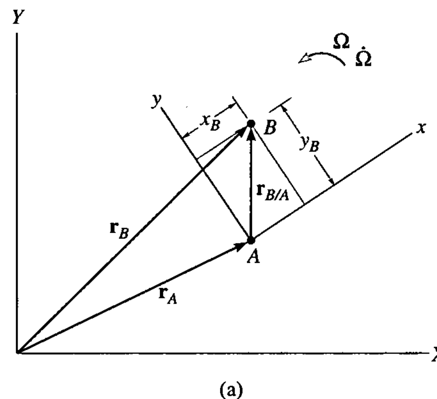



**Figura 16.32**

Por adição vetorial, os três vetores de posição mostrados na Figura 16.32*a* estão relacionados pela equação

$$\boxed{\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}} \qquad (16.19)$$

[4] O caso mais geral do movimento tridimensional é discutido na Seção 20.4.

Num dado instante, o ponto $A$ tem velocidade $\mathbf{v}_A$ e aceleração $\mathbf{a}_A$, enquanto a velocidade e a aceleração angulares dos eixos $x$, $y$ são $\mathbf{\Omega}$ e $\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$, respectivamente.Todos esses vetores são medidos no referencial fixo $X$, $Y$, $Z$, embora eles possam ser expressos tanto em termos de seus componentes $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, quanto de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Como o movimento é plano, pela regra da mão direita, $\mathbf{\Omega}$ e $\dot{\mathbf{\Omega}}$ são sempre *perpendiculares* ao plano de referência do movimento, enquanto $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ estão sempre nesse plano.

***Velocidade.*** A velocidade do ponto $B$ é determinada derivando-se a Equação 16.19, o que nos fornece

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} \tag{16.20}$$

O último termo na equação acima é calculado como se segue:

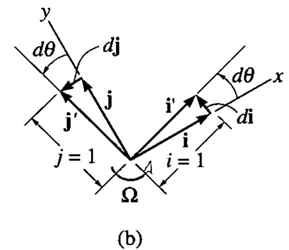
$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})\\ &= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\\ &= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right)\end{aligned} \tag{16.21}$$

Os dois primeiros termos entre parênteses representam os componentes da velocidade do ponto $B$ medidos por um observador fixo no referencial móvel $x$, $y$, $z$. Esses termos serão representados pelo vetor $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$. Nos dois outros termos entre parênteses, a taxa temporal de variação dos vetores unitários $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ é medida por um observador fixo no referencial fixo $X$, $Y$, $Z$. As variações $d\mathbf{i}$ e $d\mathbf{j}$ são devidas *somente* à *rotação* $d\theta$ dos eixos $x$, $y$, $z$, que faz $\mathbf{i}$ se tornar $\mathbf{i}' = \mathbf{i} + d\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ se tornar $\mathbf{j} + d\mathbf{j}$ (Figura 16.32*b*). Como se mostra, os *módulos* de $d\mathbf{i}$ e $d\mathbf{j}$ são iguais a 1 ($d\theta$), pois $i = i' = j = j' = 1$. A *direção* e o *sentido* de $d\mathbf{i}$ são definidos por $+\mathbf{j}$, pois $d\mathbf{i}$ é tangente à trajetória descrita pela ponta do vetor $\mathbf{i}$, no limite de $\Delta t \rightarrow dt$. Analogamente, $d\mathbf{j}$ tem a direção e o sentido de $-\mathbf{i}$ (Figura 16.32*b*). Logo:

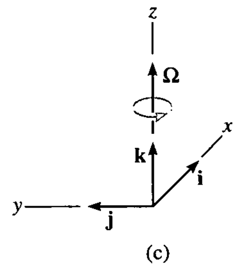
$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$

Vendo os eixos em três dimensões (Figura 16.32*c*) e observando que $\Omega = \Omega\mathbf{k}$, podemos expressar as derivadas anteriores em termos do produto vetorial:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j} \tag{16.22}$$



(b)



(c)

**Figura 16.32**

Substituindo esses resultados na Equação 16.21 e usando a propriedade distributiva do produto vetorial, temos

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{16.23}$$

Logo, a Equação 16.20 torna-se

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}} \tag{16.24}$$

onde

$\mathbf{v}_B$ = velocidade de $B$, medida no referencial $X, Y, Z$

$\mathbf{v}_A$ = velocidade da origem $A$ do referencial $x, y, z$, medida no referencial $X, Y, Z$

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidade relativa de '$B$ em relação a $A$', medida por um observador fixo no sistema em *rotação* $x, y, z$

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidade angular do referencial $x, y, z$, medida no referencial $X, Y, Z$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posição relativa de '$B$ em relação a $A$'

Comparando a Equação 16.24 com a Equação 16.16 ($\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$), que é válida para um referencial em translação, podemos ver que a única diferença entre as equações é representada pelo termo $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$.

Ao se aplicar a Equação16.24, é bastante útil entender o que cada um de seus termos representa. Na ordem em que aparecem, eles são:

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{v}_B$ | velocidade absoluta de $B$ | movimento de $B$ observado no referencial $X, Y, Z$ |
| | (é igual a) | |
| $\mathbf{v}_A$ | velocidade absoluta da origem do referencial $x, y, z$ | movimento do referencial $x, y, z$ observado no referencial $X, Y, Z$ |
| | (mais) | |
| $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ | efeito de velocidade angular causado pela rotação do referencial $x, y, z$ | |
| | (mais) | |
| $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ | velocidade relativa de $B$ em relação a $A$ | movimento de $B$ observado no referencial $x, y, z$ |

***Aceleração.*** A aceleração de $B$, observada no referencial $X, Y, Z$, pode ser expressa em termos de seu movimento medido no referencial em rotação ou em movimento calculando-se a derivada temporal da Equação 16.2; isto é,

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \qquad (16.25)$$

Na equação anterior, $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = d\boldsymbol{\Omega}/dt$ é a aceleração angular do sistema $x, y, z$. Para movimento plano $\boldsymbol{\Omega}$ é sempre perpendicular ao plano do movimento, e, portanto, $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ mede *somente a alteração do módulo* de $\Omega$. A derivada $d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ na Equação 16.25 é definida pela Equação 16.23, de forma que

$$\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \qquad (16.26)$$

Encontrando a derivada temporal de $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x\mathbf{i} + (v_{B/A})_y\mathbf{j}$,

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt}\mathbf{j}\right] + \left[(v_{B/A})_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right]$$

Nessa equação, os dois primeiros termos entre colchetes representam os componentes da aceleração do ponto $B$, medida por um observador fixo no sistema em movimento $x, y, z$. Esses termos serão representados por $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$. Os outros dois termos entre colchetes podem ser simplificados usando-se as equações 16.22.

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Substituindo essa equação e a Equação 16.26 na Equação 16.25 e rearranjando os termos,

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}} \quad (16.27)$$

onde

$\mathbf{a}_B$ = aceleração de $B$, medida no referencial $X, Y, Z$

$\mathbf{a}_A$ = aceleração da origem $A$ do referencial $x, y, z$, medida no referencial $X, Y, Z$

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleração e velocidade relativas de '$B$ em relação a $A$', medidas por um observador fixo no sistema em *rotação* $x, y, z$

$\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}$ = aceleração e velocidade angulares do referencial $x, y, z$, medidas no referencial $X, Y, Z$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posição relativa de '$B$ em relação a $A$'

Se compararmos a Equação 16.27 com a Equação 16.18, escrita na forma $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$, válida para um referencial em translação, poderemos ver que a diferença entre as equações é representada pelos termos $2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$. Em particular, $2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ é denominada *aceleração de Coriolis*, sobrenome do engenheiro francês G. C. Coriolis, que foi o primeiro a determiná-la. Esse termo representa a diferença na aceleração de $B$ medida nos sistemas fixo e em rotação. Como indicado pelo produto vetorial, a aceleração de Coriolis é *sempre* perpendicular a $\mathbf{\Omega}$ e a $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$. A aceleração de Coriolis é um componente importante da aceleração que deve ser considerado toda vez que referenciais em rotação forem usados. Isso ocorre com freqüência, por exemplo, quando estudamos as acelerações e forças em foguetes, projéteis de longo alcance ou outros corpos tendo movimentos cujas medidas são afetadas significativamente pela rotação da Terra.

A seguinte interpretação dos termos da Equação 16.27 pode ser útil quando aplicarmos essa equação à solução de problemas.

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{a}_B$ | aceleração absoluta de $B$ | movimento de $B$ observado no referencial $X, Y, Z$ |
| | (igual a) | |
| $\mathbf{a}_A$ | aceleração absoluta da origem do referencial $x, y, z$ | movimento do referencial $x, y, z$ observado no referencial $X, Y, Z$ |
| | (mais) | |
| $\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$ | efeito de velocidade angular causado pela rotação do referencial $x, y, z$ | |
| | (mais) | |
| $\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ | efeito de velocidade angular causado pela rotação do referencial $x, y, z$ | |
| | (mais) | |

| | | |
|---|---|---|
| $2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ | efeito combinado do movimento de $B$ relativamente ao referencial $x, y, z$ e da rotação do diferencial $x, y, z$ | movimentos em interação |
| | (mais) | |
| $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ | aceleração relativa de $B$ em relação a $A$ | movimento de $B$ observado no referencial $x, y, z$ |

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

As equações 16.24 e 16.27 podem ser aplicadas à solução de problemas que envolvem o movimento plano de pontos materiais ou corpos rígidos por meio do seguinte procedimento.

***Eixos Coordenados***

- Escolha apropriadamente a origem e a orientação dos eixos para os sistemas de referência $X, Y, Z$ (fixo) e $x, y, z$ (em movimento).
- Com freqüência, as soluções são obtidas facilmente se no instante considerado:
  (1) as origens coincidem
  (2) os eixos correspondentes são colineares
  (3) os eixos correspondentes são paralelos
- O referencial móvel deve ser fixado no corpo ou dispositivo ao longo do qual ocorre o movimento relativo.

***Equações Cinemáticas***

- Após definir a origem $A$ do referencial móvel e especificar o ponto $B$ em movimento, as equações 16.24 e 16.27 devem ser escritas na forma simbólica

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Os componentes cartesianos de todos esses vetores podem ser expressos tanto nas direções dos eixos $X,Y, Z$ quanto nas de $x, y, z$. A escolha é arbitrária, contanto que um conjunto consistente de vetores unitários seja usado.
- O movimento do referencial $x, y, z$ é expresso por $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{\Omega}$ e $\dot{\mathbf{\Omega}}$; e o movimento de $B$, em relação a esse referencial móvel, é expresso por $\mathbf{r}_{B/A}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.




*A rotação da carroceria do caminhão em torno do pino C ocorre por meio do avanço do cilindro hidráulico AB. Para determinar a rotação da carroceria devida a esse avanço, podemos usar as equações do movimento relativo, fixando os eixos x, y no cilindro de forma que o movimento relativo de avanço ocorra ao longo do eixo y.*

## EXEMPLO 16.19

No instante em que $\theta = 60°$, a barra mostrada na Figura 16.33 tem uma velocidade angular de 3 rad/s e uma aceleração angular de 2 rad/s$^2$. Nesse instante, o colar $C$ desloca-se para fora ao longo da barra, de modo que quando $x = 0{,}2$ m, a velocidade é 2 m/s e a aceleração é 3 m/s$^2$, ambas medidas relativamente à barra. Determine a aceleração de Coriolis e a velocidade e a aceleração do colar, nesse instante.

## SOLUÇÃO

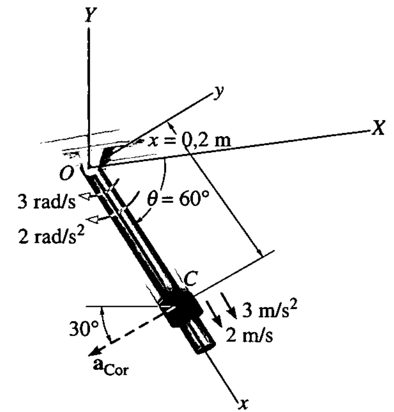



**Figura 16.33**

***Eixos Coordenados.*** As origens de ambos os sistemas coordenados estão localizadas no ponto $O$ (Figura 16.33). Como o movimento do colar foi dado relativamente à barra, o referencial móvel $x$, $y$, $z$ está *ligado* a ela.

***Equações Cinemáticas.***

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \quad (2)$$

Será mais fácil expressar os dados em termos dos componente **i**, **j**, **k** do que em termos dos componentes **I**, **J**, **K**. Logo,

| *Movimento do referencial móvel* | *Movimento de C em relação ao referencial móvel* |
|---|---|
| $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ | $\mathbf{r}_{C/O} = \{0{,}2\mathbf{i}\}$ m |
| $\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$ | $(\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = \{2\mathbf{i}\}$ m/s |
| $\mathbf{\Omega} = \{-3\mathbf{k}\}$ rad/s | $(\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} = \{3\mathbf{i}\}$ m/s² |
| $\dot{\mathbf{\Omega}} = \{-2\mathbf{k}\}$ rad/s² | |

Da Equação 2, a equação de Coriolis é definida por

$$\mathbf{a}_{Cor} = 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) = \{-12\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

Esse vetor está indicado por uma seta tracejada na Figura 16.33. Se desejável, o vetor pode ser expresso em componentes **I**, **J**, nas direções dos eixos $X$ e $Y$, respectivamente.

A velocidade e a aceleração do colar são determinadas substituindo-se os dados nas equações 1 e 2 e calculando-se os produtos vetoriais, o que resulta em

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz}$$

$$= \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times (0{,}2\mathbf{i}) + 2\mathbf{i}$$

$$= \{2\mathbf{i} - 0{,}6\mathbf{j}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz}$$

$$= \mathbf{0} + (-2\mathbf{k}) \times (0{,}2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0{,}2\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i}$$

$$= \mathbf{0} - 0{,}4\mathbf{j} - 1{,}80\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{i}$$

$$= \{1{,}20\mathbf{i} - 12{,}4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 16.20

A barra $AB$ mostrada na Figura 16.34 gira no sentido horário com velocidade angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s e aceleração angular $\alpha_{AB} = 4$ rad/s², quando $\theta = 45°$. Determine o movimento angular da barra $DE$, nesse instante. O cursor $C$ está articulado por um pino à barra $AB$ e desliza sobre a barra $DE$.

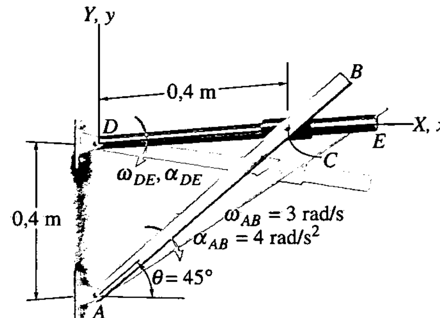



Figura 16.34

## SOLUÇÃO

***Eixos Coordenados.*** As origens do referencial fixo e do móvel situam-se em $D$ (Figura 16.34). Além disso, o referencial $x, y, z$ está ligado à barra $DE$ e gira com ela, de modo que o movimento relativo do cursor pode ser facilmente seguido.

***Equações Cinemáticas.***

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} \tag{2}$$

Todos os vetores serão expressos em termos de componentes **i**, **j**, **k**.

| *Movimento do referencial móvel* | *Movimento de C em relação ao referencial móvel* |
|---|---|
| $\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$ | $\mathbf{r}_{C/D} = \{0{,}4\mathbf{i}\}$ m |
| $\mathbf{a}_D = \mathbf{0}$ | $(\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} = (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$ |
| $\boldsymbol{\Omega} = -\omega_{DE}\mathbf{k}$ | $(\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} = (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$ |
| $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -\alpha_{DE}\mathbf{k}$ | |

*Movimento de C:* Como o cursor se desloca numa trajetória circular, sua velocidade e sua aceleração podem ser determinadas por meio das equações 16.9 e 16.14.

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} = (-3\mathbf{k}) \times (0{,}4\mathbf{i} + 0{,}4\mathbf{j}) = \{1{,}2\mathbf{i} - 1{,}2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_{C/A}$$

$$= (-4\mathbf{k}) \times (0{,}4\mathbf{i} + 0{,}4\mathbf{j}) - (3)^2(0{,}4\mathbf{i} + 0{,}4\mathbf{j}) = \{-2\mathbf{i} - 5{,}2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Substituindo os dados nas equações 1 e 2, temos

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz}$$

$$1{,}2\mathbf{i} - 1{,}2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\omega_{DE}\mathbf{k}) \times (0{,}4\mathbf{i}) + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$

$$1{,}2\mathbf{i} - 1{,}2\mathbf{j} = \mathbf{0} - 0{,}4\omega_{DE}\mathbf{j} + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$

$$(v_{C/D})_{xyz} = 1{,}2 \text{ m/s}$$

$$\omega_{DE} = 3 \text{ rad/s}\circlearrowright$$ ***Resposta***

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$

$$-2\mathbf{i} - 5{,}2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\alpha_{DE}\mathbf{k}) \times (0{,}4\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0{,}4\mathbf{i})]$$
$$+2(-3\mathbf{k}) \times (1{,}2\mathbf{i}) + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$

$$-2\mathbf{i} - 5{,}2\mathbf{j} = -0{,}4\alpha_{DE}\mathbf{j} - 3{,}6\mathbf{i} - 7{,}2\mathbf{j} + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$

$$(a_{C/D})_{xyz} = 1{,}6 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{DE} = -5 \text{ rad/s}^2 = 5 \text{ rad/s}^2\circlearrowleft$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 16.21

Os jatos $A$ e $B$ estão voando à mesma altitude e têm os movimentos indicados na Figura 16.35. Determine a velocidade e a aceleração de $A$ medida pelo piloto de $B$.

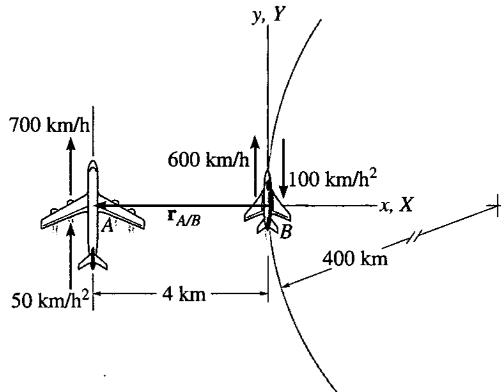



**Figura 16.35**

## SOLUÇÃO

***Eixos Coordenados.*** Como o movimento de $A$ em relação ao piloto em $B$ está sendo seguido, os eixos $x, y, z$ estão ligados ao avião $B$ (Figura 16.35). Na *situação* mostrada na figura, a origem $B$ coincide com a origem do referencial fixo $X, Y, Z$.

***Equações Cinemáticas.***

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} \quad (2)$$

*Movimento do referencial móvel:*

$$\mathbf{v}_B = \{600\mathbf{j}\}\ \text{km/h}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600)^2}{400} = 900\ \text{km/h}^2$$

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_n + (\mathbf{a}_B)_t = \{900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2$$

$$\Omega = \frac{v_B}{\rho} = \frac{600\ \text{km/h}}{400\ \text{km}} = 1{,}5\ \text{rad/h} \circlearrowright \qquad \boldsymbol{\Omega} = \{-1{,}5\mathbf{k}\}\ \text{rad/h}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{(a_B)_t}{\rho} = \frac{100\ \text{km/h}^2}{400\ \text{km}} = 0{,}25\ \text{rad/h}^2 \circlearrowleft \qquad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \{0{,}25\mathbf{k}\}\ \text{rad/h}^2$$

*Movimento de A em relação ao referencial móvel:*

$$\mathbf{r}_{A/B} = \{-4\mathbf{i}\}\ \text{km} \quad (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = ? \quad (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = ?$$

Substituindo os dados nas equações 1 e 2 e observando que $\mathbf{v}_A = \{700\mathbf{j}\}$ km/h e $\mathbf{a}_A = \{50\mathbf{j}\}$ km/h$^2$, temos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$700\mathbf{j} = 600\mathbf{j} + (-1{,}5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{94\mathbf{j}\}\ \text{km/h}$$ ***Resposta***

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

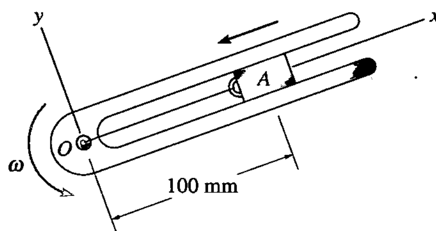
$$50\mathbf{j} = (900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) + (0{,}25\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (-1{,}5\mathbf{k}) \times [(-1{,}5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})] + 2(-1{,}5\mathbf{k}) \times (94\mathbf{j}) + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{-1191\mathbf{i} + 151\mathbf{j}\}\ \text{km/h}^2$$ ***Resposta***

A solução desse problema deve ser comparada com a do Exemplo 12.26.

## PROBLEMAS

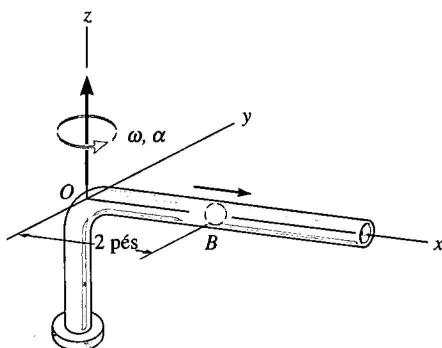
**16.131.** O bloco que está preso numa corda move-se ao longo da ranhura numa barra horizontal. Na situação mostrada na figura, a corda é puxada para baixo através do orifício em $O$, com aceleração de 4 m/s$^2$ e velocidade de 2 m/s. Determine a aceleração do bloco nessa situação. A barra gira em torno de $O$ com velocidade angular constante $\omega$ = 4 rad/s.



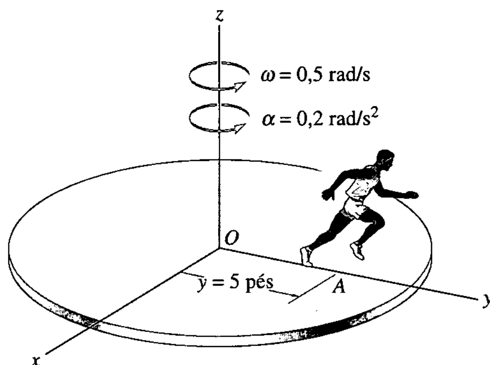

**Problema 16.131**

***16.132.** A bola $B$, de tamanho desprezível, rola num tubo, de forma que num dado instante ela tem uma velocidade de 5 pés/s e uma aceleração de 3 pés/s$^2$, medidas relativamente ao tubo. Se o tubo tem velocidade angular $\omega$ = 3 rad/s e aceleração $\alpha$ = 5 rad/s$^2$, nesse instante, determine a velocidade e a aceleração da bola.

**16.133.** Um homem está numa plataforma girante, inicialmente em $O$. Ele corre para a borda, de forma que, quando ele está em $A$, $y$ = 0,5 pé, seu centro de massa tem velocidade de 2 pés/s e aceleração de 3 pés/s$^2$, ambas medidas relativamente à plataforma e orientadas ao longo do eixo $y$. Se a plataforma tem o movimento de rotação definido na figura, determine a velocidade e a aceleração do seu centro de massa, na situação considerada.

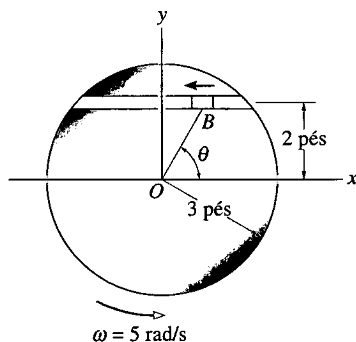



Problema 16.132




Problema 16.133

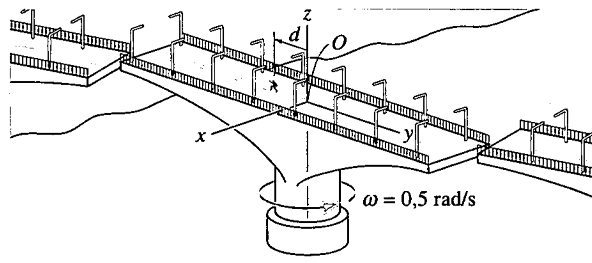
**16.134.** O bloco $B$ desloca-se ao longo da ranhura feita na plataforma, com velocidade constante de 2 pés/s, medida relativamente à plataforma, na direção mostrada na figura. Se a plataforma gira a uma velocidade angular constante $\omega = 5$ rad/s, determine a velocidade e a aceleração do bloco no instante em que $\theta = 60°$.




Problema 16.134

**16.135.** Enquanto a ponte giratória está fechando com uma velocidade angular de 0,5 rad/s, um homem corre ao longo da pista a uma velocidade constante de 5 pés/s, relativamente à pista. Determine a velocidade e a aceleração do homem, no instante em que $d = 15$ pés.

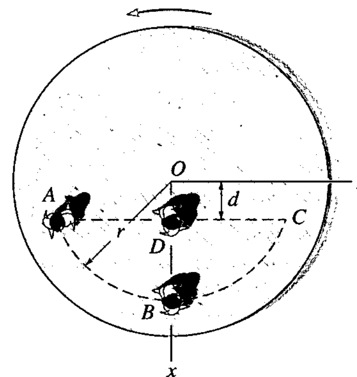
***16.136.** Enquanto a ponte giratória está fechando com velocidade angular de 0,5 rad/s, um homem corre ao longo da pista, de modo que quando $d = 10$ pés, sua corrida do centro para a extremidade se dá a uma velocidade de 5 pés/s e aceleração de 2 pés/s$^2$, ambas medidas relativamente à pista. Determine a velocidade e a aceleração do homem nesse instante.




Problemas 16.135/136

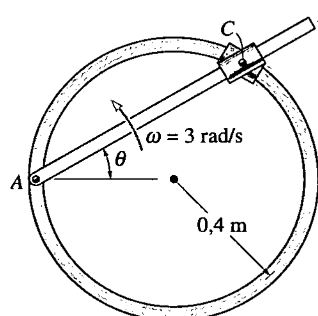
**16.137.** Uma menina está inicialmente no ponto $A$ da plataforma que gira a uma velocidade angular constante $\omega = 0,5$ rad/s. Se ela caminha a uma velocidade constante $v = 0,75$ m/s, medida relativamente à plataforma, determine a aceleração da menina (a) quando ela alcança o ponto $D$ ao movimentar-se na trajetória $ADC$, $d = 1$ m; e (b) quando ela atinge o ponto $B$, se ela segue a trajetória $ABC$, $r = 3$ m.

**16.138.** Uma menina está inicialmente no ponto $A$ da plataforma, que gira com aceleração angular $\alpha = 0,2$ rad/s$^2$ e que, num dado instante, tem velocidade angular $\omega = 0,5$ rad/s. Se ela caminha a uma velocidade escalar $v = 0,75$ m/s, medida relativamente à plataforma, determine sua aceleração (a) quando ela atinge o ponto $D$, caminhando ao longo da trajetória $ADC$, $d = 1$ m; e (b) quando ela chega ao ponto $B$, seguindo a trajetória $ABC$, $r = 3$ m.



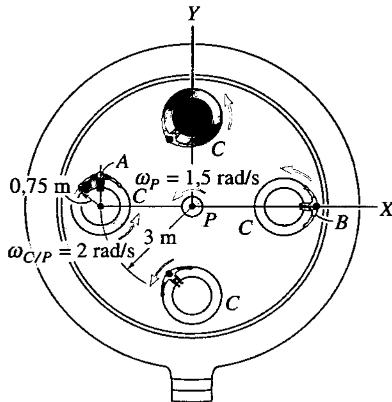

Problemas 16.137/138

**16.139.** A barra $AB$ gira no sentido anti-horário com velocidade angular constante $\omega = 3$ rad/s. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $C$ situado no duplo cursor, no instante em que $\theta = 45°$. O cursor consiste em duas peças deslizantes e *articuladas* que têm de se deslocar ao longo da trajetória circular e da barra $AB$.



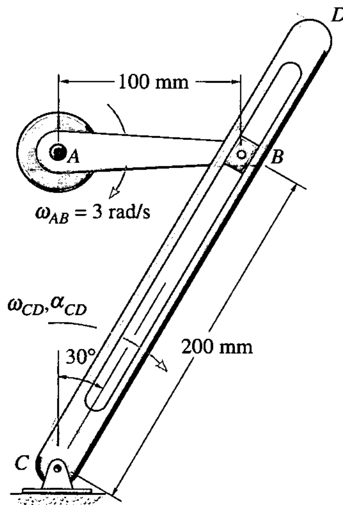

Problema 16.139

***16.140.** Um brinquedo de um parque de diversões consiste em uma plataforma girante $P$, que tem velocidade angular constante $\omega_P = 1{,}5$ rad/s, e quatro barquinhas, $C$, montadas na plataforma, que têm velocidade angular constante $\omega_{C/P} = 2$ rad/s, medida relativamente à plataforma. Determine a velocidade e a aceleração do passageiro em $B$, na situação mostrada na figura.




Problema 16.140

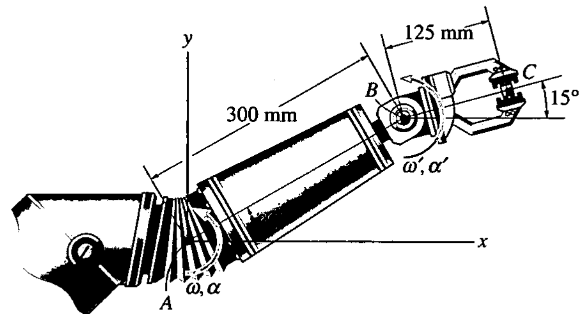
**16.141.** O bloco $B$ do mecanismo tem de se deslocar na ranhura da barra $CD$. Se $AB$ está se movendo a uma taxa constante $\omega AB = 3$ rad/s, determine a velocidade e a aceleração angulares de $CD$, na situação mostrada na figura.



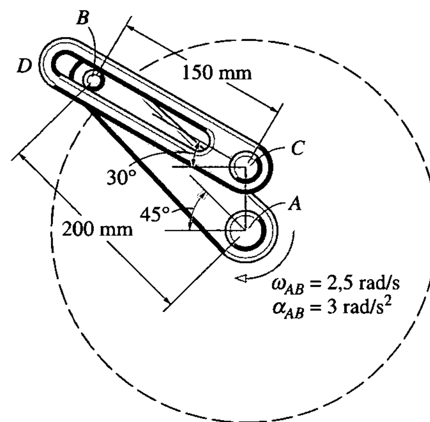

Problema 16.141

**16.142.** Num dado instante, o braço de robô $AB$ gira no sentido anti-horário com velocidade angular $\omega = 5$ rad/s e aceleração angular $\alpha = 2$ rad/s$^2$. Simultaneamente, a garra $BC$ gira no sentido anti-horário com velocidade angular $\omega' = 6$ rad/s e aceleração angular $\alpha' = 2$ rad/s$^2$, ambas medidas relativamente a uma referência *fixa*. Determine a velocidade e a aceleração do objeto mantido pela garra $C$.

**16.143.** O mecanismo esquematizado na figura serve para ampliar movimentos de rotação. A barra de ligação $AB$ tem um pino em $B$ que tem de se mover na ranhura da barra $CD$. Se num dado instante $AB$ (entrada) tem velocidade angular $\omega_{AB} = 2{,}5$ rad/s e aceleração angular $\alpha_{AB} = 3$ rad/s$^2$, determine a velocidade e a aceleração angulares de $CD$ (saída), nesse instante.

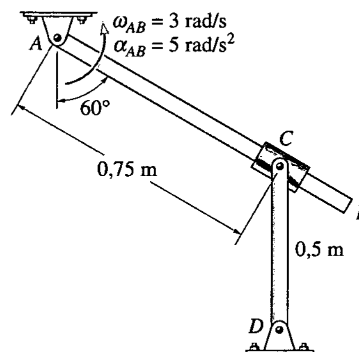



Problema 16.142



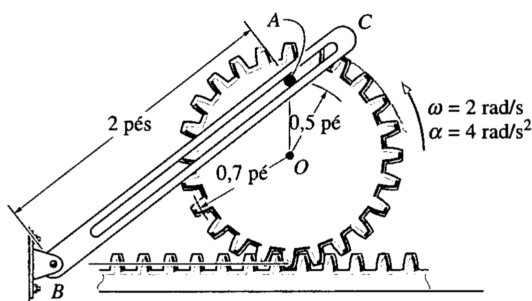

Problema 16.143

***16.144.** Num dado instante, a barra $AB$ tem velocidade angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s e aceleração angular $\alpha_{AB} = 5$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração angulares da barra $CD$, nesse instante. O colar em $C$ está ligado por pino em $CD$ e desliza em $AB$.



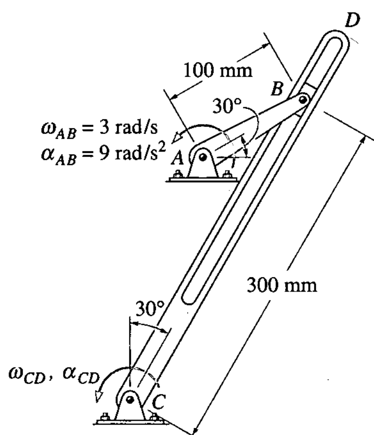

Problema 16.144

**16.145.** A engrenagem tem um movimento de rotação definido na figura. Determine a velocidade e a aceleração angulares da barra com ranhura $BC$, na situação mostrada na figura. O pino em $A$ está fixo na engrenagem.




Problema 16.145

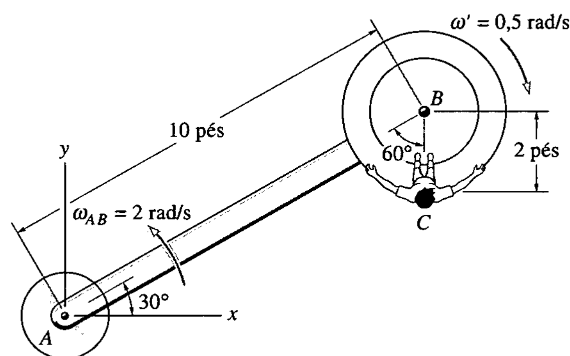
**16.146.** O mecanismo de retorno rápido consiste numa manivela $AB$, um bloco deslizante $B$ e uma barra de ligação com ranhura. Se a manivela tem o movimento de rotação definido na figura, determine o movimento de rotação da barra de ligação, na situação mostrada na figura.




Problema 16.146

**16.147.** Um brinquedo de um parque de diversões consiste em um braço giratório $AB$ que tem velocidade angular constante $\omega_{AB}$ = 2 rad/s, em torno do ponto $A$, e uma gôndola montada na sua extremidade, girando com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}' = \{0{,}5\mathbf{k}\}$ rad/s, medida relativamente ao braço. Determine a velocidade e a aceleração do ocupante em $C$ na situação mostrada na figura.

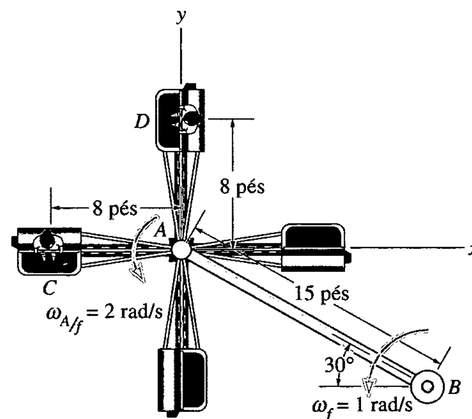
***16.148.** Um brinquedo de um parque de diversões consiste em um braço giratório $AB$ que tem aceleração angular $\alpha$ = 1 rad/s², no instante em que a velocidade angular é $\omega_{AB}$ = 2 rad/s. Nesse mesmo instante, a gôndola montada na extremidade do braço tem aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}' = \{-0{,}6\mathbf{k}\}$ rad/s² e velocidade angular $\boldsymbol{\omega}' = \{-0{,}5\mathbf{k}\}$ rad/s. Determine a velocidade e a aceleração do ocupante em $C$, nesse instante.




Problemas 16.147/148

**16.149.** As cadeiras do brinquedo de um parque de diversões giram em torno do eixo em $A$, com velocidade angular constante $\omega_{A/f}$ = 2 rad/s, medida relativamente à barra $AB$. Ao mesmo tempo, $AB$ gira em torno do eixo principal de suporte em $B$, com velocidade angular constante $\omega_f$ = 1 rad/s. Determine a velocidade e a aceleração do ocupante em $C$, na situação mostrada na figura.

**16.150.** As cadeiras do brinquedo de um parque de diversões giram em torno do eixo em $A$, com velocidade angular constante $\omega_{A/f}$ = 2 rad/s, medida relativamente à barra $AB$. Ao mesmo tempo, $AB$ gira em torno do eixo principal de suporte em $B$, com velocidade angular constante $\omega_f$ = 1 rad/s. Determine a velocidade e a aceleração do ocupante em $D$, na situação mostrada na figura.

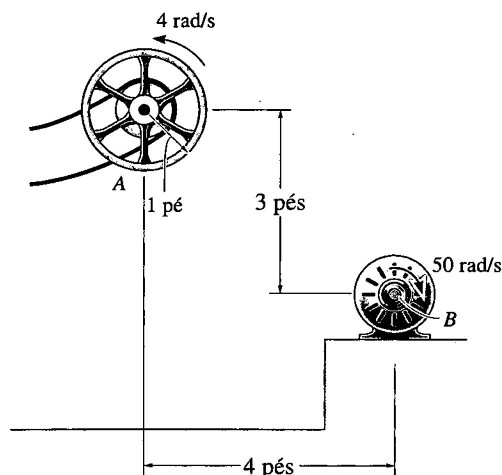



Problemas 16.149/150

# ESTUDO DE PROJETOS

## 16.1P Projeto de um Sistema de Transmissão por Correia

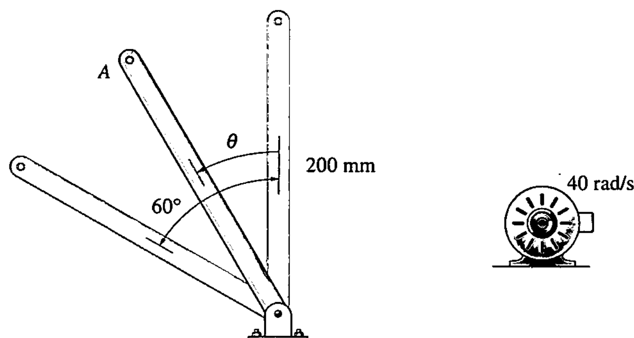
A roda $A$ de uma máquina têxtil deve ser girada no sentido anti-horário a 4 rad/s. Isso pode ser feito utilizando-se um motor montado numa plataforma, como mostrado na figura. Se o eixo $B$ no motor pode girar no sentido horário a 50 rad/s, desenvolva um método para transmitir a rotação de $B$ para $A$. Use uma série de correias e polias como base de seu projeto. Pela periferia da roda $A$ uma correia comunica-lhe a rotação e uma polia pode ser fixada ao eixo do motor ou onde for mais conveniente. Não use correias com mais de 6 pés de comprimento. Apresente um desenho de seu projeto e os cálculos da cinemática. Além disso, determine o custo total dos materiais, considerando que uma correia custa US\$ 2,50 e uma polia, US\$ $2r$, onde $r$ é o raio da polia, expresso em polegadas.




**Problema 16.1P**

## 16.2P Projeto de um Mecanismo de Ligação

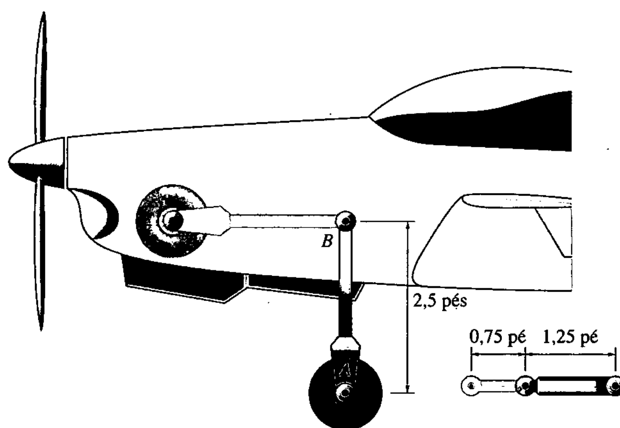
Uma máquina de costura deve ter uma barra de 200 mm de comprimento que oscile para a frente e para trás com uma amplitude de 60°, a cada 0,2 s. Dispõe-se de um motor com um eixo que gira a 40 rad/s. Especifique a localização do motor e projete um mecanismo que realize o movimento necessário. Apresente um desenho de seu projeto, mostrando a posição do motor e calcule a velocidade e a aceleração da extremidade $A$ da barra, como função de seu ângulo de rotação $0° \leq \theta \leq 60°$.




**Problema 16.2P**

## 16.3P Projeto de um Mecanismo de um Trem de Pouso Retrátil

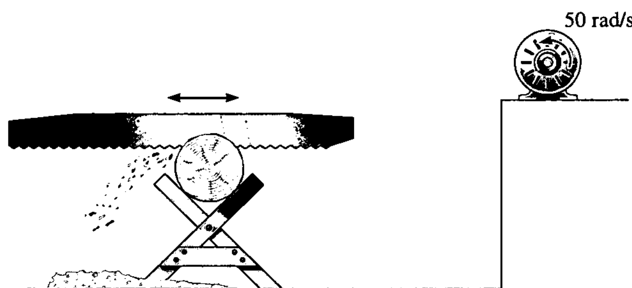
A roda frontal de um pequeno avião deve ser presa a uma barra $AB$, que, por sua vez, deve ser articulada na estrutura da aeronave em $B$. Projete um mecanismo que permita a completa retração da roda, para a frente, isto é, que ela seja girada de 90°, no sentido horário, em $t \leq 4$. Use um cilindro hidráulico que tenha um comprimento de 1,25 pé, quando fechado, e um comprimento máximo (se necessário) de 2 pés. Certifique-se de que o mecanismo criado possa manter uma posição estável para a roda no chão. Construa gráficos da velocidade e da aceleração angulares de $AB$, como funções da posição angular $0° \leq \theta \leq 90°$.




**Problema 16.3P**

## 16.4P PROJETO DE UM MECANISMO DE LIGAÇÃO PARA UMA SERRA

Deseja-se que a lâmina de uma serra mantida na posição horizontal realize o movimento completo de vai-e-vem em 2 segundos. Um motor elétrico, com seu eixo motor girando a 50 rad/s, está disponível para acionar a serra e poderá ser instalado em qualquer lugar. Projete um mecanismo que transfira a rotação do motor à lâmina de serra. Apresente desenhos de seu projeto e os cálculos da cinemática da lâmina. Inclua gráficos da velocidade e da aceleração da lâmina, em função de sua posição horizontal. Observe que, para cortar totalmente a tora, deve-se permitir que a lâmina tenha movimentos livres para baixo e de vai-e-vem.




**Problema 16.4P**

## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Movimento Plano de um Corpo Rígido.*** Um corpo rígido realiza três tipos de movimento plano: translação, rotação em torno de um eixo fixo e movimento plano geral.
- ***Translação.*** Quando um corpo tem movimento de translação retilínea, todos os seus pontos se movem ao longo de trajetórias retilíneas. Se as trajetórias têm o mesmo raio de curvatura, então ocorre translação curvilínea. Se conhecermos a trajetória de um dos pontos, o movimento de qualquer outro ponto do corpo também será conhecido.
- ***Rotação em torno de um Eixo Fixo.*** Nesse tipo de movimento, todos os pontos se movem em trajetórias circulares. Nesse caso, todos os segmentos de reta do corpo sofrem um mesmo deslocamento angular e apresentam a mesma velocidade angular e a mesma aceleração angular. As relações diferenciais entre essas quantidades cinemáticas são

$$\omega = d\theta/dt \qquad \alpha = d\omega/dt \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

Se a aceleração é constante, $\alpha = \alpha_c$, então essas equações podem ser integradas, resultando em

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Conhecendo o movimento angular do corpo, podemos ter a velocidade de qualquer ponto a uma distância $r$ do eixo de rotação:

$$v = \omega r \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

A aceleração de qualquer ponto do corpo tem, em princípio, dois componentes. O componente tangencial mede a variação do módulo da velocidade (velocidade escalar)

$$a_t = \alpha r \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

O componente normal mede a variação da direção da velocidade

$$a_n = \omega^2 r \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}$$

## REVISÃO DO CAPÍTULO (CONTINUAÇÃO)

- ***Movimento Plano Geral.*** Quando um corpo realiza movimento plano geral, ele apresenta simultaneamente um movimento de translação e um de rotação. Um exemplo típico é o de uma roda que rola se escorregar. Há vários métodos de se analisar esse tipo de movimento.

  ***Análise do Movimento Absoluto.*** Se o movimento de um ponto de um corpo ou o movimento angular de uma reta do corpo é conhecido, é possível relacionar esse movimento com o de um outro ponto ou reta, por meio de uma análise do movimento absoluto. Para isso, deve-se estabelecer coordenadas de posição $s$ ou coordenadas de posição angular $\theta$ (medidas a partir de um ponto fixo ou de uma reta fixa). Essas coordenadas de posição são, então, relacionadas usando-se a geometria do corpo. A derivada temporal da equação fornece a relação entre as velocidades e/ou as velocidades angulares. Uma segunda derivação temporal relaciona as acelerações e/ou as acelerações angulares.

  ***Análise da Velocidade Relativa.*** O movimento plano geral também pode ser estudado por meio de uma análise relativa entre dois pontos $A$ e $B$. Esse método considera o movimento em duas partes: primeiro uma translação do ponto de base $A$ escolhido e, em seguida, uma 'rotação' relativa do corpo, em torno do ponto $A$, medida num sistema de eixos em translação. As velocidades dos pontos $A$ e $B$ são, então, relacionadas usando-se

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

  Essa equação pode ser aplicada na forma vetorial cartesiana, escrita como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

  De modo análogo, temos, para a aceleração,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

  ou

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

  Como o movimento relativo é visto como um movimento circular em torno do ponto de base $A$, o ponto $B$ terá uma velocidade $\mathbf{v}_{B/A}$, que é tangente à trajetória circular. O ponto $B$ também terá uma aceleração com dois componentes, $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_n$. É importante também observar que $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_B$ podem ter dois componentes se esses pontos se movem em trajetórias curvilíneas.

  ***Centro Instantâneo de Velocidade Nula.*** Se o ponto de base $A$ escolhido tiver velocidade nula, a equação da velocidade relativa se torna

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

  Nesse caso, o movimento aparenta ser uma rotação em torno de um eixo instantâneo.

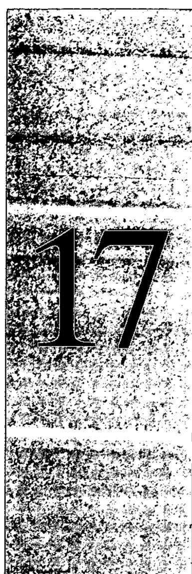
  O centro instantâneo de rotação (*CI*) pode ser estabelecido caso se conheçam as velocidades de dois pontos do corpo. Como a linha radial será sempre perpendicular a cada velocidade, então o *CI* localiza-se no ponto de intersecção dessas duas linhas radiais. Sua localização pode ser calculada pela geometria do corpo. Uma vez estabelecido o *CI*, a velocidade de qualquer ponto $P$ do corpo pode ser determinada considerando-se $v = \omega r$, onde $r$ se estende do *CI* ao ponto $P$.

  ***Movimento Relativo Usando-se um Sistema de Eixos em Rotação.*** Problemas que envolvem corpos ligados que apresentam escorregamento relativo entre si, ou pontos não localizados no mesmo corpo podem ser resolvidos usando-se uma análise de movimento relativo que leva em conta um referencial em rotação. As equações do movimento relativo nesses casos são

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

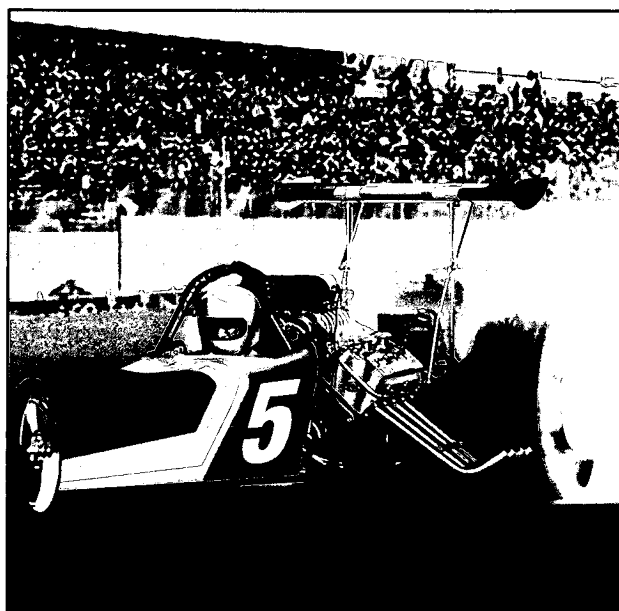
  Em particular, o termo $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ é denominado aceleração de Coriolis.




# Dinâmica do Movimento Plano de um Corpo Rígido: Força e Aceleração

## Objetivos do Capítulo

- Introduzir os métodos usados na determinação do momento de inércia de um corpo.
- Desenvolver as equações dinâmicas do movimento plano para um corpo rígido simétrico.
- Discutir aplicações dessas equações a corpos em translação, em rotação em torno de um eixo fixo e em movimento plano geral.




*As forças agentes neste veículo de competição, quando ele começa a acelerar, são extremamente intensas e devem ser levadas em conta no projeto de sua estrutura.*

## 17.1 Momento de Inércia

Como um corpo tem tamanho e forma definidos, a aplicação de um sistema de forças não concorrentes pode provocar translação e rotação. Os aspectos translacionais do movimento foram estudados no Capítulo 13 e são governados pela equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Mostraremos na Seção 17.2 que os aspectos rotacionais causados por um torque ou momento $\mathbf{M}$ são governados por uma equação da forma $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$. O símbolo $I$ nessa equação é denominado momento de inércia. Por comparação, o *momento de inércia* é uma medida da resistência de um corpo a uma aceleração angular ($\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$), da mesma forma que a massa é uma medida da resistência do corpo a uma aceleração ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

Definimos o *momento de inércia* como a integral do 'segundo momento', em relação a um eixo, de todos os elementos de massa $dm$ que compõem o corpo rígido.[1] Por exemplo, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo $z$, na Figura 17.1, é

[1] Uma outra propriedade do corpo, que mede a simetria da distribuição de massa em relação ao sistema de coordenadas, é o produto de inércia. Essa propriedade aplica-se ao movimento tridimensional de um corpo e será discutida no Capítulo 21.



*O volante no motor deste trator tem um momento de inércia muito grande em relação ao eixo de rotação. Posto em movimento, será difícil pará-lo, evitando assim paradas repentinas do motor e mantendo uma potência constante.*

$$I = \int_m r^2\, dm. \tag{17.1}$$

Nessa equação, o 'braço de momento' $r$ é a distância do elemento de massa arbitrário $dm$ ao eixo $z$. Como a formulação envolve $r$, o valor de $I$ pode ser diferente para cada eixo que se deseja considerar. No estudo da dinâmica do movimento plano, geralmente se escolhe o eixo que passa pelo centro de massa $G$ do corpo e é perpendicular ao plano do movimento. O momento de inércia em relação a esse eixo será representado como $I_G$. Observemos que em virtude de $r$ estar elevado ao quadrado na Equação 17.1, o momento de inércia é sempre uma quantidade *positiva*. As unidades adotadas neste texto para o momento de inércia são $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ (no SI) e $\text{slug}\cdot\text{pés}^2$.

Se o corpo é feito de um material de densidade variável, $\rho = \rho(x, y, z)$, a massa elementar $dm$ pode ser expressa em termos da densidade e do volume, $dm = \rho\, dV$. Substituindo essa expressão na Equação 17.1, o momento de inércia do corpo pode ser calculado usando *elementos* de volume na integração; isto é,

$$I = \int_V r^2 \rho\, dV \tag{17.2}$$

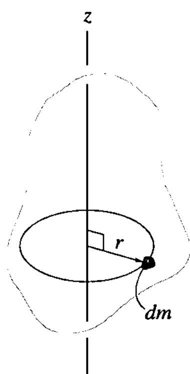



**Figura 17.1**

No caso especial em que a densidade $\rho$ é uma *constante*, esta pode ser retirada do sinal de integração, e a integral passa a ser simplesmente uma função da geometria do corpo.

$$I = \rho \int_V r^2\, dV \tag{17.3}$$

Quando o volume elementar escolhido para a integração tem dimensões infinitesimais nas três dimensões, por exemplo, $dV = dx\, dy\, dz$ (Figura 17.2*a*), o momento de inércia do corpo deve ser determinado por uma 'integral tripla'. Todavia, a integração pode ser simplificada para uma *integral simples* nos casos em que o volume elementar possa ser escolhido de forma a ter tamanho ou espessura infinitesimal em *apenas uma direção*. 'Cascas' e discos elementares são freqüentemente utilizados para esse fim.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Para integração, consideraremos somente corpos simétricos que têm superfícies de revolução, isto é, superfícies geradas pela rotação de uma curva em torno de um eixo. A Figura 17.2*a* mostra um exemplo de corpo gerado em torno do eixo $z$. Dois tipos de elementos diferenciais podem ser escolhidos.

### *'Casca' Elementar*

- Se uma *'casca' elementar* de altura $z$, raio $r = y$ e espessura infinitesimal $dy$ for escolhida para a integração (Figura 17.2*b*), então o volume será $dV = (2\pi y)(z)\, dy$.
- Esse elemento pode ser usado na Equação 17.2 ou na 17.3 para se calcular o momento de inércia $I_z$ do corpo, em relação ao eixo $z$, pois o elemento, *como um todo*, devido à sua 'finura', está à *mesma* distância $r = y$ do eixo $z$ (veja o Exemplo 17.1).

*Disco Elementar*

- Se um disco elementar, com raio $y$ e espessura infinitesimal $dz$, for escolhido para a integração (Figura 17.2c), então o volume será dado por $dV = (\pi y^2)\ dz$.
- Esse elemento é *finito* na direção radial, e, conseqüentemente, suas partes *não* estão todas à *mesma distância* $r$ do eixo $z$. Logo, a Equação 17.2 ou a 17.3 *não* pode ser usada para determinar $I_z$ diretamente. Nesse caso, para se fazer a integração é necessário determinar primeiro o momento de inércia *do elemento* em relação ao eixo $z$ e, então, integrar o resultado (veja o Exemplo 17.2).

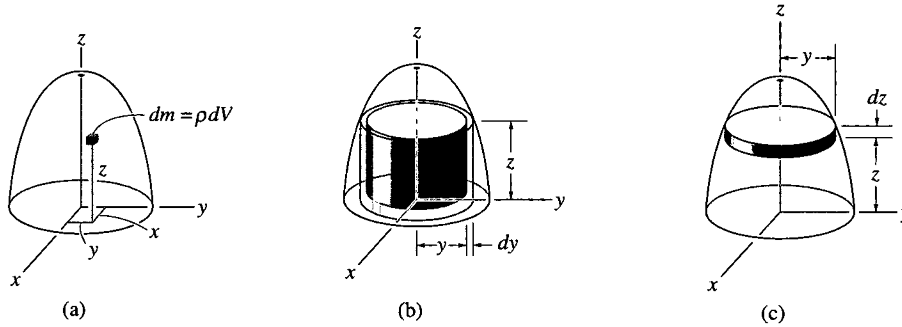



**Figura 17.2**

## EXEMPLO 17.1

Determine o momento de inércia do cilindro mostrado na Figura 17.3a, em relação ao eixo $z$. A densidade $\rho$ do material é constante.

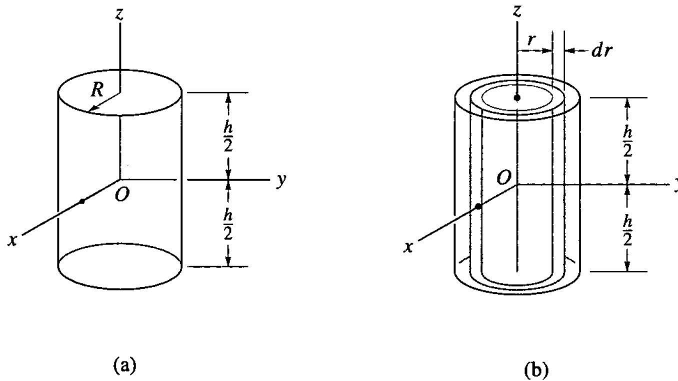



**Figura 17.3**

## SOLUÇÃO

***'Casca' Elementar.*** Este problema pode ser resolvido usando-se a 'casca' elementar mostrada na Figura 17.3b e integração simples. O volume do elemento é $dV = (2\pi r)(h)\ dr$, de forma que sua massa é $dm = \rho\ dV = \rho\ (2\pi hr\ dr)$. Como o *elemento todo* está à mesma distância $r$ do eixo $z$, o momento de inércia *desse elemento* é

$$dI_z = r^2\ dm = \rho 2\pi h r^3\ dr$$

Integrando sobre toda a região do cilindro, obtemos

$$I_z = \int_m r^2\ dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\ dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$$

A massa do cilindro é

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\, dr = \rho\pi h R^2$$

de modo que

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 17.2

Um sólido é formado pela rotação da área cinza-escuro mostrada na Figura 17.4*a* em torno do eixo $y$. Se a densidade do material é 5 slug/pé$^3$, determine o momento de inércia em relação ao eixo $y$.

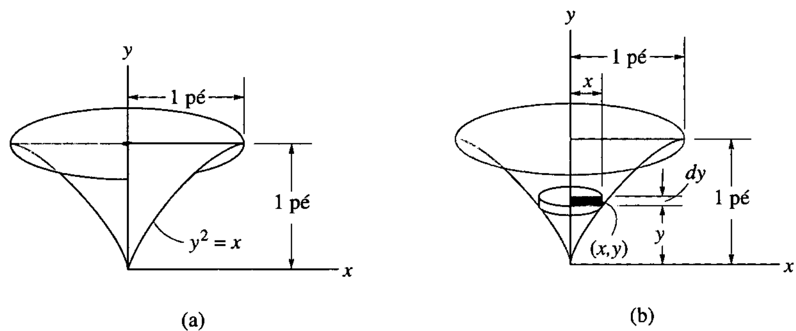



**Figura 17.4**

## SOLUÇÃO

***Disco Elementar.*** O momento de inércia será calculado usando-se um *disco elementar*, como se mostra na Figura 17.4*b*. O elemento corta a curva num ponto $(x, y)$ arbitrário e tem massa

$$dm = \rho\, dV = \rho(\pi x^2)\, dy$$

Embora todas as porções do elemento *não* estejam localizadas à mesma distância do eixo $y$, ainda é possível determinar o momento de inércia $dI_y$ *do elemento* em relação a esse eixo. No exemplo anterior, mostramos que o momento de inércia de um cilindro em relação ao seu eixo longitudinal é $I = \frac{1}{2}mR^2$, onde $m$ e $R$ são a massa e o raio do cilindro. Como a altura do cilindro não está presente nessa fórmula, o cilindro pode ser pensado como um disco. Logo, para o disco elementar mostrado na Figura 17.4*b*, temos

$$dI_y = \tfrac{1}{2}(dm)x^2 = \tfrac{1}{2}[\rho(\pi x^2)\, dy]x^2$$

Substituindo $x = y^2$, $\rho = 5$ slug/pé$^3$ e integrando em relação a $y$, de $y = 0$ a $y = 1$ pé, obtemos o momento de inércia do sólido completo.

$$I_y = \frac{\pi(5)}{2}\int_0^1 x^4\, dy = \frac{\pi(5)}{2}\int_0^1 y^8\, dy = 0{,}873 \text{ slug} \cdot \text{pé}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

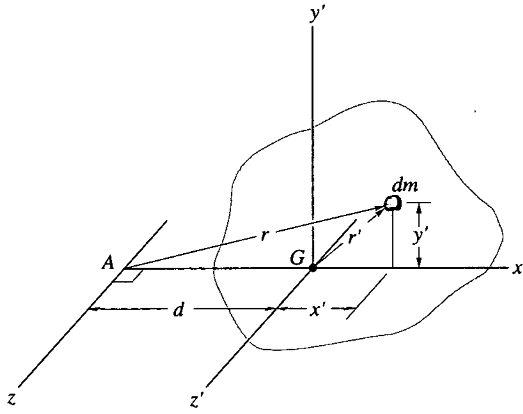



**Figura 17.5**

***Teorema dos Eixos Paralelos.*** Se o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa for conhecido, então o momento de inércia em relação a qualquer outro *eixo paralelo* poderá ser determinado usando-se o *teorema dos eixos paralelos*. Esse teorema pode ser deduzido considerando-se o corpo mostrado na Figura 17.5. O eixo $z'$ passa pelo centro de massa $G$, enquanto o correspondente *eixo z paralelo* está a uma distância $d$ do primeiro. Escolhendo um elemento diferencial de massa $dm$, localizado no ponto $(x', y')$, e usando o teorema de Pitágoras, $r^2 = (d + x')^2 + y'^2$, podemos expressar o momento de inércia do corpo em relação ao eixo $z$ como

$$I = \int_m r^2\, dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\, dm$$

$$= \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d\int_m x'dm + d^2\int_m dm$$

Como $r'^2 = x'^2 + y'^2$, a primeira integral representa $I_G$. A segunda integral é *nula*, pois o eixo $z'$ passa pelo centro de massa do corpo, isto é, $\int x'dm = \bar{x}'\int dm = 0$, já que $\bar{x}' = 0$. Finalmente, a terceira integral representa a massa total $m$ do corpo. Logo, o momento de inércia em relação ao eixo $z$ pode ser escrito como

$$\boxed{I = I_G + md^2} \qquad (17.4)$$

onde

$I_G$ = momento de inércia em relação ao eixo $z'$ que passa pelo centro de massa $G$

$m$ = massa do corpo

$d$ = distância entre os eixos paralelos $z$ e $z'$

***Raio de Giração.*** Alguns manuais fornecem o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo especificado em termos de uma quantidade denominada *raio de giração*. Essa quantidade tem unidades de comprimento. Conhecidos o raio de giração, $k$, em relação a um dado eixo, e a massa $m$ do corpo, o momento de inércia correspondente é determinado pela equação

$$\boxed{I = mk^2 \quad \text{ou} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}}} \qquad (17.5)$$

Observemos a *semelhança* entre a definição de $k$ nessa fórmula e $r$ na equação $dI = r^2\, dm$, que define o momento de inércia de uma massa elementar $dm$ de um corpo, em relação a um dado eixo.

*Corpos compostos.* Se um corpo for constituído de um dado número de 'formas' (como discos, esferas, barras), o seu momento de inércia em relação a um eixo $z$ poderá ser determinado pela soma *algébrica* dos momentos de inércia das 'formas constituintes' em relação ao dado eixo $z$. A adição algébrica é necessária, pois uma parte constituinte deve ser tomada como uma quantidade negativa caso ela já tenha sido contada como um pedaço de outra parte — por exemplo, um 'furo' subtraído de uma placa sólida. O teorema dos eixos paralelos será necessário para os cálculos se o centro de massa de cada componente não pertencer ao eixo $z$. Para o cálculo, então, $I = \Sigma(I_G + md^2)$. Nessa equação $I_G$ deverá ser calculado por integração ou ser obtido de uma tabela, como aquela fornecida no final deste livro.

## EXEMPLO 17.3

Se a placa mostrada na Figura 17.6*a* tem densidade de 8.000 kg/m$^3$ e espessura de 10 mm, determine seu momento de inércia em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura e passando por $O$.

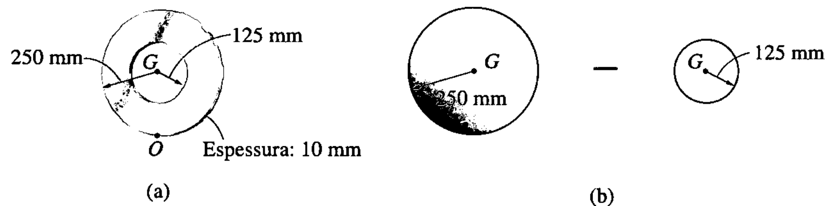



**Figura 17.6**

### SOLUÇÃO

Consideremos a placa como um disco de 250 mm de raio *menos* um disco de 125 mm de raio (Figura 17.6*b*). O momento de inércia em relação a $O$ pode ser determinado calculando-se o momento de inércia de cada um desses discos em relação a $O$ e, a seguir, somando-se *algebricamente* os resultados. Para os cálculos usaremos o teorema dos eixos paralelos e o dado fornecido na tabela do final do livro.

***Disco.*** O momento de inércia de um disco em relação ao eixo que passa pelo centróide e é perpendicular ao plano do disco é $I_G = \frac{1}{2}mr^2$. O centro de massa do disco está a uma distância de 0,25 m do ponto $O$, logo

$$m_d = \rho_d V_d = 8.000 \text{ kg/m}^3[\pi(0{,}25 \text{ m})^2(0{,}01 \text{ m})] = 15{,}71 \text{ kg}$$

$$(I_d)_O = \tfrac{1}{2}m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \frac{1}{2}(15{,}71 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2 + (15{,}71 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2$$

$$= 1{,}473 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

***Orifício.*** Para o disco de 125 mm de raio (orifício), temos

$$m_h = \rho_h V_h = 8.000 \text{ kg/m}^3[\pi(0{,}125 \text{ m})^2(0{,}01 \text{ m})] = 3{,}93 \text{ kg}$$

$$(I_h)_O = \tfrac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \frac{1}{2}(3{,}93\text{ kg})(0{,}125\text{ m})^2 + (3{,}93\text{ kg})(0{,}25\text{ m})^2$$

$$= 0{,}276\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

O momento de inércia da placa em relação ao ponto $O$ é, portanto

$$I_O = (I_d)_O - (I_h)_O$$

$$= 1{,}473\text{ kg}\cdot\text{m}^2 - 0{,}276\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$= 1{,}20\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 17.4

O pêndulo mostrado na Figura 17.7 está suspenso pelo ponto $O$ e consiste em duas barras, cada uma com 10 lb. Determine o momento de inércia do pêndulo em relação a um eixo que é perpendicular ao 'T' e passa (a) pelo pino $O$ e (b) pelo seu centro de massa $G$.

### SOLUÇÃO

***Parte (a).*** Usando a tabela que consta no final do livro, encontramos para o momento de inércia da barra $OA$, em relação a um eixo perpendicular ao plano da figura e passando pela extremidade $O$, a expressão $I_O = \frac{1}{3}ml^2$. Logo,

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(2\text{ ft})^2 = 0{,}414\text{ slug}\cdot\text{pés}^2$$

Obtemos esse mesmo resultado usando $I_G = \frac{1}{12}ml^2$ e o teorema dos eixos paralelos.

$$(I_{OA})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(2\text{ pés})^2 + \left(\frac{10\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(1\text{ pé})^2$$

$$= 0{,}414\text{ slug}\cdot\text{pés}^2$$

Para a barra $BC$ temos

$$(I_{BC})_O = \frac{1}{12}ml^2 + md^2 = \frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(2\text{ pés})^2 + \left(\frac{10\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(2\text{ pés})^2$$

$$= 1{,}346\text{ slug}\cdot\text{pé}^2$$

O momento de inércia do pêndulo é, portanto,

$$I_O = 0{,}414 + 1{,}346 = 1{,}76\text{ slug}\cdot\text{pé}^2$$ ***Resposta***

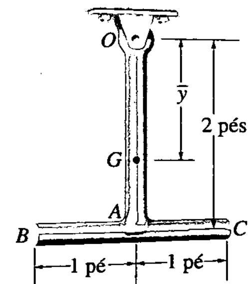



**Figura 17.7**

***Parte (b).*** Localizemos o centro de massa $G$ relativamente a $O$. Representando por $\bar{y}$ a distância entre $G$ e $O$ (Figura 17.7) e usando a fórmula para a determinação do centro de massa, temos

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\tilde{y}m}{\Sigma m} = \frac{1(10/32{,}2) + 2(10/32{,}2)}{(10/32{,}2) + (10/32{,}2)} = 1{,}50\text{ pé}$$

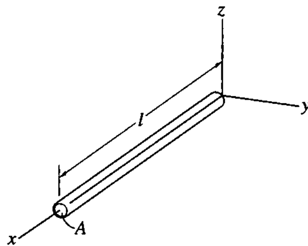
O momento de inércia $I_G$ pode ser calculado da mesma maneira que $I_O$, o que exige aplicações sucessivas do teorema dos eixos paralelos para transferir os momentos de inércia das barras $OA$ e $BC$ para $G$. Uma solução mais direta consiste em usar o resultado já obtido para $I_O$:

$$I_O = I_G + md^2; \qquad 1{,}76 \text{ slug}\cdot\text{pé}^2 = I_G + \left(\frac{20 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(1{,}50 \text{ pé})^2$$

$$I_G = 0{,}362 \text{ slug}\cdot\text{pé}^2$$ ***Resposta***

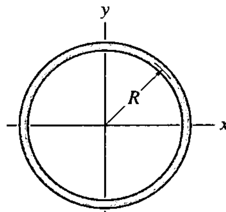
## PROBLEMAS

**17.1.** Determine o momento de inércia $I_y$ para a barra delgada. A densidade $\rho$ e a área da seção transversal da barra são constantes. Expresse o resultado em termos da massa total $m$ da barra.



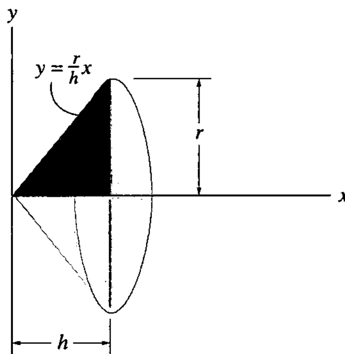

**Problema 17.1**

**17.2.** Determine o momento de inércia do anel fino, de massa $m$, em relação ao eixo $z$.



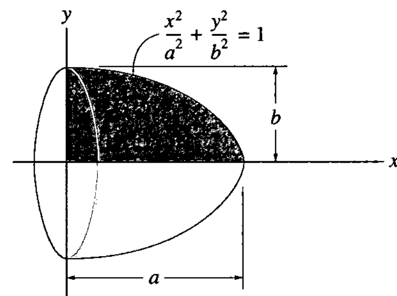

**Problema 17.2**

**17.3.** O cone circular reto é formado pela revolução, em torno do eixo $x$, da área cinza-escuro. Determine o momento de inércia $I_x$ e expresse o resultado em termos da massa total $m$ do cone. Considere que o cone tem densidade constante $\rho$.



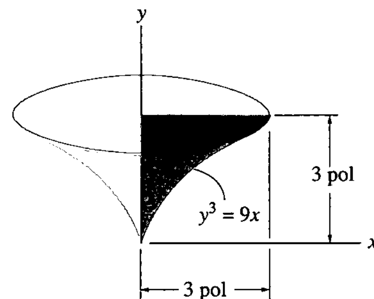

**Problema 17.3**

***17.4.** Um semi-elipsóide é formado girando-se a área cinza-escuro em torno do eixo $x$. Determine o momento de inércia do sólido em relação ao eixo $x$ e expresse o resultado em termos de sua massa $m$. Considere que o material tem densidade constante $\rho$.



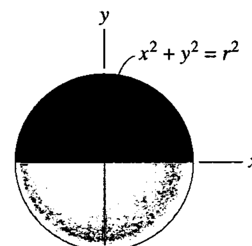

**Problema 17.4**

**17.5.** O sólido mostrado na figura é formado pela revolução da área cinza-escuro ao redor do eixo $y$. Determine o raio de giração $k_y$. O peso específico do material é $\gamma = 380$ lb/pé³.



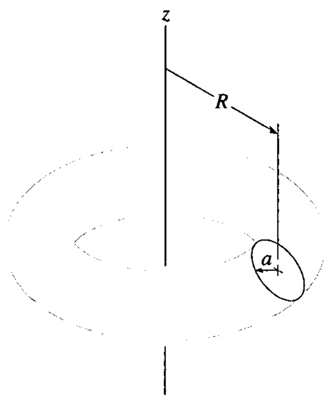

**Problema 17.5**

**17.6.** Forma-se uma esfera girando-se a área cinza-escuro mostrada na figura, em torno do eixo $x$. Determine o momento de inércia $I_x$ e expresse o resultado em termos da massa total $m$ da esfera. Considere que ela tem densidade constante $\rho$.



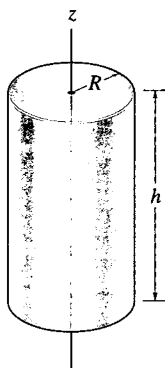

**Problema 17.6**

**17.7.** Determine o momento de inércia $I_z$ do toróide. A massa do toróide é $m$ e a sua densidade $\rho$, constante.



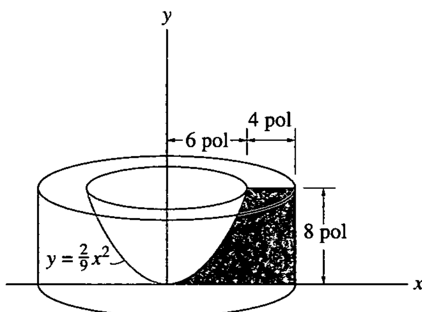

**Problema 17.7**

***17.8.** O cilindro sólido tem raio $R$ e altura $h$. O material de que ele é feito tem uma densidade que varia com a distância $r$ ao centro de acordo com a expressão $\rho = k + a\,r^2$, onde $k$ e $a$ são constantes. Determine a massa do cilindro e seu momento de inércia em relação ao eixo $z$.



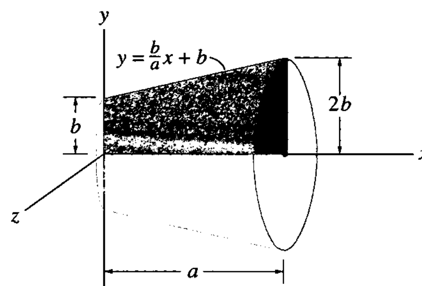

**Problema 17.8**

**17.9.** A peça de concreto é formada pela rotação, em torno do eixo $y$, da área cinza-escuro mostrada na figura. Determine o momento de inércia $I_y$. O peso específico do concreto é $\gamma = 150$ lb/pé$^3$.



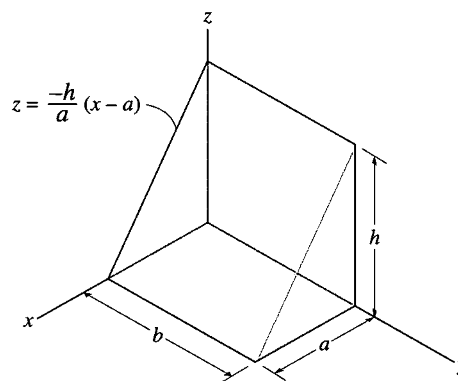

**Problema 17.9**

**17.10.** O tronco de cone é formado girando-se a área cinza-escuro em torno do eixo $x$. Determine o momento de inércia $I_x$ e expresse o resultado em termos da massa total $m$ do tronco, cuja densidade é constante.



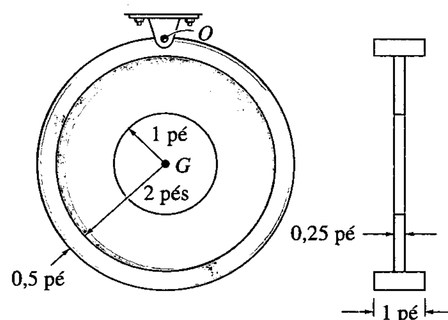

**Problema 17.10**

**17.11.** Determine o momento de inércia do prisma triangular homogêneo, em relação ao eixo $y$. Expresse o resultado em termos da massa $m$ desse prisma. *Dica:* na integração, use placas elementares paralelas ao plano $x$–$y$, com espessura infinitesimal $dz$.




**Problema 17.11**

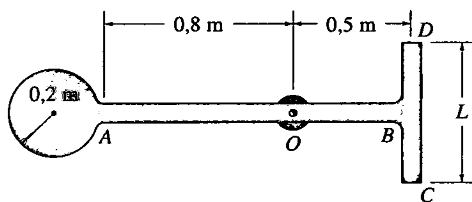
***17.12.** Determine o momento de inércia da peça mostrada na figura, em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa pelo ponto $O$. O material tem peso específico $\gamma = 90$ lb/pé$^3$.




**Problema 17.12**

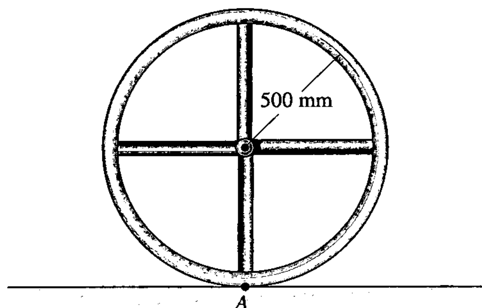
**17.13.** A peça consiste num disco de 6 kg e barras delgadas $AB$ e $DC$ de massas iguais a 2 kg/m. Determine o comprimento $L$ que a barra $DC$ deve ter para que o centro de massa coincida com o ponto $O$. Qual é o momento de inércia da peça em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa por $O$? Suponha que as barras e o disco são homogêneos.

**17.14.** O sistema consiste num disco de 6 kg e duas barras delgadas $AB$ e $DC$, cada uma com 2 kg/m. Se $L$ = 0,75 m, determine o momento de inércia do sistema em relação ao eixo que é perpendicular à página e passa por $O$. Suponha que as barras e o disco são homogêneos.



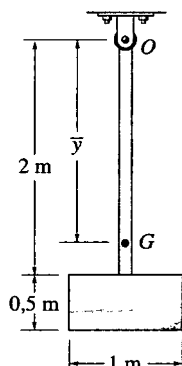

**Problemas 17.13/14**

**17.15.** A roda consiste num anel fino de 10 kg e quatro raios feitos de barras delgadas, cada uma com 2 kg. Determine o momento de inércia da roda em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa pelo ponto $A$. Suponha que as barras e o anel são homogêneos.



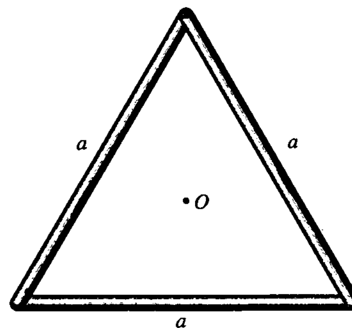

**Problema 17.15**

***17.16.** O pêndulo consiste numa barra delgada de 3 kg e uma placa fina de 5 kg. Determine a localização $\bar{y}$ do centro de massa $G$ do pêndulo e então calcule o momento de inércia desse corpo em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa por $G$.



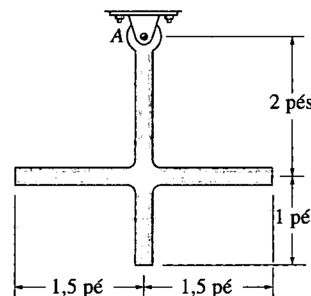

**Problema 17.16**

**17.17.** Cada uma das hastes tem massa $m$. Determine o momento de inércia do sistema em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa pelo centro $O$. Considere o sistema homogêneo.



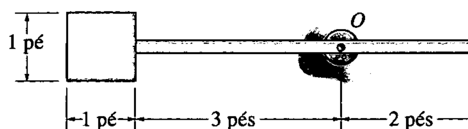

**Problema 17.17**

**17.18.** Cada barra delgada pesa 3 lb/pé. Determine o momento de inércia da peça em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa pelo pino $A$.




**Problema 17.18**

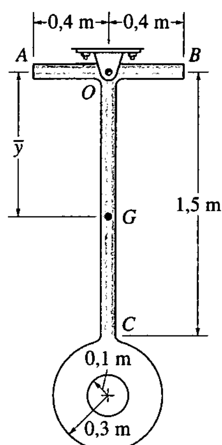
**17.19.** O pêndulo consiste em uma placa de 12 lb e uma barra delgada de 4 lb. Determine o raio de giração do pêndulo em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa pelo ponto $O$. Suponha que a placa e a barra são homogêneas.




**Problema 17.19**

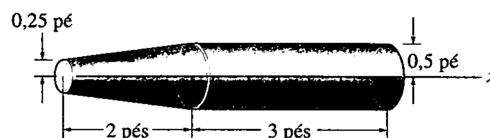
***17.20.** O pêndulo consiste em duas barras delgadas e homogêneas $AB$ e $OC$, cada uma delas com 3 kg/m, e uma placa também homogênea com 12 kg/m$^2$. Determine a posição $\bar{y}$ do centro de massa $G$ do pêndulo e, a seguir, seu momento de inércia em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa por $G$.

**17.21.** O pêndulo consiste em duas barras delgadas e homogêneas *AB* e *OC*, cada uma delas com 3 kg/m e uma placa também homogênea com 12 kg/m². Determine o momento de inércia do pêndulo em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa pelo pino em *O*.



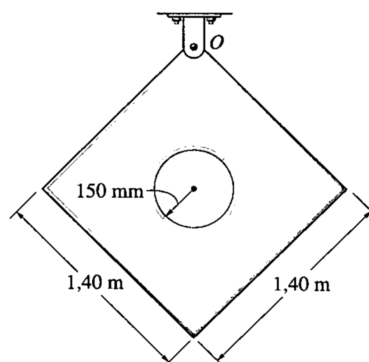

**Problemas 17.20/21**

**17.22.** Determine o momento de inércia da peça de aço maciça, em relação ao eixo *x*. O aço tem peso específico $\gamma_{aço}$ = 490 lb/pé³.




**Problema 17.22**

**17.23.** Determine o momento de inércia em relação a um eixo que é perpendicular à página e passa pelo pino em *O*. A placa fina tem um furo central e espessura de 50 mm. O material tem densidade $\rho$ = 50 kg/m³.




**Problema 17.23**

# 17.2 EQUAÇÕES DINÂMICAS DO MOVIMENTO PLANO

Na análise que se segue, limitaremos nosso estudo à dinâmica do movimento plano de corpos rígidos que, juntamente com suas cargas, são considerados *simétricos* em relação a um plano de referência fixo.[2] Nesse caso, a trajetória de cada ponto do corpo é uma curva plana paralela ao plano de referência. Como o movimento do corpo pode ser visto no plano de referência, todas as forças (e momentos de binário) agindo nesse corpo podem ser projetadas sobre esse plano. Um exemplo desse tipo de corpo rígido pode ser visto na Figura 17.8*a*. Nesse exemplo, a origem do *referencial inercial x, y, z* coincide com um ponto *P* arbitrariamente escolhido no corpo. Por definição, *esses eixos são fixos ou transladam com velocidade constante, portanto, não giram.*

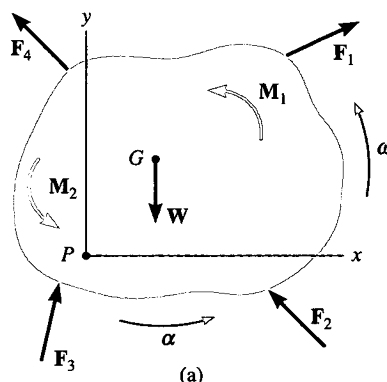



**Figura 17.8**

[2] Quando consideramos essa situação, verificamos que a equação do movimento de rotação reduz-se a uma forma bastante simples. O caso de forma do corpo e carga mais geral é considerado no Capítulo 21.

***Equação do Movimento de Translação.*** As forças externas agindo no corpo mostrado na Figura 17.8*a* representam o efeito gravitacional, elétrico, magnético ou forças de contato entre corpos adjacentes. Como esse sistema de forças foi considerado anteriormente na Seção 13.3 para a análise de um sistema de pontos materiais, a Equação 13.6 pode ser aqui utilizada:

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

Essa equação será referida de agora em diante como a *equação do movimento de translação* para o centro de massa de um corpo rígido. De acordo com essa equação, *a soma de todas as forças externas agindo no corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração de seu centro de massa G.*

Para o movimento de um corpo no plano $x$–$y$, a equação do movimento de translação pode ser escrita na forma de duas equações escalares:

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

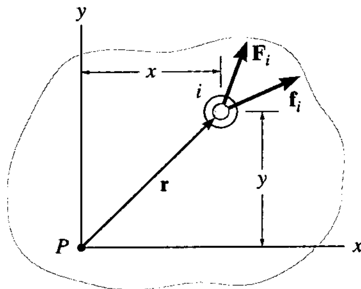



Diagrama de corpo livre para o ponto material

(b)

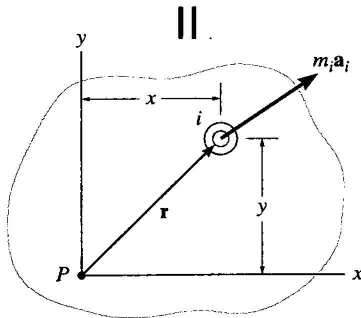
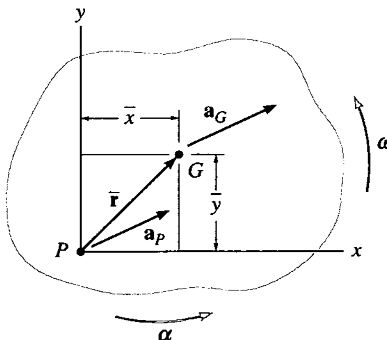



Diagrama dinâmico do ponto material

(c)




(d)

**Figura 17.8**

***Equação do Movimento de Rotação.*** Determinaremos agora os efeitos causados pelos torques do sistema de forças externas calculados em relação a um eixo que é perpendicular ao plano do movimento (eixo $z$) e passa pelo ponto $P$. Como mostrado no diagrama de corpo livre do $i$-ésimo ponto material (Figura 17.8*b*), $\mathbf{F}_i$ representa a *resultante das forças externas* agentes no ponto material e $\mathbf{f}_i$, a *resultante das forças internas* causadas pelas interações com os outros pontos do corpo (em geral, os outros pontos em interação são adjacentes ao $i$-ésimo ponto). Se um ponto material tem massa $m_i$ e num dado instante sua aceleração é $\mathbf{a}_i$, então o diagrama dinâmico deve ser construído como indicado na Figura 17.8*c*. Somando os torques (em relação ao ponto $P$) das forças agindo no ponto material, temos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

ou

$$(\mathbf{M}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

Os torques (ou momentos) em relação ao ponto $P$ podem ser expressos em termos da aceleração de $P$ (Figura 17.8*d*). Se o corpo tem uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ e uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, então, pelo uso da Equação 16.18, temos

$$(\mathbf{M}_P)_i = m_i\mathbf{r} \times (\mathbf{a}_P + \alpha \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r})$$
$$= m_i[\mathbf{r} \times \mathbf{a}_P + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \omega^2(\mathbf{r} \times \mathbf{r})]$$

O último termo é nulo, pois $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Expressando os vetores em componentes cartesianos e efetuando as operações de produto vetorial, obtemos

$$(M_P)_i\mathbf{k} = m_i\{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j}] + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [\alpha\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]\}$$

$$(M_P)_i\mathbf{k} = m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha x^2 + \alpha y^2]\mathbf{k}$$

$$\circlearrowleft (M_P)_i = m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha r^2]$$

Fazendo $m_i \rightarrow dm$ e integrando sobre a massa total $m$ do corpo, obtemos a seguinte equação para o torque resultante

$$\circlearrowright\Sigma M_P = -\left(\int_m y\,dm\right)(a_P)_x + \left(\int_m x\,dm\right)(a_P)_y + \left(\int_m r^2\,dm\right)\alpha$$

Nessa equação, $\Sigma M_P$ representa somente o torque das *forças externas* agindo no corpo, em relação ao ponto $P$. O torque resultante das forças internas é nulo, pois o conjunto completo de todas essas forças ocorre aos pares de forças de mesmo módulo, colineares e de sentidos opostos, por isso o torque de cada par, em relação ao ponto $P$, se cancela. As integrais no primeiro e segundo termos no segundo membro dessa equação são usadas para localizar o centro de massa $G$, relativamente a $P$, pois $\bar{y}m = \int y\,dm$ e $\bar{x}m = \int x\,dm$ (Figura 17.8*d*). Além disso, a última integral representa o momento de inércia calculado em relação ao eixo $z$, isto é, $I_P = \int r^2 dm$. Assim,

$$\circlearrowright\Sigma M_P = -\bar{y}m(a_P)_x + \bar{x}m(a_P)_y + I_P\alpha \qquad (17.6)$$

É possível reduzir essa equação a uma forma mais simples se o ponto $P$ coincide com o centro de massa $G$ do corpo. Nesse caso, $\bar{x} = \bar{y} = 0$ e, portanto,[3]

$$\boxed{\Sigma M_G = I_G\alpha} \qquad (17.7)$$

*De acordo com essa equação do movimento de rotação, a soma dos torques de todas as forças externas calculados em relação ao centro de massa G é igual ao produto do momento de inércia do corpo, em relação a um eixo que passa por G, pela aceleração angular desse corpo.*

A Equação 17.6 também pode ser reescrita em termos dos componentes $x$ e $y$ de $\mathbf{a}_G$ e do momento de inércia $I_G$ do corpo. Se o ponto $G$ estiver localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ (Figura 17.8*d*), pelo teorema dos eixos paralelos, $I_p = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$. Substituindo esse resultado na Equação 17.6 e rearranjando os termos, temos

$$\circlearrowright\Sigma M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha \qquad (17.8)$$

Do diagrama cinemático na Figura 17.8*d*, a aceleração $\mathbf{a}_P$ pode ser expressa em termos de $\mathbf{a}_G$ como

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{r}} - \omega^2\bar{\mathbf{r}}$$

$$(a_G)_x\mathbf{i} + (a_G)_y\mathbf{j} = (a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j}) - \omega^2(\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

Efetuando o produto vetorial e igualando os respectivos componentes $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, obtemos

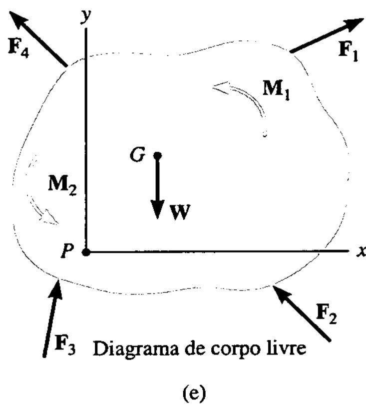
$$(a_G)_x = (a_P)_x - \bar{y}\alpha - \bar{x}\omega^2$$

$$(a_G)_y = (a_P)_y + \bar{x}\alpha - \bar{y}\omega^2$$

Dessas equações, $[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] = [-(a_G)_x - \bar{x}\omega^2]$ e $[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] = [(a_G)_y + \bar{y}\omega^2]$. Substituindo-se esses resultados na Equação 17.8 e simplificando, temos

$$\circlearrowright\Sigma M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha \qquad (17.9)$$

[3] A equação também se reduz a essa mesma forma simples $\Sigma M_P = I_P\alpha$ se $P$ é um *ponto fixo* (veja a Equação 17.16) ou sua aceleração tem a direção da reta $PG$.



(e)

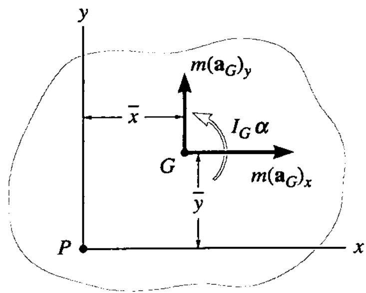


Diagrama dinâmico

(f)

**Figura 17.8**

*Esse resultado importante indica que quando os momentos das forças externas em relação ao ponto P (veja o diagrama de corpo livre) são somados (Figura 17.8e), eles se tornam equivalentes à soma dos 'momentos dinâmicos' dos componentes de* $m\mathbf{a}_G$ *em relação a P com o 'momento dinâmico' de* $I_G\alpha$ *(Figura 17.8f)*. Em outras palavras, quando os 'momentos dinâmicos', $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ , são calculados (Figura 17.8*f*), os vetores $m(\mathbf{a}_G)_x$ e $m(\mathbf{a}_G)_y$ são tratados como vetores deslizantes; isto é, eles podem ser deslocados *para qualquer ponto da reta definidora de sua direção*. De maneira semelhante, $I_G\boldsymbol{\alpha}$ pode ser tratado como um vetor livre e pode ser deslocado para *qualquer ponto*. *É importante ter em mente que* $m\mathbf{a}_G$ *e* $I_G\boldsymbol{\alpha}$ *não são de mesma natureza que uma força ou um momento. Eles são apenas efeitos das forças e momentos de binário agindo no corpo*. Com isso em mente, podemos reescrever a Equação 17.9 numa forma mais geral:

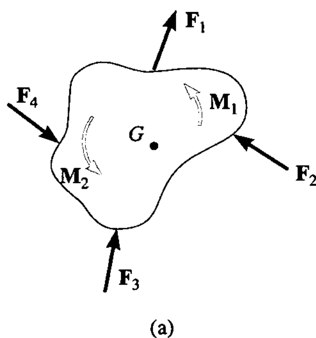
$$\boxed{\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P} \qquad (17.10)$$

***Aplicação Geral das Equações de Movimento.*** Para resumir a análise, podemos escrever *três* equações escalares que descrevem o movimento plano geral de um corpo rígido simétrico:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha \quad \text{ou} \quad \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \end{aligned} \qquad (17.11)$$

Ao aplicarmos essas equações, devemos *sempre* construir um diagrama de corpo livre (Figura 17.8*e*), para levar em conta os termos envolvidos em $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma M_G$ ou $\Sigma M_P$. Em alguns problemas, também pode ser útil desenhar o diagrama dinâmico para o corpo. Esse diagrama mostra graficamente os termos $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ e é especialmente conveniente quando usado na determinação dos componentes de $m\mathbf{a}_G$ e os termos de momento em $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.[4]

## 17.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO: TRANSLAÇÃO



(a)

**Figura 17.9**

Quando um corpo rígido tem um movimento de translação (Figura 17.9*a*), todos os pontos do corpo têm a mesma aceleração, de modo que $\mathbf{a}_G = \mathbf{a}$. Além disso, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, logo a equação do movimento de rotação aplicada para o ponto $G$ reduz-se à forma simplificada $\Sigma M_G = 0$. Discutiremos agora a aplicação dessa equação e das equações do movimento de translação para cada um dos dois tipos de translação.

***Translação Retilínea.*** Quando um corpo tem movimento de *translação retilínea*, todos os seus pontos (placa) movem-se em trajetórias retilíneas paralelas. A Figura 17.9*b* mostra os diagramas de corpo livre e dinâmico para o corpo. As equações de movimento que são aplicadas nesse caso são

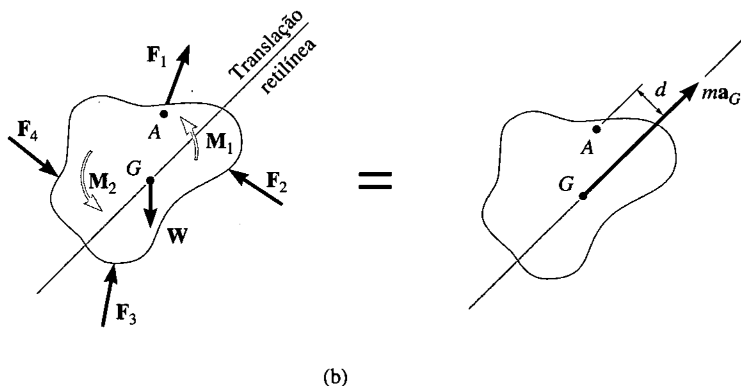
$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= 0 \end{aligned}} \qquad (17.12)$$

[4] Por essa razão, o diagrama dinâmico será utilizado na solução de um problema dado como exemplo sempre que se aplicar $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

A última equação exige que seja nula a soma dos torques de todas as forças externas (e torques de binário) calculados em relação ao centro de massa. Naturalmente, é possível somar os momentos em relação a outros pontos do próprio corpo ou fora dele. Nesse caso, o momento de $m\mathbf{a}_G$ deve ser levado em conta. Por exemplo, se escolhermos o ponto $A$ a uma distância $d$ da reta que contém $m\mathbf{a}_G$, então deveremos aplicar a seguinte equação de momento:

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad \Sigma M_A = (ma_G)d$$

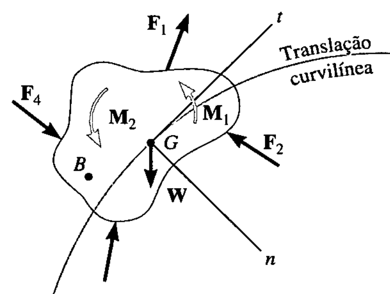
Nessa equação, a soma dos momentos das forças externas e momentos de binário, em relação a $A$ ($\Sigma M_A$, diagrama de corpo livre), é igual ao momento de $m\mathbf{a}_G$ em relação ao mesmo ponto $A$ ($\Sigma(\mathcal{M}_k)_A$, diagrama dinâmico).



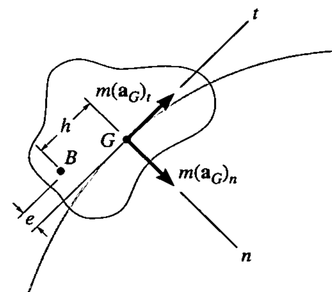

(b)

***Translação Curvilínea.*** Quando um corpo rígido se move em *translação curvilínea*, todos os seus pontos descrevem *trajetórias curvilíneas paralelas*. Para a análise é conveniente em muitos casos usar um sistema inercial com origem coincidente com o centro de massa e eixos orientados nas direções tangencial e normal à trajetória (Figura 17.9*c*). A três equações de movimento escalares são então:

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t \qquad (17.13)$$
$$\Sigma M_G = 0$$




=




(c)

**Figura 17.9**

Nessas equações, $(a_G)_t$ e $(a_G)_n$ representam os módulos dos componentes tangencial e normal da aceleração de $G$, respectivamente.

Se a equação de momento $\Sigma M_G = 0$ for substituída pela soma dos momentos em relação a um ponto arbitrário $B$ (Figura 17.9*c*), será necessário levar em conta os momentos, $\Sigma(\mathcal{M}_k)_B$, dos dois componentes $m(\mathbf{a}_G)_t$ e $m(\mathbf{a}_G)_n$ em relação a esse ponto. Do diagrama dinâmico, $h$ e $e$ representam as distâncias (ou os 'braços de momento') de $B$ às retas que contêm os componentes. As equações de momento tornam-se então

$$\circlearrowright + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \quad \Sigma M_B = e[m(a_G)_t] - h[m(a_G)_n]$$

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Problemas de dinâmica que envolvem a *translação* de um corpo rígido podem ser resolvidos utilizando-se o seguinte procedimento.

### *Diagrama de Corpo Livre*

- Estabeleça um sistema inercial $x$, $y$ ou $n$, $t$ e trace o diagrama de corpo livre levando em conta todas as forças externas e todos os momentos de binário externos agindo no corpo.
- Deve-se estabelecer a direção e o sentido da aceleração $\mathbf{a}_G$ do centro de massa do corpo.
- Identifique as incógnitas do problema.
- Decidindo-se que a equação de movimento de rotação $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ deve ser utilizada na solução, então, construa o diagrama dinâmico, pois nele se representam graficamente os componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$, e $m(\mathbf{a}_G)_t$, $m(\mathbf{a}_G)n_x$, sendo, portanto, conveniente para a 'visualização' dos termos necessários no somatório dos momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

### *Equações de Movimento*

- Aplique as três equações de movimento de acordo com a convenção de sinal adotada.
- Para simplificar a análise, a equação de momento $\Sigma M_G = 0$ pode ser substituída pela equação mais geral $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, onde o ponto $P$ é usualmente localizado na intersecção das retas de ação de tantas forças desconhecidas quanto for possível.
- Se o corpo está em contato com uma *superfície áspera* e ocorre *deslizamento*, use a equação do atrito $F = \mu_c N$. Lembre-se de que $\mathbf{F}$ agindo no corpo tem sentido oposto ao do movimento deste relativamente à superfície de contato.

### *Cinemática*

- Use a cinemática se a velocidade e a posição do corpo tiverem de ser determinadas.
- Para *translação retilínea* com *aceleração variável*, use

$$a_G = dv_G/dt \quad a_G ds_G = v_G dv_G \quad v_G = ds_G/dt$$

- Para *translação retilínea* com *aceleração constante*, use

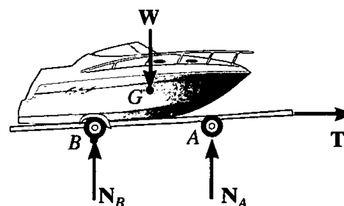
$$v_G = (v_G)_0 + a_G t \qquad v_G^2 = (v_G)_0^2 + 2a_G[s_G - (s_G)_0]$$

$$s_G = (s_G)_0 + (v_G)_0 t + \tfrac{1}{2}a_G t^2$$

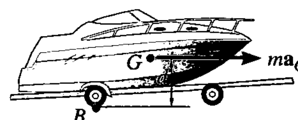
- Para translação curvilínea, use

$$(a_G)_n = v_G^2/\rho = \omega^2\rho,\ (a_G)_t = dv_G/dt,\ (a_G)_t ds_G = v_G dv_G,\ (a_G)_t = \alpha\rho$$





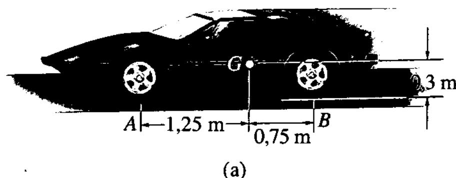

=




*Os diagramas de corpo livre e dinâmico para o barco e o reboque são estabelecidos inicialmente para que se possa aplicar as equações de movimento. As forças no diagrama de corpo livre causam o efeito mostrado no diagrama dinâmico. Ao se somarem os momentos em relação ao centro de massa, G, tem-se $\Sigma M_G = 0$. Entretanto, se os momentos forem somados em relação ao ponto B, então $\curvearrowleft + \Sigma M_B = ma_G(d)$.*

## EXEMPLO 17.5

O carro mostrado na Figura 17.10*a* tem 2 t e centro de massa *G*. Determine a aceleração do carro se as rodas traseiras, de 'tração', estão deslizando, e as dianteiras estão livres. Despreze as massas das rodas. O coeficiente de atrito cinético entre as rodas e o pavimento é $\mu_c = 0{,}25$.



(a)

## SOLUÇÃO I

***Diagrama de Corpo Livre.*** Como mostra a Figura 17.10*b*, a força de atrito $\mathbf{F}_B$ nas rodas traseiras empurra o carro para a frente e, como *ocorre deslizamento*, $F_B = 0{,}25N_B$. As forças de atrito agindo nas rodas dianteiras são nulas, pois essas rodas têm massa nula.[5] Há três incógnitas: $N_A$, $N_B$ e $a_G$. Somemos os momentos em relação ao centro de massa. O carro (ponto *G*) está sendo acelerado para a esquerda, isto é, no sentido negativo de *x* (Figura 17.10*b*).

***Equações de Movimento.***

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad -0{,}25N_B = -(2.000\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A + N_B - 2.000(9{,}81)\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

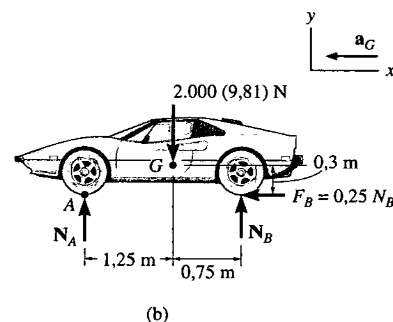
$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad -N_A(1{,}25\text{ m}) - 0{,}25N_B(0{,}3\text{ m}) + N_B(0{,}75\text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

Resolvendo:

$$a_G = 1{,}59\text{ m/s}^2 \leftarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$N_A = 6{,}88\text{ kN}$$

$$N_B = 12{,}7\text{ kN}$$



(b)

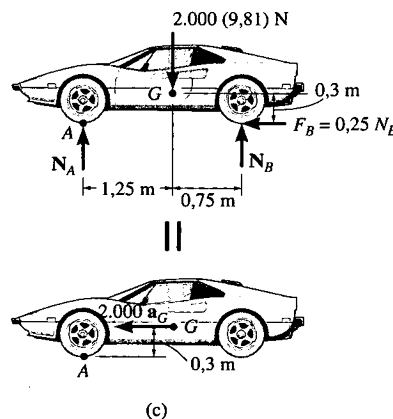
## SOLUÇÃO II

***Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico.*** Se a equação de 'momento' for aplicada em relação ao ponto *A*, a incógnita $N_A$ será eliminada. Para 'visualização' do momento de $m\mathbf{a}_G$ em relação a *A*, incluiremos o diagrama dinâmico como parte da análise (Figura 17.10*c*).

***Equação de Movimento.*** Impomos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \quad N_B(2\text{ m}) - 2.000(9{,}81)\text{ N}(1{,}25\text{ m}) =$$
$$(2.000\text{ kg})a_G(0{,}3\text{ m})$$

Resolvendo essa equação e a Equação 1 para $a_G$ obtemos uma solução mais simples do que aquela obtida das equações 1 a 3.



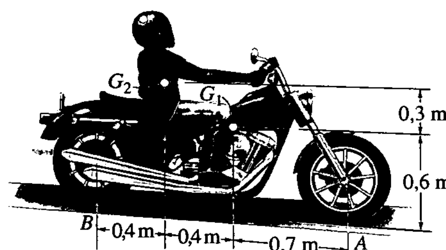
(c)

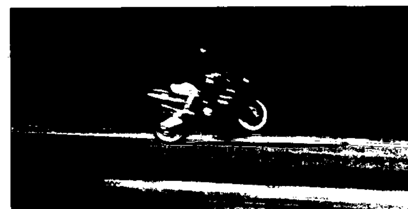
**Figura 17.10**

[5] Com massa desprezível, $I\alpha = 0$ e a força de atrito em *A* necessária para girar a roda é nula. Se as massas das rodas fossem incluídas, a solução do problema seria mais complexa, pois seria necessário considerar uma análise para um movimento plano geral (veja a Seção 17.5).

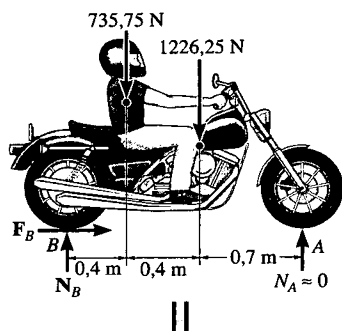
## EXEMPLO 17.6

A motocicleta mostrada na Figura 17.11*a* tem uma massa de 125 kg e um centro de massa em $G_1$. O motociclista tem uma massa de 60 kg e um centro de massa em $G_2$. Determine o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre as rodas e o pavimento para que o motociclista faça a moto 'empinar' como se pode ver na foto. Qual deve ser a aceleração necessária? Despreze as massas das rodas e suponha que a roda dianteira pode rolar livremente.

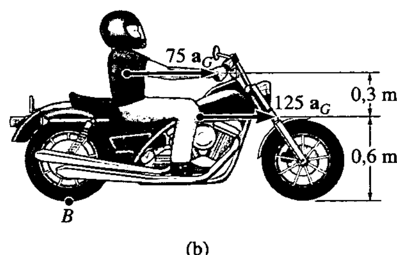


(a)




=




(b)

**Figura 17.11**

### SOLUÇÃO

***Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico.*** Consideraremos o motociclista e a moto como o 'sistema' a ser analisado. É possível determinar primeiro a posição do centro de massa para o 'sistema' por meio das equações $\bar{x} = \Sigma\tilde{x}m/\Sigma m$ e $\bar{y} = \Sigma\tilde{y}m/\Sigma m$. Todavia, consideraremos em separado o peso e a massa de cada uma das partes *componentes*, como se mostra nos diagramas de corpo livre e dinâmico (Figura 17.11*b*). Ambas as partes movem-se com a mesma aceleração e devemos supor que a roda dianteira está na iminência de perder o contato com o pavimento, de forma que a reação normal $N_A \approx 0$. As três incógnitas do problema são $N_B$, $F_B$ e $a_G$.

***Equações de Movimento.***

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_B = (75\text{ kg} + 125\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_B - 735{,}75\text{ N} - 1226{,}25\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \quad -(735{,}75\text{ N})(0{,}4\text{ m}) - (1226{,}25\text{ N})(0{,}8\text{ m}) = -(75\text{ kg } a_G)(0{,}9\text{ m}) - (125\text{ kg } a_G)(0{,}6\text{ m})$$

Resolvendo

$$a_G = 8{,}95\text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$

$$N_B = 1.962\text{ N}$$

$$F_B = 1.790\text{ N}$$

Assim, o valor mínimo do coeficiente de atrito estático é

$$(\mu_e)_{\text{mín}} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{1.790\text{ N}}{1.962\text{ N}} = 0{,}912 \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 17.7

Uma caixa uniforme de 50 kg apóia-se numa superfície horizontal para a qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}2$. Determine a aceleração da caixa se uma força $P = 600$ N está sendo aplicada na caixa, como mostrado na Figura 17.12*a*.

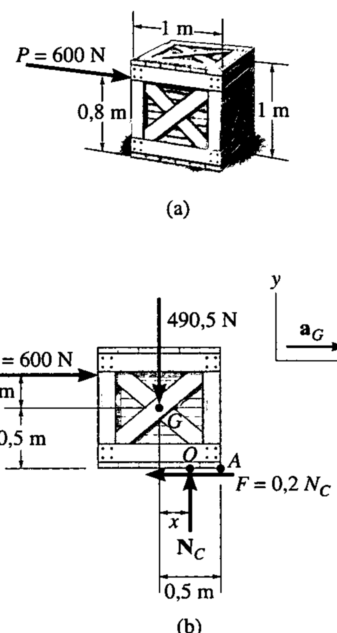


**Figura 17.12**

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** A força **P** pode fazer a caixa deslizar ou tombar. Como mostrado na Figura 17.12*b*, supõe-se que a caixa desliza, de modo que $F = \mu_c N_C = 0{,}2\, N_C$. Além disso, a força normal resultante $N_C$ age em $O$, que dista $x$ (onde $0 < x \leq 0{,}5$ m) da linha central da caixa.[6] As três incógnitas são $N_C$, $x$ e $a_G$.

***Equações de Movimento.***

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 600\text{ N} - 0{,}2N_C = (50\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_C - 490{,}5\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = 0; \qquad -600\text{ N}(0{,}3\text{ m}) + N_C(x) - 0{,}2N_C(0{,}5\text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

Resolvendo, obtemos

$$N_C = 490\text{ N}$$

$$x = 0{,}467\text{ m}$$

$$a_G = 10{,}0\text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$

Como $x = 0,476$ m $< 0{,}5$ m, a caixa, de fato, escorrega, como suposto inicialmente. Se a solução tivesse fornecido um valor de $x > 0{,}5$ m, o problema teria de ser refeito, partindo-se da hipótese de que ocorreria o tombamento. Nesse caso, $N_C$ agiria no *vértice A* e $F \leq 0{,}2N_C$.

## EXEMPLO 17.8

A viga horizontal *BD* mostrada na Figura 17.13*a* é sustentada por duas barras de massas desprezíveis. Determine a força gerada em cada barra no instante em que $\theta = 30°$ e $\omega = 6$ rad/s.

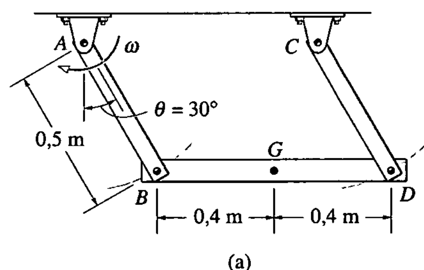


**Figura 17.13**

[6] A reta da ação de $\mathbf{N}_C$ não passa necessariamente pelo centro de massa $G$ ($x = 0$), pois $\mathbf{N}_C$ deve se opor à tendência de tombamento causada por $P$. Veja a Seção 8.1 do livro *Estática: Mecânica para Engenharia 10/E*.

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** A viga tem movimento de *translação curvilínea*, pois os pontos $B$ e $D$ e o centro de massa $G$ movem-se ao longo de trajetórias circulares de mesmo raio (igual a 0,5 m). A Figura 17.13*b* mostra o diagrama de corpo livre para a viga, usando-se coordenadas tangencial e normal. Por causa da *translação*, $G$ tem o *mesmo* movimento do pino $B$, que está unindo a barra à viga. Estudando o movimento de rotação da barra $AB$ (Figura 17.13*c*), observemos que o componente tangencial da aceleração aponta para baixo e para a esquerda, devido ao sentido anti-horário de $\boldsymbol{\alpha}$. Além disso, o componente normal da aceleração está *sempre* voltado para o centro de curvatura (aponta para $A$). Como a velocidade angular de $AB$ é de 6 rad/s, então

$$(a_G)_n = \omega^2 r = (6\text{ rad/s})^2(0{,}5\text{ m}) = 18\text{ m/s}^2$$

As três incógnitas são $T_B$, $T_D$ e $(a_G)_t$. Os sentidos de $(\mathbf{a}_G)_n$ e $(\mathbf{a}_G)_t$ foram estabelecidos e estão indicados nos eixos coordenados.

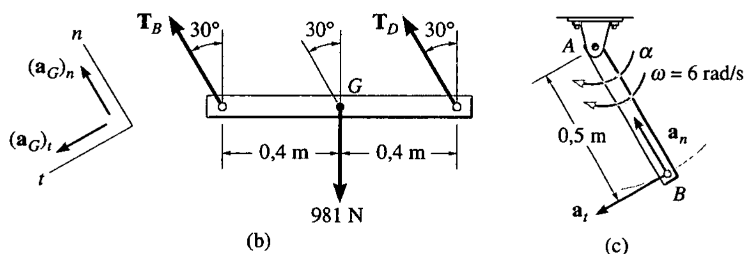



**Figura 17.13**

***Equações de Movimento.***

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad T_B + T_D - 981\cos 30°\text{ N} = 100\text{ kg}(18\text{ m/s}^2) \qquad (1)$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m(a_G)_t; \quad 981\text{ sen }30° = 100\text{ kg}(a_G)_t \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \quad -(T_B\cos 30°)(0{,}4\text{ m}) + (T_D\cos 30°)(0{,}4\text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

A solução do sistema dessas equações nos fornece

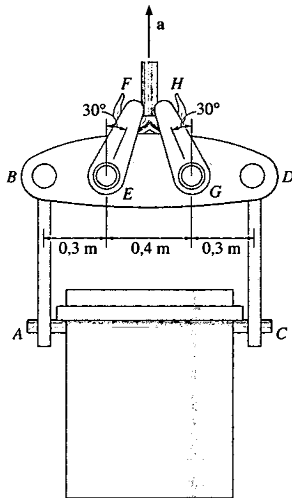
$$T_B = T_D = 1{,}32\text{ kN} \nwarrow^{30°} \qquad \textit{Resposta}$$

$$(a_G)_t = 4{,}90\text{ m/s}^2$$

## PROBLEMAS

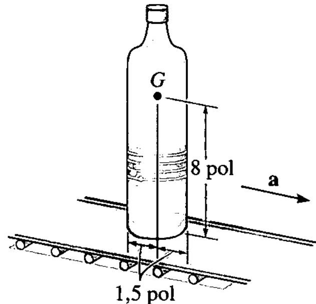
***17.24.** O recipiente de 4 t contém rejeito nuclear encerrado em concreto. Se a massa da viga larga $BD$ é 50 kg, determine a força em cada elemento de ligação $AB$, $CD$, $EF$ e $GH$, quando o sistema é levantado com uma aceleração $a = 2$ m/s$^2$ durante um pequeno intervalo de tempo.

**17.25.** Agora determine a aceleração vertical máxima $\mathbf{a}$ do sistema de forma que os elementos de ligação $AB$ e $CD$ fiquem submetidos a forças de no máximo 30 kN e os elementos $EF$ e $GH$, a forças de no máximo 34 kN.




Problemas 17.24/25

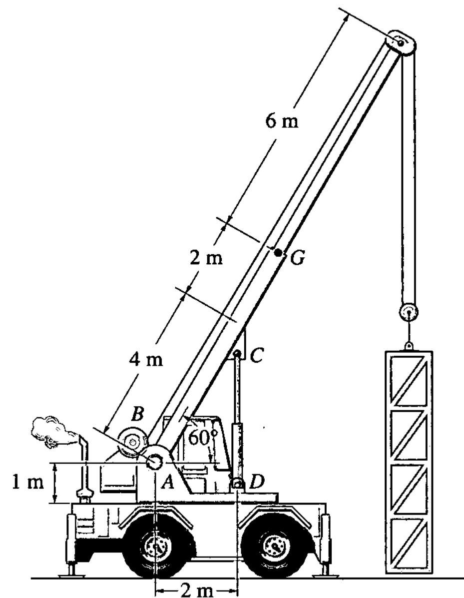
**17.26.** A garrafa de 2 lb apóia-se na esteira de uma caixa de supermercado. Se o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0{,}2$, determine a aceleração máxima que a esteira transportadora pode ter sem que haja escorregamento ou tombamento da garrafa. O centro de massa da garrafa é $G$.



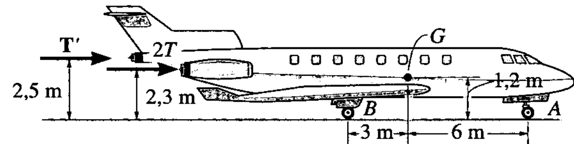

Problema 17.26

**17.27.** A estrutura tem massa de 8 t e está sendo elevada pelo sistema de pau-de-carga e polia. Se o guincho em $B$ enrola o cabo com uma aceleração de 2 m/s$^2$, determine a força de compressão no cilindro hidráulico necessária para suportar o pau-de-carga que tem massa de 2 t e centro de massa $G$.

***17.28.** O jato tem massa total de 22 t e centro de massa em $G$. No início da decolagem, os motores fornecem empuxos $2T = 4$ kN e $T' = 1{,}5$ kN. Determine a aceleração do avião e as reações normais na roda dianteira e em cada uma das *duas* rodas nas asas localizadas em $B$. Despreze a massa das rodas e, devido à baixa velocidade, as forças de sustentação nas asas.



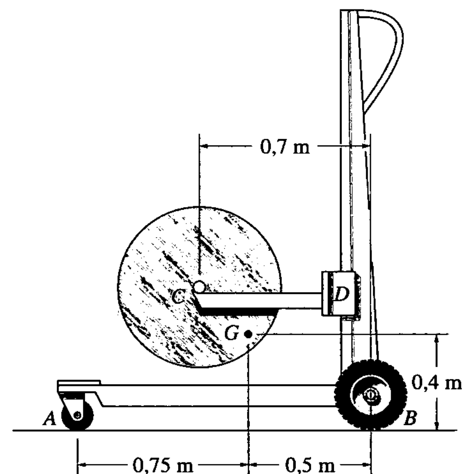

Problema 17.27




Problema 17.28

**17.29.** O mecanismo de elevação tem massa de 70 kg e centro de massa em $G$. Se ele ergue uma bobina de 120 kg com uma aceleração de 3 m/s$^2$, determine as reações de cada uma das quatro rodas sobre o solo. O carregamento é simétrico. Despreze a massa do braço móvel $CD$.

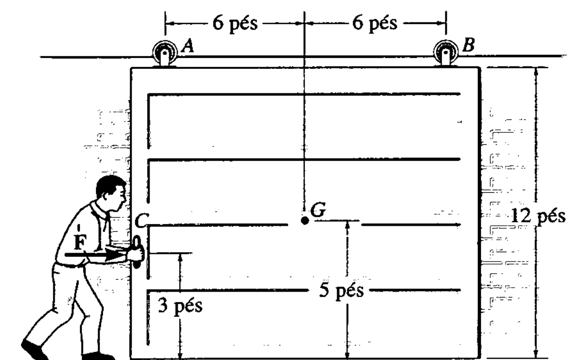
**17.30.** O mecanismo de elevação tem massa de 70 kg e centro de massa em $G$. Determine a máxima aceleração para cima da bobina de 120 kg, de forma que nenhuma reação das rodas sobre o piso exceda 600 N.




Problemas 17.29/30

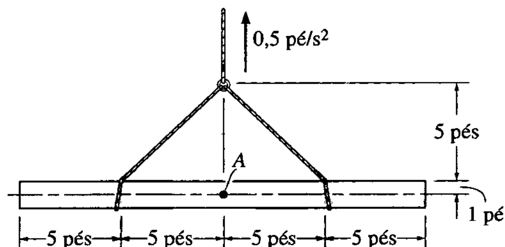
**17.31.** A porta tem peso de 200 lb e centro de gravidade em $G$. Determine quanto a porta pode mover-se em 2 s, a partir do repouso, se um homem a empurra em $C$ com uma força horizontal $F = 30$ lb. Obtenha também as reações verticais nos rodízios $A$ e $B$.

***17.32.** A porta tem peso de 200 lb e centro de gravidade $G$. Determine a força constante que deve ser aplicada à porta para empurrá-la e abri-la 12 pés à direita, em 5 s, partindo-se do repouso. Determine também as reações verticais nos rodízios $A$ e $B$.




**Problemas 17.31/32**

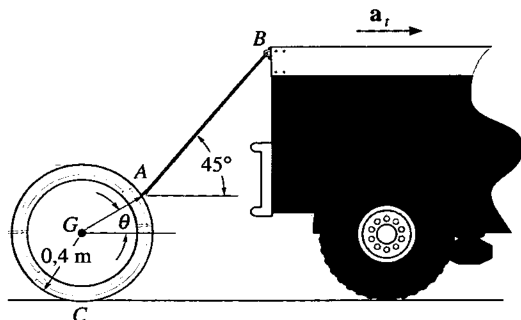
**17.33.** O tubo uniforme tem peso de 500 lb e diâmetro de 2 pés. Se ele está sendo erguido como se mostra na figura, com aceleração de 0,5 pé/s², determine o momento interno no centro $A$ do tubo, devido ao levantamento.




**Problema 17.33**

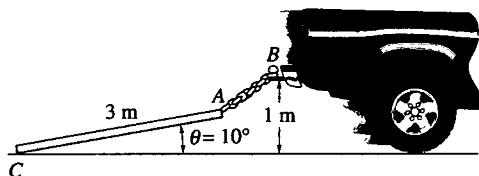
**17.34.** O tubo tem massa de 800 kg e está sendo rebocado pelo veículo. Se a aceleração desse veículo é de 0,5 m/s², determine o ângulo $\theta$ e a tensão no cabo. O coeficiente de atrito cinético entre o tubo e o solo é $\mu_c = 0{,}1$.

**17.35.** O tubo tem massa de 800 kg e está sendo rebocado pelo veículo. Se $\theta = 30°$, determine a aceleração do veículo e a tensão no cabo. O coeficiente de atrito cinético entre o tubo e o solo é $\mu_c = 0{,}1$.



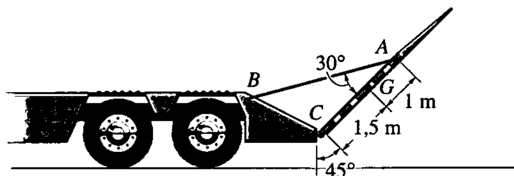

**Problemas 17.34/35**

***17.36.** O tubo tem comprimento de 3 m e massa de 500 kg. Ele está preso na traseira de uma caminhonete por meio de uma corrente $AB$ de 0,6 m de comprimento. Se o coeficiente de atrito cinético em $C$ é $\mu_c = 0{,}4$, determine a aceleração da caminhonete, considerando um ângulo $\theta = 10°$.



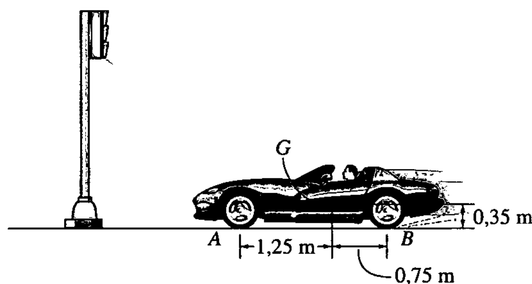

**Problema 17.36**

**17.37.** A rampa móvel no trailer tem massa de 1,25 t e centro de massa em $G$. Se ela é suportada pelo cabo $AB$ e pela dobradiça $C$, determine a tensão no cabo quando o caminhão começa a acelerar a 5 m/s². Determine também quais são os componentes horizontal e vertical da reação na dobradiça $C$.



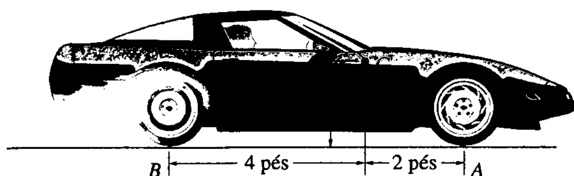

**Problema 17.37**

**17.38.** O carro esporte tem massa de 1,5 t e centro de massa em $G$. Determine o tempo mínimo que ele leva para atingir uma velocidade de 80 km/h, partindo do repouso, se a tração é traseira e as rodas dianteiras rolam livremente. O coeficiente de atrito estático entre as rodas e o pavimento é $\mu_e = 0{,}2$. Despreze a massa das rodas. Qual seria o tempo mínimo para atingir os 80 km/h, se houvesse tração nas quatro rodas?



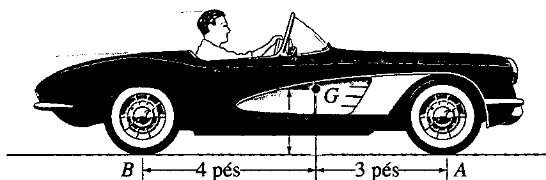

**Problema 17.38**

**17.39.** O carro esporte pesa 4.500 lb e tem centro de gravidade em $G$. Se ele parte do repouso e há o escorregamento das rodas traseiras durante a aceleração, determine quanto tempo ele leva para atingir uma velocidade de 10 pés/s. Determine também a reação normal de cada uma das quatro rodas do carro sobre o piso. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre cada pneu e o pavimento são $\mu_e = 0{,}5$ e $\mu_c = 0{,}3$, respectivamente. Despreze a massa das rodas.



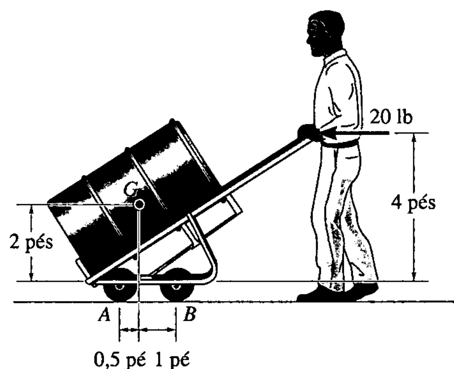

Problema 17.39

*17.40. O carro acelera uniformemente a partir do repouso a 88 pés/s em 15 segundos. Se ele tem peso de 3.800 lb e centro de gravidade em $G$, determine a reação normal de *cada roda* sobre o pavimento durante o movimento. Considere tração dianteira e que as rodas traseiras rolam livremente. Despreze a massa das rodas e considere os seguintes valores para os coeficientes de atrito: $\mu_e = 0{,}4$ (estático) e $\mu_c = 0{,}2$ (cinético).



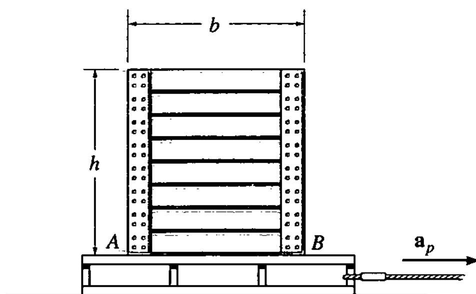

Problema 17.40

17.41. O carrinho suporta o tambor de 600 lb que tem centro de gravidade em $G$. Se o trabalhador empurra o carrinho e sua carga com força horizontal de 20 lb, determine a aceleração do sistema e a reação normal em cada uma das quatro rodas. Despreze a massa das rodas.




Problema 17.41

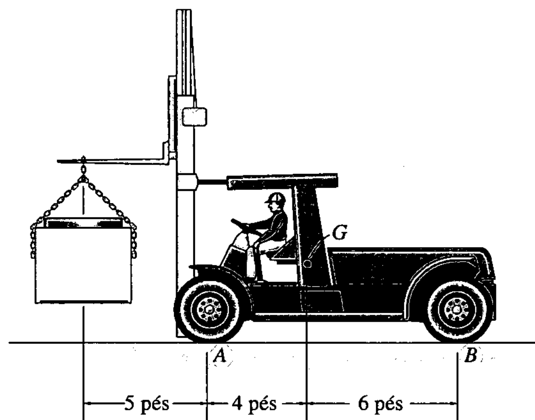
17.42. Um engradado uniforme tem massa $m$ e se apóia num estrado áspero. Se ao estrado for comunicada uma aceleração $a_P$, mostre que o engradado deslizará e tombará simultaneamente caso o coeficiente de atrito estático $\mu_e$ entre o engradado e o estrado satisfizer a condição $\mu_e = b/h$.




Problema 17.42

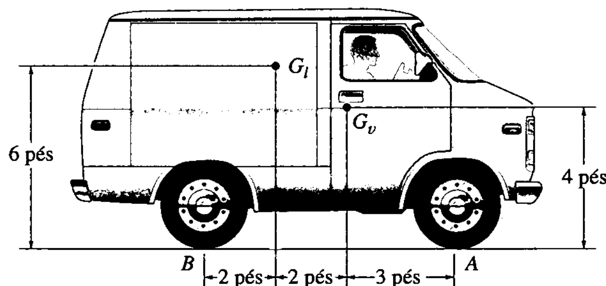
17.43. A empilhadeira e seu operador têm peso total de 10.000 lb e centro de massa em $G$. Se a empilhadeira for usada para elevar um tubo de concreto de 2.000 lb, determine a aceleração vertical máxima que ela poderá imprimir ao tubo sem tombar para a frente sobre suas rodas dianteiras.

*17.44. A empilhadeira e seu operador têm peso total de 10.000 lb e centro de massa em $G$. Se a empilhadeira for usada para elevar um tubo de concreto de 2.000 lb, determine a reação normal sobre cada uma de suas quatro rodas para que o tubo venha a ter aceleração de 4 pés/s$^2$.



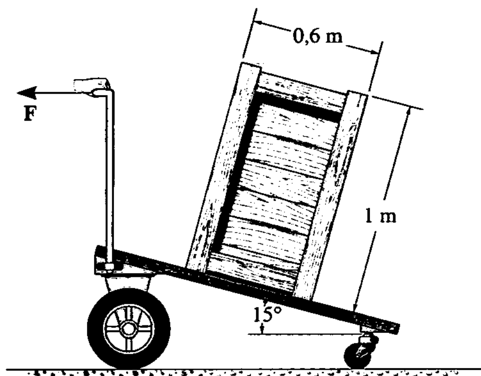

Problemas 17.43/44

17.45. A van tem peso de 4.500 lb e centro de gravidade em $G_v$. Ela transporta uma carga fixa de 800 lb e centro de gravidade em $G_l$. Se a van desloca-se a 40 pés/s, determine a distância que ela desliza antes de parar. Suponha que as quatro rodas estão travadas durante o escorregamento. O coeficiente de atrito cinético entre cada pneu e o pavimento é $\mu_c = 0{,}3$. Compare essa distância com aquela percorrida se a van estivesse vazia. Despreze a massa das rodas.




Problema 17.45

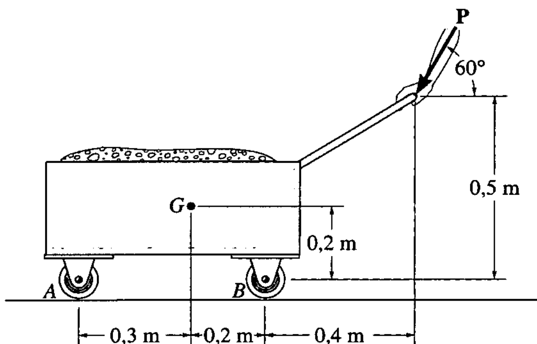
17.46. O engradado tem 50 kg e está apoiado na superfície inclinada do carrinho. Determine se o engradado tombará ou deslizará relativamente ao carrinho, quando este for submetido à aceleração mínima necessária para se produzir um desses dois movimentos relativos. Qual é essa aceleração? O coeficiente de atrito estático entre o engradado e o carrinho é $\mu_e = 0{,}5$.




Problema 17.46

**17.47.** O carrinho tem massa de 200 kg e centro de massa em $G$. Determine a reação normal em cada uma das rodas em $A$ e nas duas outras em $B$ quando uma força $P = 50$ kg é aplicada como se indica na figura.

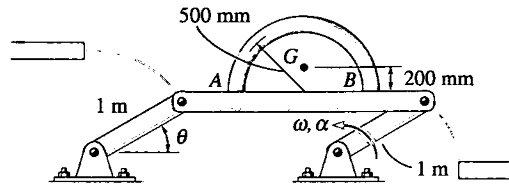
***17.48.** O carrinho tem massa de 200 kg e centro de massa em $G$. Determine a intensidade máxima da força **P** que deve ser aplicada de modo que as rodas em $A$ ou $B$ continuem em contato com o piso. Despreze a massa das rodas.




Problemas 17.47/48

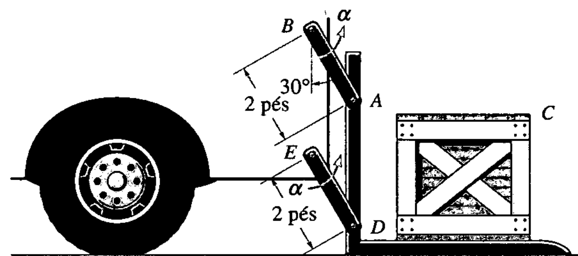
**17.49.** O tubo curvado tem 80 kg e está apoiado na superfície da plataforma. Durante o transporte de um nível ao outro, verifica-se que $\alpha = 0{,}25$ rad/s$^2$ e $\omega = 0{,}5$ rad/s, no instante em que $\theta = 30°$. Se ele não escorrega, determine suas reações sobre a plataforma nesse instante.

**17.50.** O tubo curvado tem 80 kg e está apoiado na superfície da plataforma para a qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0{,}3$. Determine a aceleração máxima $\alpha$ da plataforma, partindo do repouso, quando $\theta = 45°$. Considere que o tubo não escorrega sobre ela.



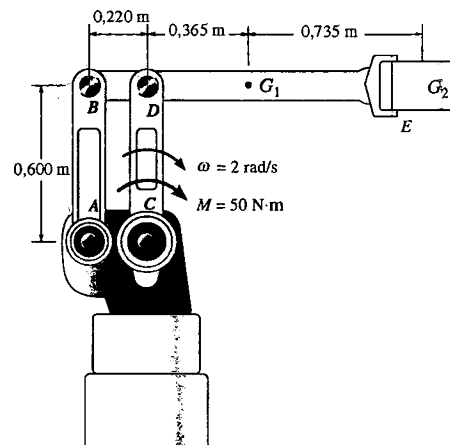

Problemas 17.49/50

**17.51.** O engradado $C$ pesa 150 lb e está apoiado num elevador para o qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_e = 0{,}4$. Determine a aceleração angular máxima $\alpha$, partindo do repouso, que os elementos de ligação paralelos $AB$ e $DE$ podem ter sem causar o escorregamento do engradado. Não ocorre tombamento.




Problema 17.51

***17.52.** O braço $BDE$ de um robô industrial manufaturado pela indústria Cincinnati Milacron é ativado pela aplicação de um torque $M = 50$ N · m ao elemento de ligação $CD$. Determine as reações nos pinos $B$ e $D$ quando os elementos estão na posição indicada na figura e têm velocidade angular de 2 rad/s. O braço uniforme $BDE$ tem massa de 10 kg e centro de massa em $G_1$. O recipiente mantido em sua garra em $E$ tem massa de 12 kg e centro de massa em $G_2$. Despreze a massa dos elementos de ligação $AB$ e $CD$.




Problema 17.52

## 17.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO: ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

Consideremos o corpo rígido (ou placa) mostrado na Figura 17.14*a*, o qual tem de girar em torno de um eixo fixo *horizontal* que é perpendicular ao plano da página e passa por um pino em $O$. A velocidade e a aceleração angulares são causadas por um sistema de forças e momentos de binário externos agindo no corpo. Como o centro de massa $G$ do corpo se move numa *trajetória circular*, a aceleração desse ponto está representada na figura por seus componentes tangencial e normal. O *componente tangencial da aceleração* tem *módulo* $(a_G)_t = \alpha r_G$ e deve ter *sentido* consistente com a aceleração angular $\alpha$. O *módulo* do *componente normal da aceleração* é $(a_G)_n = \omega^2 r_G$. Esse componente é *sempre orientado* do ponto $G$ para $O$, qualquer que seja o sentido de $\boldsymbol{\omega}$.

Os diagramas de corpo livre e dinâmico para o corpo estão na Figura 17.14*b*. O peso do corpo, $W = mg$, e a reação do pino $\mathbf{F}_O$ estão incluídos no diagrama de corpo livre, pois essas forças são forças externas agindo no corpo. Os componentes $m(\mathbf{a}_G)_t$ e $m(\mathbf{a}_G)_n$ mostrados no diagrama dinâmico são associados aos componentes tangencial e normal da aceleração do centro de massa do corpo. Esses vetores têm as mesmas direções e sentidos dos componentes da aceleração e seus módulos são $m(a_G)_t$ e $m(a_G)_n$. O vetor $I_G\boldsymbol{\alpha}$ tem a mesma direção e sentido de $\boldsymbol{\alpha}$ e módulo $I_G\alpha$, onde $I_G$ é o momento de inércia do corpo calculado em relação ao eixo que é perpendicular à página e passa por $G$. Da dedução feita na Seção 17.2, as equações de movimento que se aplicam ao corpo podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha \end{aligned} \qquad (17.14)$$

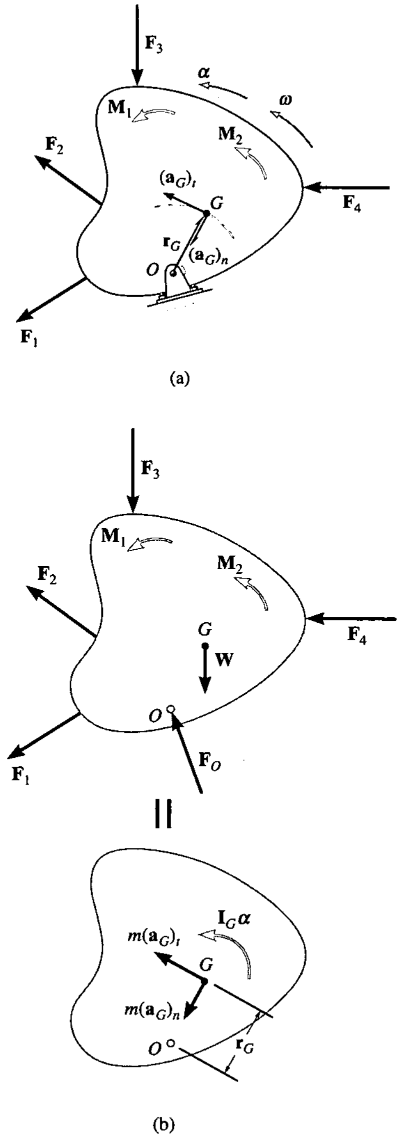


**Figura 17.14**

A equação de momento pode ser substituída por um somatório dos momentos em torno de um ponto arbitrário $P$ tomado no corpo ou fora dele, desde que se levem em conta os momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ de $I_G\boldsymbol{\alpha}$, $m(\mathbf{a}_G)t$ e $m(\mathbf{a}G)n$ em relação a esse ponto $P$. Em muitos problemas, é conveniente somar os momentos em relação ao ponto $O$, eliminando-se *convenientemente* a *força desconhecida* $\mathbf{F}_O$. Do diagrama dinâmico (Figura 17.14*b*), isso implica

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \qquad \Sigma M_O = r_G m(a_G)_t + I_G\alpha \qquad (17.15)$$

Observemos que o momento de $m(\mathbf{a}_G)_n$ não está presente no somatório, pois a reta que contém esse vetor passa por $O$. Substituindo $(a_G)t = r_G\alpha$, podemos reescrever a equação anterior como $\circlearrowright + \Sigma M_O = (I_G + mr_G^2)\alpha$. Do teorema dos eixos paralelos, $I_O = I_G + md^2$, portanto o termo entre parênteses representa *o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação fixo passando por O*.[7] Conseqüentemente, podemos escrever as três equações de movimento para o corpo como

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_O &= I_O\alpha \end{aligned} \qquad (17.16)$$

Nas aplicações, devemos lembrar que '$I_O\alpha$' considera o 'momento' de $m(\mathbf{a}_G)_n$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ em relação ao ponto $O$ (Figura 17.14*b*). Em outras palavras, $\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O = I_O\alpha$, como indicado pelas equações 17.15 e 17.16.

[7] O resultado $\Sigma M_O = I_O\alpha$ também pode ser obtido *diretamente* da Equação 17.6, tomando-se $P$ coincidente com $O$ e observando-se que $(a_P)_x = (a_P)_y = 0$.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Problemas de dinâmica que envolvem a rotação de um corpo em torno de um eixo fixo podem ser resolvidos usando-se o seguinte procedimento.

### *Diagrama de Corpo Livre*

- Estabeleça um sistema de coordenadas inercial $x$, $y$ ou $n$, $t$ e especifique as direções e os sentidos das acelerações $(\mathbf{a}_G)_n$ e $(\mathbf{a}_G)_t$ e da aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ do corpo. Lembre-se de que $(\mathbf{a}_G)_t$ tem sentido consistente com o de $\boldsymbol{\alpha}$, enquanto $(\mathbf{a}_G)_n$ está sempre voltada para o eixo de rotação, ponto $O$.
- Desenhe o diagrama de corpo livre considerando todas as forças e momentos de binário externos agindo no corpo.
- Calcule o momento de inércia $I_G$ ou $I_O$.
- Identifique as incógnitas do problema.
- Se for decidido que a equação do movimento de rotação $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ deverá ser usada, isto é, se $P$ for um ponto diferente de $G$ ou $O$, construa o diagrama dinâmico para ajudar a 'visualização' dos 'momentos' dos componentes $m(\mathbf{a}_G)_t$, $m(\mathbf{a}_G)_n$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ ao escrever os termos para o somatório de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

### *Equações de Movimento*

- Aplique as três equações de movimento de acordo com a convenção de sinal estabelecida.
- Se os momentos são somados em relação ao centro de massa $G$ do corpo, então $\Sigma M_G = I_G\alpha$, pois os momentos de $m(\mathbf{a}_G)_t$ e $m(\mathbf{a}_G)_n$ são nulos.
- Se os momentos são somados em relação ao pino $O$ no eixo de rotação, então o momento de $m(\mathbf{a}_G)_n$ em relação a $G$ é nulo e pode ser mostrado que $\Sigma M_O = I_O\alpha$.

### *Cinemática*

- Use a cinemática se uma solução completa não puder ser obtida apenas com as equações de movimento.
- Se a *aceleração angular é variável*, use

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

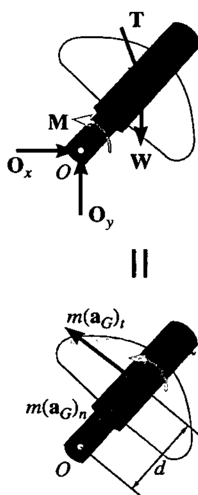
- Se a *aceleração angular é constante*, use

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$






*A manivela da bomba de petróleo sofre uma rotação em torno de um eixo fixo provocada pelo torque do motor* **M**. *As cargas mostradas no diagrama de corpo livre causam os efeitos mostrados no diagrama dinâmico. Se os momentos são somados em relação ao centro de massa G, temos $\Sigma M_G = I_G\alpha$. Todavia, se os momentos forem somados em relação ao ponto O, observando que $(a_G)_t = \alpha d$, teremos $\circlearrowright\!+\Sigma M_O = I_G\alpha + m(a_G)_t d + m(a_G)_n(0) = I_G + md^2\alpha$.*

## EXEMPLO 17.9

O disco uniforme de 30 kg mostrado na Figura 17.15*a* é suportado por um pino em seu centro. Se ele parte do repouso, determine o número de voltas que ele deve dar para atingir uma velocidade angular de 20 rad/s. Qual é a reação no pino? O disco está sob a ação de uma força constante $F = 10$ N, que é aplicada a uma corda enrolada na sua borda, e um momento de binário $M = 5$ N · m. Despreze a massa da corda em seus cálculos.

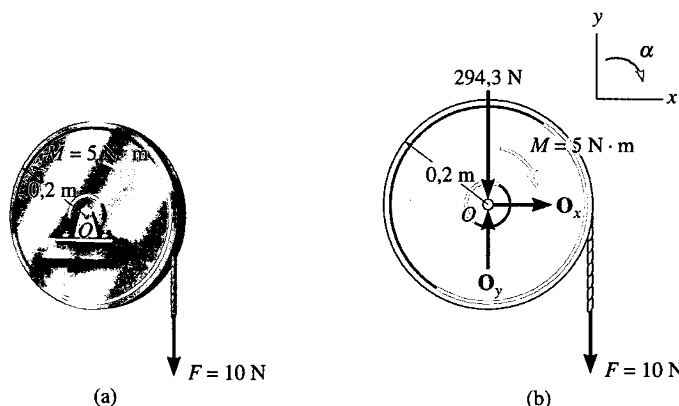



**Figura 17.15**

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Consideremos a Figura 17.15*b*. Vemos que o centro de massa não está acelerado; todavia, o disco tem aceleração angular no sentido horário.

O momento de inércia do disco em relação ao pino é

$$I_O = \tfrac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(30\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2 = 0{,}6\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

As três incógnitas são $O_x$, $O_y$ e $\alpha$.

***Equações de Movimento.***

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad O_x = 0 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad O_y - 294{,}3\text{ N} - 10\text{ N} = 0$$

$$O_y = 304\text{ N} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad -10\text{ N}(0{,}2\text{ m}) - 5\text{ N}\cdot\text{m} = -(0{,}6\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

$$\alpha = 11{,}7\text{ rad/s}^2 \circlearrowright$$

***Cinemática.*** Como $\alpha$ é constante e tem sentido horário, o número de radianos que o disco deve girar para atingir a velocidade angular de 20 rad/s é calculado por

$$\circlearrowright + \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$(-20\text{ rad/s})^2 = 0 + 2(-11{,}7\text{ rad/s}^2)(\theta - 0)$$

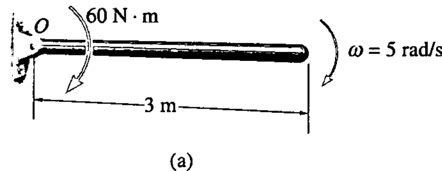
$$\theta = -17{,}1\text{ rad} = 17{,}1\text{ rad} \circlearrowright$$

Logo:

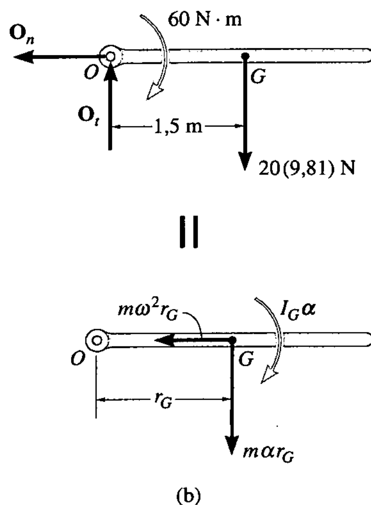
$$\theta = 17{,}1\text{ rad}\left(\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 2{,}73\text{ rev} \circlearrowright \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## EXEMPLO 17.10

A barra fina de 20 kg mostrada na Figura 17.16*a* gira num plano vertical e, num dado instante, tem velocidade angular $\omega = 5$ rad/s. Determine a aceleração angular da barra e os componentes horizontal e vertical da reação no pino nesse instante.




(a)




(b)

**Figura 17.16**

### SOLUÇÃO

***Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico.*** Consideremos a Figura 17.16*b*. Como mostrado no diagrama dinâmico, o ponto $G$ se move numa trajetória circular, portanto sua aceleração tem dois componentes. É importante que o componente tangencial $a_t = \alpha r_G$ esteja orientado para baixo, pois ele deve ser consistente com a aceleração angular $\alpha$ da barra. As três incógnitas são $O_n$, $O_t$ e $\alpha$.

***Equações de Movimento.***

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad O_n = (20\text{ kg})(5\text{ rad/s})^2(1{,}5\text{ m})$$

$$+\downarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad -O_t + 20(9{,}81)\text{ N} = (20\text{ kg})(\alpha)(1{,}5\text{ m})$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \quad O_t(1{,}5\text{ m}) + 60\text{ N}\cdot\text{m} = [\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2]\alpha$$

Resolvendo

$$O_n = 750\text{ N} \qquad O_t = 19{,}0\text{ N} \qquad \alpha = 5{,}90\text{ rad/s}^2$$ ***Resposta***

Uma solução mais direta seria somar os momentos em relação ao ponto $O$, eliminando-se $O_n$ e $O_t$ e, assim, obtendo-se uma *solução direta* para $\alpha$:

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \quad 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9{,}81)\text{ N}(1{,}5\text{ m}) =$$

$$[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2]\alpha + [20\text{ kg}(\alpha)(1{,}5\text{ m})](1{,}5\text{ m})$$

$$\alpha = 5{,}90\text{ rad/s}^2$$ ***Resposta***

Ou ainda, uma vez que $I_O = \frac{1}{3}ml^2$ para uma barra delgada, podemos aplicar

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9{,}81)\text{ N}(1{,}5\text{ m}) = [\tfrac{1}{3}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2]\alpha$$

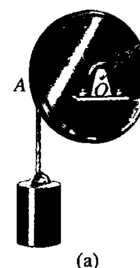
$$\alpha = 5{,}90\text{ rad/s}^2$$ ***Resposta***

Por comparação, a última equação fornece a solução mais simples para $\alpha$ e *não* exige o uso do diagrama dinâmico.

## EXEMPLO 17.11

O tambor mostrado na Figura 17.17*a* tem massa de 60 kg e um raio de giração $k_O = 0{,}25$. Uma corda de massa desprezível está enrolada em sua peri-

feria e presa num bloco de massa 20 kg. Determine a aceleração angular adquirida pelo bloco quando ele for solto.



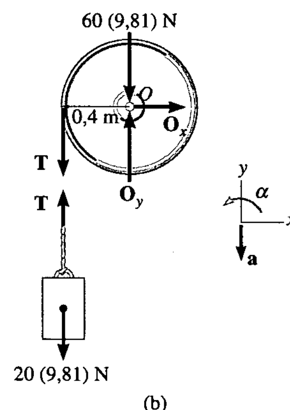

## SOLUÇÃO I

***Diagrama de Corpo Livre.*** Consideremos o tambor e o bloco separadamente (Figura 17.17*b*). Supondo que o bloco se move *para baixo* com aceleração **a**, ele faz o tambor girar com aceleração $\alpha$ no *sentido anti-horário*.

O momento de inércia do tambor é

$$I_O = mk_O^2 = (60\text{ kg})(0{,}25\text{ m})^2 = 3{,}75\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Há cinco incógnitas: $O_x$, $O_y$, $T$, $a$ e $\alpha$.




***Equações de Movimento.*** Não é interessante aplicar ao tambor as equações do movimento de translação $\Sigma F_x = m(a_G)x$ e $\Sigma F_y = m(a_G)y$, pois essas equações envolvem as incógnitas $O_x$ e $O_y$. Assim, para o tambor e o bloco, temos, respectivamente,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad T(0{,}4\text{ m}) = (3{,}75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad -20(9{,}81)\text{ N} + T = -20a \qquad (2)$$

***Cinemática.*** Como o ponto de contato $A$ entre a corda e o tambor tem componente tangencial de aceleração **a** (Figura 17.17*a*), então

$$\circlearrowleft + a = \alpha r; \qquad a = \alpha(0{,}4) \qquad (3)$$

Resolvendo-se essas equações:

$$T = 106\text{ N}$$

$$a = 4{,}52\text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 11{,}3\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resposta}$$

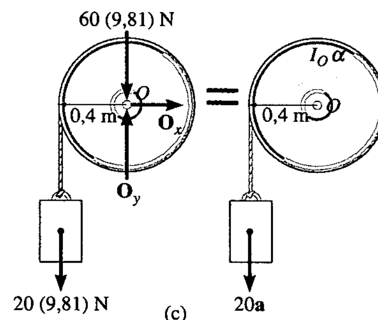



**Figura 17.17**

## SOLUÇÃO II

***Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico.*** A tensão $T$ no cabo pode ser eliminada da análise considerando-se o tambor e o bloco como *um único sistema* (Figura 17.17*c*). O diagrama dinâmico deve ser construído, pois os momentos serão somados em relação ao ponto $O$.

***Equações de Movimento.*** Usando a Equação 3 e aplicando a equação de momento em relação a $O$ para eliminar as incógnitas $O_x$ e $O_y$, temos

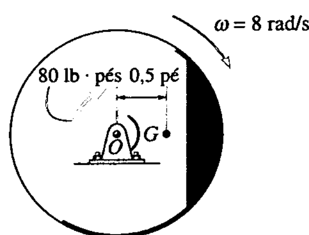
$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \qquad 20(9{,}81)\text{ N}(0{,}4\text{ m}) =$$

$$(3{,}75\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [20\text{ kg}(0{,}4\text{ m }\alpha)](0{,}4\text{ m})$$

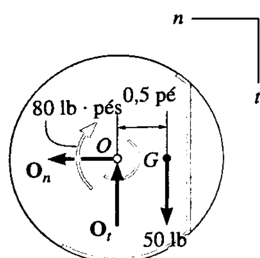
$$\alpha = 11{,}3\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resposta}$$

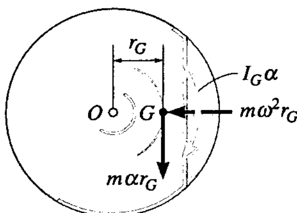
*Observe*: Supondo que o bloco fosse *removido* e uma força de 20(9,81) N fosse aplicada à corda, mostre que nesse caso $\alpha = 20{,}9\text{ rad/s}^2$ e explique a razão da diferença de resultados.

## EXEMPLO 17.12




(a)




(b)

**Figura 17.18**

O volante desbalanceado mostrado na Figura 17.18*a* tem um peso de 50 lb e um raio de giração $k_G$ = 0,6 pé em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa $G$. Se, num dado instante, ele tem uma velocidade angular no sentido horário, de módulo 8 rad/s, determine os componentes horizontal e vertical da reação no pino $O$.

### SOLUÇÃO

***Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico.*** Como $G$ se desloca numa trajetória circular, ele terá aceleração tanto com o componente normal como com o tangencial. Além disso, como $\alpha$, que é causada pelo peso do volante, tem sentido horário, o componente tangencial da aceleração será para baixo. Por quê? Os vetores de módulos $m(a_G)_t = m\alpha r_G$, $m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$ e $I_G\alpha$ estão indicados no diagrama da Figura 17.18*b*. O momento de inércia do volante em relação ao seu centro de massa é determinado pelo seu raio de giração e pela sua massa; isto é, $I_G = mk^2_G = (50 \text{ lb}/32{,}2 \text{ pés/s}^2)(0{,}6 \text{ pé})^2 = 0{,}559 \text{ slug} \cdot \text{pé}^2$.

As três incógnitas são $On$, $O_t$ e $\alpha$.

***Equações de Movimento.***

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \quad O_n = \left(\frac{50 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(8 \text{ rad/s})^2(0{,}5 \text{ pé}) \qquad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \quad -O_t + 50 \text{ lb} = \left(\frac{50 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(\alpha)(0{,}5 \text{ pé}) \qquad (2)$$

$$\curvearrowright\!+\Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad 80 \text{ lb} \cdot \text{pés} + O_t(0{,}5 \text{ pé}) = (0{,}559 \text{ slug} \cdot \text{pé}^2)\alpha \qquad (3)$$

Resolvendo, temos $\alpha = 11 \text{ rad/s}^2$ $O_n = 49{,}7$ lb $O_t = -36{,}1$ lb ***Resposta***

Os momentos também podem ser somados em relação ao ponto $O$, o que elimina $\mathbf{O}_n$, e $\mathbf{O}_t$, fornecendo uma solução *direta* para $\alpha$ (Figura 17.18*b*). Isso pode ser feito de *duas* formas: usando $\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O$ ou $\Sigma M_O = I_O\alpha$. Se aplicarmos a primeira dessas equações, teremos

$$\curvearrowright\!+\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \qquad 80 \text{ lb} \cdot \text{pés} + 50 \text{ lb}(0{,}5 \text{ pé}) =$$

$$(0{,}559 \text{ slug} \cdot \text{pé}^2)\alpha + \left[\left(\frac{50 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)\alpha(0{,}5 \text{ pé})\right](0{,}5 \text{ pé})$$

$$105 = 0{,}947\alpha \qquad (4)$$

Se aplicarmos a equação $\Sigma M_O = I_O\alpha$, então, pelo teorema dos eixos paralelos, o momento de inércia do volante em relação a $O$ será

$$I_O = I_G + mr_G^2 = 0{,}559 + \left(\frac{50}{32{,}2}\right)(0{,}5)^2 = 0{,}947 \text{ slug} \cdot \text{pé}^2$$

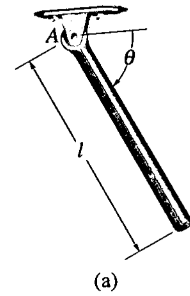
Logo, do diagrama de corpo livre (Figura 17.18*b*), impomos

$$\curvearrowright\!+\Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 80 \text{ lb} \cdot \text{pés} + 50 \text{ lb}(0{,}5 \text{ pé}) = (0{,}947 \text{ slug} \cdot \text{pé}^2)\alpha$$

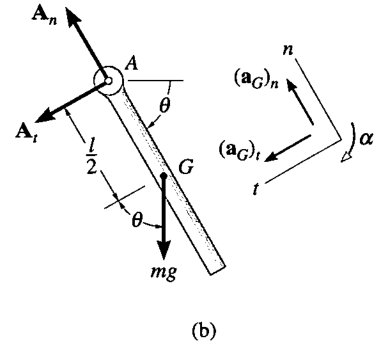
que é o mesmo resultado apresentado na Equação 4. Resolvendo para $\alpha$ e substituindo na Equação 2, obtemos a resposta para $O_t$ calculada anteriormente.

## EXEMPLO 17.13

Abandona-se a partir do repouso, quando $\theta = 0°$, a barra delgada de massa $m$ e comprimento $l$, mostrada na Figura 17.19$a$. Determine os componentes horizontal e vertical da força que o pino em $A$ exerce na barra no instante em que $\theta = 90°$.




(a)




(b)

**Figura 17.19**

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** O diagrama de corpo livre para a barra está na Figura 17.19$b$, para uma posição genérica $\theta$. Por conveniência, os componentes da força em $A$ estão mostrados nas direções $n$ e $t$. Observemos que a aceleração $\boldsymbol{\alpha}$ tem sentido horário.

O momento de inércia da barra em relação a $A$ é $I_A = \frac{1}{3}ml^2$.

***Equações de Movimento.*** Os momentos serão somados em relação a $A$ para se eliminarem as forças de reação.[8]

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad A_n - mg \operatorname{sen}\theta = m\omega^2(l/2) \qquad (1)$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad A_t + mg\cos\theta = m\alpha(l/2) \qquad (2)$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_A = I_A\alpha; \qquad mg\cos\theta(l/2) = (\tfrac{1}{3}ml^2)\alpha \qquad (3)$$

***Cinemática.*** Para um dado ângulo $\theta$ há quatro incógnitas nessas três equações: $A_n$, $A_t$, $\omega$ e $\alpha$. Como mostrado pela Equação 3, a aceleração angular $\alpha$ *não é constante*; ela depende da posição $\theta$ da barra. Uma quarta equação pode ser obtida usando-se a cinemática, com a qual $\alpha$ e $\omega$ relacionam-se com $\theta$:

$$(\curvearrowright +) \qquad \omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \qquad (4)$$

Observemos que o sentido positivo horário para essa equação *concorda* com o da Equação 3. Isso é importante, pois estamos procurando a solução simultânea de um sistema de quatro equações.

Para obter $\omega$ em $\theta = 90°$, eliminamos $\alpha$ das equações 3 e 4, do que resulta

$$\omega\, d\omega = (1{,}5\, g/l)\cos\theta\, d\theta$$

Como $\omega = 0$ para $\theta = 0°$, temos

$$\int_0^\omega \omega\, d\omega = (1{,}5\, g/l)\int_{0°}^{90°} \cos\theta\, d\theta$$

$$\omega^2 = 3\, g/l$$

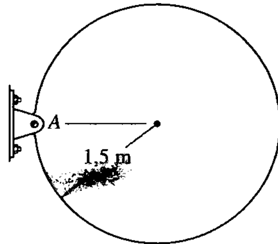
Substituindo esse valor na Equação 1 com $\theta = 90°$ e resolvendo as equações 1 e 3, obtemos

$$\alpha = 0 \qquad A_t = 0 \qquad A_n = 2{,}5\, mg$$ ***Resposta***

[8] Se a equação $\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A$ for usada, deve-se considerar os momentos de $I_G\alpha$ e $m(\mathbf{a}_G)t$ em relação a $A$. Aqui, no entanto, consideramos $\Sigma M_A = I_A\alpha$.

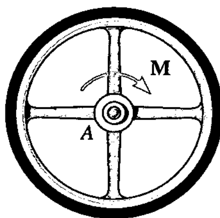
## PROBLEMAS

**17.53.** O disco de 80 kg é suportado pelo pino em $A$. Se ele é solto a partir do repouso na posição mostrada na figura, determine os valores iniciais dos componentes da reação no pino.



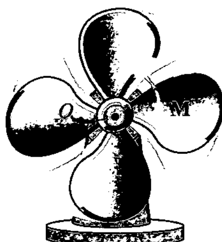

**Problema 17.53**

**17.54.** A roda de 10 kg tem raio de giração $k_A$ = 200 mm. Se a roda está sob a ação de um torque $M = (5t)$ N · m, onde $t$ é dado em segundos, determine sua velocidade angular quando $t$ = 3 s, a partir do repouso. Calcule também as reações que o pino fixo $A$ exerce na roda durante o movimento.



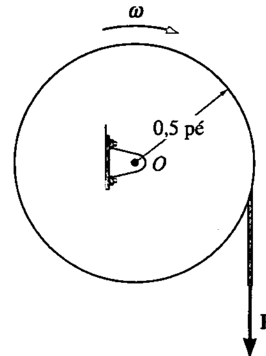

**Problema 17.54**

**17.55.** A hélice do ventilador tem massa de 32 kg e momento de inércia $I_O$ = 0,18 kg · m$^2$ em relação a um eixo que passa pelo centro $O$. Se a hélice está sob a ação de um torque $M = 3(1 - e^{-0,2t})$ N · m, onde $t$ é dado em segundos, determine sua velocidade angular quando $t$ = 4 s, a partir do repouso.



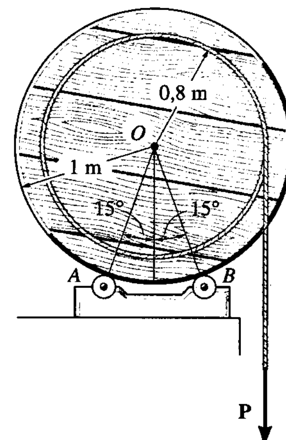

**Problema 17.55**

***17.56.** O disco tem peso de 80 lb e raio de giração $k_O$ = 0,4 pé. Se o cabo enrolado no disco está submetido a uma força vertical $P$ = 15 lb, determine o tempo necessário para aumentar a velocidade angular do disco de $\omega_1$ = 5 rad/s para $\omega_2$ = 25 rad/s. Despreze a massa do cabo.



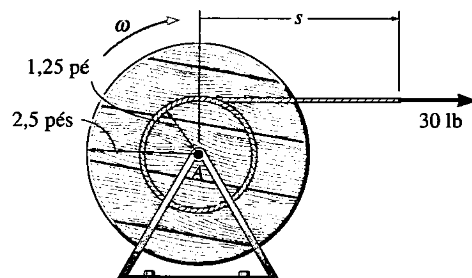

**Problema 17.56**

**17.57.** A bobina está apoiada em pequenos roletes em $A$ e $B$. Determine a força constante $P$ que deve ser aplicada ao cabo para desenrolar 8 m de cabo em 4 s, a partir do repouso. Calcule também as forças em $A$ e $B$ durante esse tempo. A bobina tem massa de 60 kg e raio de giração $k_O$ = 0,65 m. Despreze em seus cálculos as massas do cabo e dos roletes em $A$ e $B$.




**Problema 17.57**

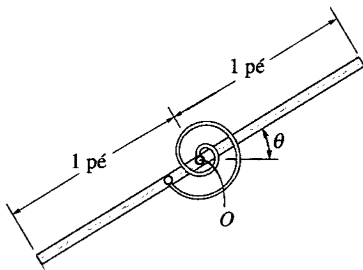
**17.58.** Uma corda está enrolada no cilindro de uma bobina. Se a corda for puxada com tensão constante de 30 lb e a bobina estiver inicialmente em repouso, determine a velocidade angular quando um comprimento $s$ = 8 pés de corda estiver desenrolado. Despreze o peso da porção de 8 pés da corda. A bobina e a corda inteira têm peso total de 400 lb e raio de giração, em relação ao eixo $A$, $k_A$ = 1,30 pé.




**Problema 17.58**

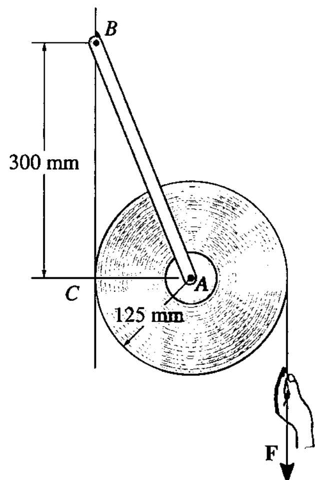
**17.59.** Uma barra de 10 lb está conectada a uma mola de torção e pode girar em torno de um pino em seu centro $O$. A mola tem rigidez $k = 5$ lb · pés/rad, de modo que o torque desenvolvido é $M = (5\theta)$ lb · pés, onde $\theta$ é dado em radianos. Se a barra é solta a partir do repouso quando está vertical ($\theta = 90°$), determine sua velocidade angular no instante em que $\theta = 0°$.

***17.60.** Uma barra de 10 lb está conectada a uma mola de torção e pode girar em torno de um pino no seu centro $O$. A mola tem rigidez $k = 5$ lb · pés/rad, de modo que o torque desenvolvido é $M = (5\theta)$ lb · pés, onde $\theta$ é dado em radianos. Se a barra é solta a partir do repouso quando está vertical ($\theta = 90°$), determine sua velocidade angular no instante em que $\theta = 45°$.



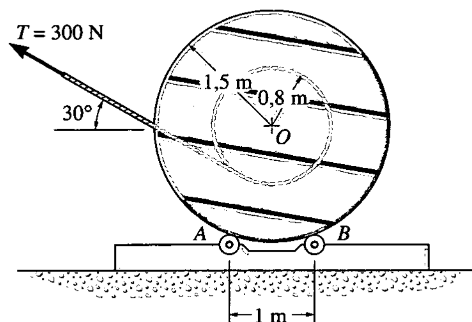

**Problemas 17.59/60**

**17.61.** O rolo de papel, com 20 kg, tem raio de giração $k_A = 90$ mm, em relação a um eixo que passa pelo ponto $A$ e é suportado em ambas as extremidades por hastes $AB$ ligadas a pinos. Se o rolo se apóia contra uma parede para a qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}2$ e uma força vertical $F = 30$ N é aplicada à extremidade do papel, determine a aceleração angular do rolo à medida que o papel se desenrola.




**Problema 17.61**

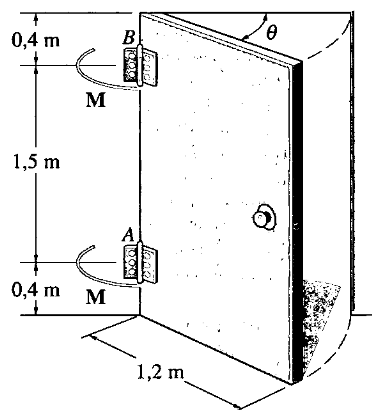
**17.62.** Graças à aplicação de uma força $T = 300$ N a um ângulo de 30°, o cabo se desenrola de uma bobina suportada por roletes em $A$ e $B$. Calcule o tempo necessário para se desenrolar um comprimento de 5 m de cabo se a bobina e o cabo têm massa total de 600 kg e raio de giração central $k_O = 1{,}2$ m. Em seus cálculos, despreze a massa do cabo que se desenrola e as massas dos roletes $A$ e $B$. Os roletes giram sem atrito.




**Problema 17.62**

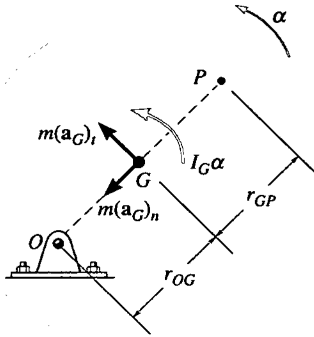
**17.63.** A porta se fecha automaticamente usando molas de torção nas dobradiças. Cada mola tem rigidez $k = 50$ N · m/rad, de forma que o torque em cada dobradiça é $M = (50\theta)$ N · m, onde $\theta$ é medido em radianos. Se a porta é solta a partir do repouso quando está aberta a 90° ($\theta = 90°$), determine sua velocidade angular no instante em que $\theta = 0°$. Em seus cálculos, trate a porta como uma placa fina com massa de 70 kg.

***17.64.** A porta se fecha automaticamente usando molas de torção nas dobradiças. Se o torque em cada dobradiça é $M = k\theta$, onde $\theta$ é medido em radianos, determine a rigidez $k$ para que a porta se feche ($\theta = 0°$) com velocidade angular $\omega = 2$ rad/s quando solta do repouso em $\theta = 90°$. Em seus cálculos, considere a porta como uma placa fina tendo massa de 70 kg.



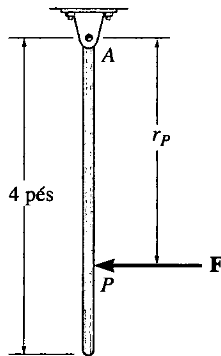

**Problemas 17.63/64**

**17.65.** A figura mostra o diagrama dinâmico que representa o movimento de rotação geral de um corpo rígido em torno de um eixo fixo em $O$. Mostre que $I_G\boldsymbol{\alpha}$ pode ser eliminado movendo-se os vetores $m(\mathbf{a}_G)_t$ e $m(\mathbf{a}_G)_n$ para o ponto $P$ localizado a uma distância $r_{GP}\, k_G^2/r_{OG}$ do centro de massa $G$ do corpo. Nessa expressão, $k_G$ representa o raio de giração do corpo em relação a $G$. O ponto $P$ é denominado *centro de percussão* do corpo.



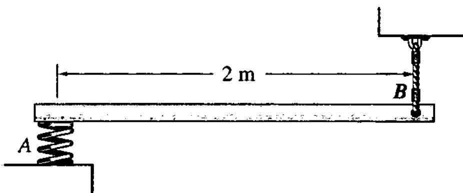

**Problema 17.65**

**17.66.** Determine a posição $r_P$ do centro de percussão $P$ de uma barra delgada com peso de 10 lb. (Veja o Problema 17.65.) Qual será a intensidade da força horizontal $\mathbf{A}_x$ no pino se a barra for golpeada em $P$ com uma força $F = 20$ lb?



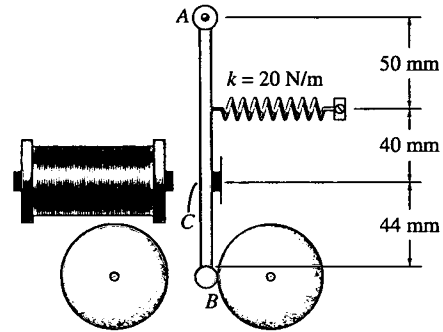

**Problema 17.66**

**17.67.** A barra fina de 4 kg é suportada horizontalmente por uma mola em $A$ e uma corda em $B$. Determine a aceleração angular da barra e a aceleração de seu centro de massa no instante em que se corta a corda em $B$. *Dica:* a rigidez da mola não é relevante para esse cálculo.



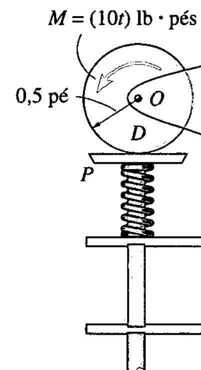

**Problema 17.67**

***17.68.** O mecanismo da campainha inclui um eletroímã que atrai a barra de ferro $AB$ de 0,2 kg, que pode girar em torno de um eixo pela extremidade $A$ e tem presa na outra uma bola de aço de 0,04 kg e raio de 6 mm. Se, quando o botão é acionado, o eletroímã em $C$ exerce uma força de atração de 0,5 N sobre o centro da bola, determine a aceleração angular inicial de $AB$. A mola está inicialmente distendida 20 mm.



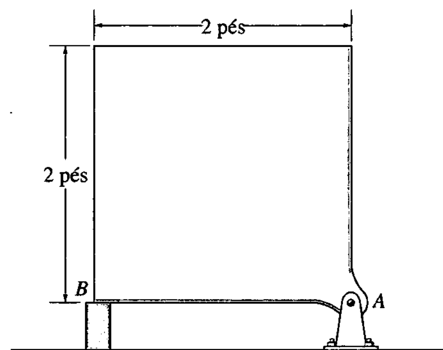

**Problema 17.68**

**17.69.** O disco $D$ está submetido a um momento de sentido anti-horário $M = (10t)$ lb · pés, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade angular do disco 2 s após o início da aplicação do momento. Devido à mola, a placa $P$ exerce no disco uma força constante de 100 lb. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o disco e a placa são $\mu_e = 0{,}3$ e $\mu_c = 0{,}2$, respectivamente. *Dica:* obtenha primeiro o tempo necessário para o disco iniciar o movimento de rotação.



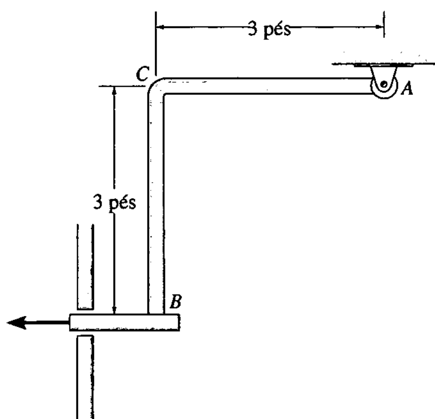

**Problema 17.69**

**17.70.** Se o suporte em $B$ for removido repentinamente, determine as reações iniciais no pino $A$. A placa tem peso de 30 lb.



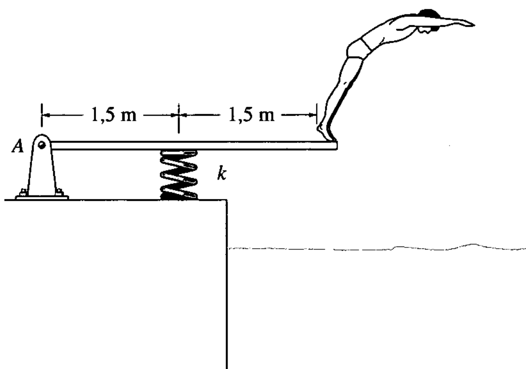

**Problema 17.70**

**17.71.** Se o suporte em $B$ for removido repentinamente, determine a aceleração inicial para baixo adquirida pelo ponto $C$. Os trechos $AC$ e $CB$ pesam cada um 10 lb.



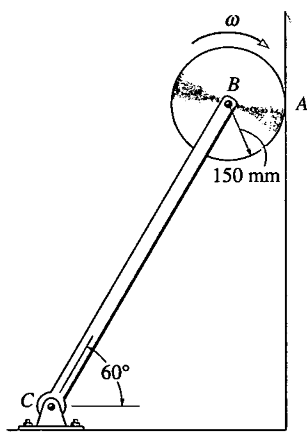

Problema 17.71

*17.72. Determine a aceleração angular do trampolim de 25 kg e os componentes horizontal e vertical da reação no pino $A$, no instante em que o homem pula. Suponha que a prancha seja uniforme e rígida, e que, no instante do salto, a compressão máxima da mola seja de 200 mm, $\omega = 0$ e a prancha esteja na posição horizontal. Considere $k = 7$ kN/m.



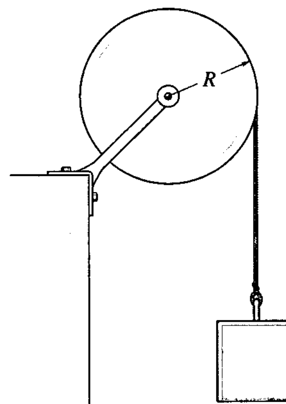

Problema 17.72

17.73. O disco tem massa de 20 kg e está inicialmente girando com velocidade angular $\omega = 60$ rad/s na extremidade do suporte $BC$. Se o disco é encostado na parede, para a qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0,3$, determine o tempo necessário para o movimento cessar. Qual é a força no braço $BC$ durante esse tempo?



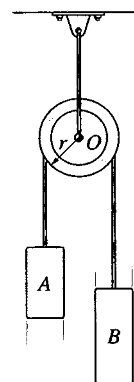

Problema 17.73

17.74. O disco tem massa $M$ e raio $R$. Se um bloco de massa $m$ é ligado à corda, determine a aceleração angular do disco quando o bloco é abandonado a partir do repouso. Qual é a velocidade do bloco depois de uma queda de $2R$, a partir do repouso?




Problema 17.74

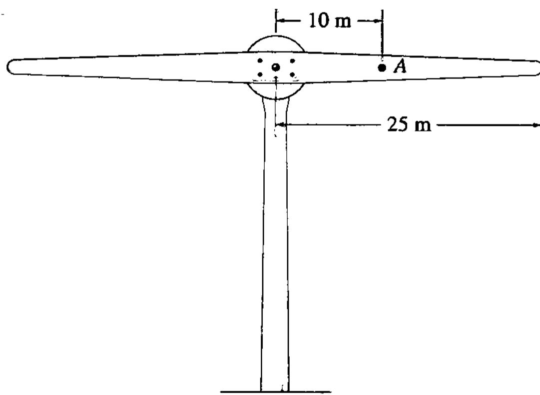
17.75. Os blocos $A$ e $B$ têm massas $m_A$ e $m_B$, respectivamente, onde $m_A > m_B$. Se a polia pode ser tratada como um disco de massa $M$, determine a aceleração do bloco $A$. Despreze a massa da corda e qualquer escorregamento na polia.



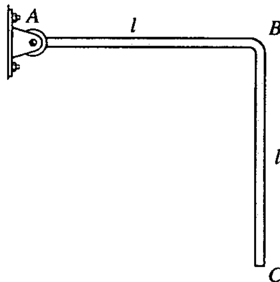

Problema 17.75

*17.76. A turbina leve consiste num rotor acionado por um torque agindo no seu centro. Num dado instante, o rotor está na posição horizontal e tem uma velocidade angular de 15 rad/s e uma aceleração angular de 8 rad/s$^2$ no sentido horário. Determine a força normal, a força cisalhante e o momento fletor numa seção transversal em $A$. Suponha que o rotor tenha 50 m de comprimento e massa de 3 kg/m.

17.77. Solta-se a barra a partir do repouso na posição mostrada na figura. Determine o momento fletor inicial em $B$. Cada trecho da barra tem massa $m$ e comprimento $l$.

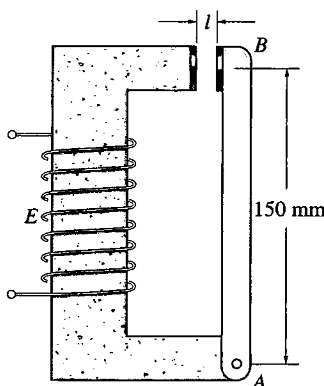



**Problema 17.76**



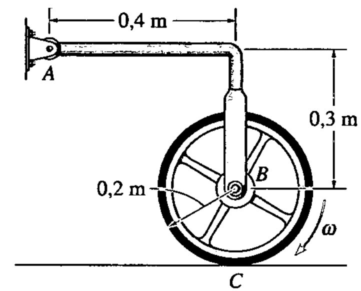

**Problema 17.77**

**17.78.** A armadura (barra delgada) $AB$ tem massa de 0,2 kg e pode girar em torno do pino $A$. O movimento é controlado por um eletroímã $E$, que exerce na armadura em $B$ uma força atrativa $F_B = (0{,}2(10^{-3})l^{-2})$ N, onde $l$, em metros, é a distância de separação entre a armadura e o eletroímã. Se a armadura está no plano horizontal e inicialmente em repouso, determine a velocidade do contato em $B$ no instante em que $l = 0{,}01$ m. Inicialmente, $l = 0{,}02$ m.



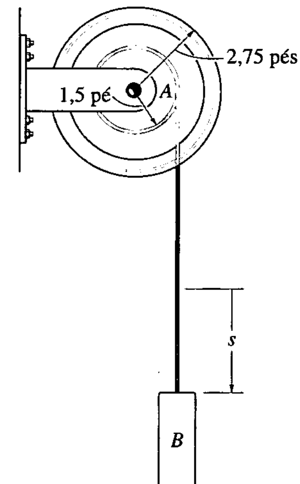

**Problema 17.78**

**17.79.** A roda tem massa de 25 kg e raio de giração $k_B = 0{,}15$ m. Ela está girando inicialmente com velocidade angular $\omega_1 = 40$ rad/s. Se a roda é então posta no solo, para o qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}5$, determine o tempo necessário para cessar o movimento. Quais são os componentes horizontal e vertical da reação que o pino $A$ exerce em $AB$ durante esse tempo? Despreze a massa de $AB$.



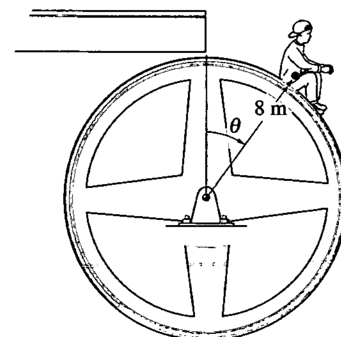

**Problema 17.79**

***17.80.** A corda está enrolada no cilindro de uma bobina. Se um bloco $B$ de 5 lb suspenso pela corda é solto a partir do repouso, determine a velocidade angular da bobina quando $t = 3$ s. Despreze a massa da corda. A bobina tem peso de 180 lb, e o seu raio de giração em relação ao eixo $A$ é $k_A = 1{,}25$ pé. Resolva o problema de duas maneiras: primeiro considerando o sistema formado pelo bloco e a bobina e, então, considerando separadamente o bloco e a bobina.



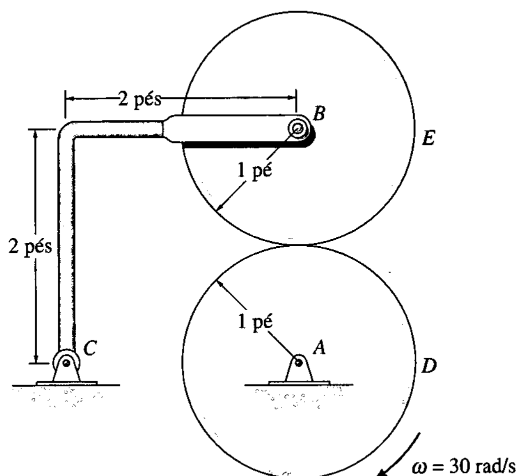

**Problema 17.80**

■**17.81.** Um menino de 40 kg senta-se na periferia de uma roda de 400 kg e raio de giração $k_G = 5{,}5$ m. Se o menino parte do repouso praticamente em $\theta = 0°$, e a roda começa a girar livremente, determine o ângulo para o qual o menino começa a escorregar. O coeficiente de atrito estático entre a roda e o menino é $\mu_e = 0{,}5$. Despreze o tamanho do menino.



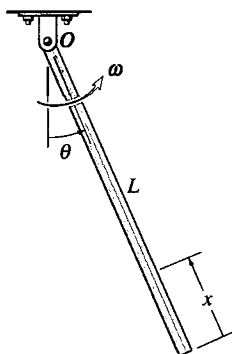

**Problema 17.81**

**17.82.** O disco $D$ gira no sentido horário com velocidade angular de 30 rad/s. O disco $E$ tem peso de 60 lb e está inicialmente em repouso quando se faz o seu contato com $D$. Determine o tempo necessário para o disco $E$ atingir a mesma velocidade angular que o disco $D$. O coeficiente de atrito cinético entre os discos é $\mu_c = 0{,}3$. Despreze o peso da barra $BC$.




**Problema 17.82**

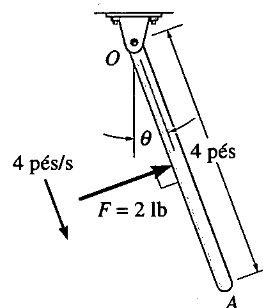
**17.83.** A barra tem peso $W$ por unidade de comprimento. Se ela está girando no plano vertical a uma velocidade angular constante $\omega$ em torno do ponto $O$, determine a força normal, a força cisalhante e o momento fletor internos, como funções de $x$ e $\theta$.



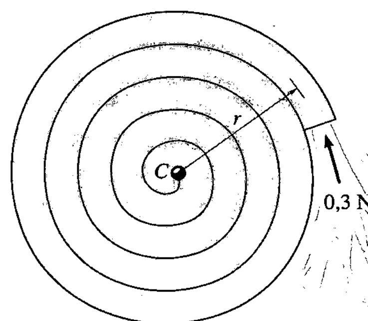

**Problema 17.83**

***17.84.** Aplica-se uma força **F** perpendicularmente a uma barra de 5 lb. A intensidade da força é constante e igual a 2 lb e seu ponto de aplicação se move de $O$ para $A$ a uma taxa constante de 4 pés/s. Se no instante $t = 0$ a barra está em repouso na posição $\theta = 0°$ e **F** está em $O$, determine a velocidade angular no instante em que a força está em $A$. De que ângulo a barra terá girado quando isso ocorrer? A barra gira no *plano horizontal*.

**17.85.** O disco $D$ está submetido a um momento no sentido anti-horário $M = (10t)$ lb · pés, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade angular do disco 2 s após o início da aplicação do momento. Devido à mola, a placa exerce sobre o disco uma força constante de 100 lb. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o disco e a placa são $\mu_e = 0{,}3$ e $\mu_c = 0{,}2$, respectivamente. *Dica:* obtenha primeiro o tempo necessário para o disco iniciar seu movimento de rotação.

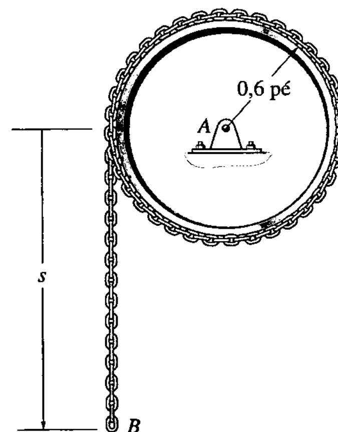



**Problema 17.84**




**Problema 17.85**

**17.86.** O tambor tem peso de 50 lb e raio de giração $k_A = 0{,}4$ pé. Uma corrente com 35 pés de comprimento e peso de 2 lb/pé está enrolada na periferia do tambor de modo a apresentar um trecho suspenso de comprimento $s = 3$ pés. Se o tambor está inicialmente em repouso, determine sua velocidade angular inicial depois que sua extremidade $B$ descer para $s = 13$ pés. Despreze a espessura da corrente.




**Problema 17.86**

## 17.5 Equações de Movimento: Movimento Plano Geral

O corpo rígido (ou placa) mostrado na Figura 17.20*a* está submetido ao movimento plano geral causado pelo sistema de forças e momentos de binário externos. A Figura 17.20*b* mostra os diagramas de corpo livre e dinâmico para o corpo. Se um sistema inercial de coordenadas *x* e *y* for escolhido como se mostra na figura, as três equações de movimento poderão ser escritas como

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha \end{aligned} \qquad (17.17)$$

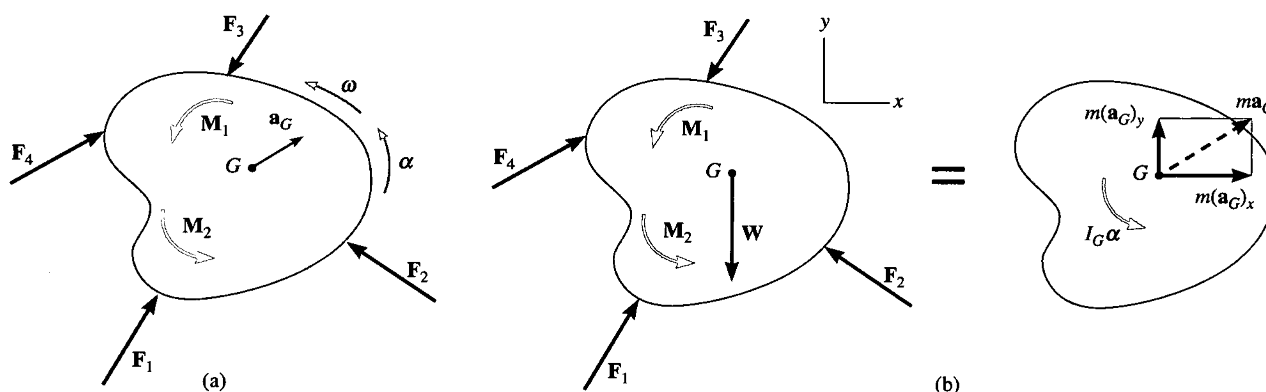


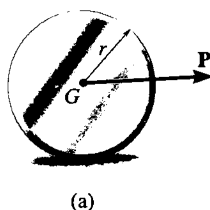

**Figura 17.20**

Em alguns problemas poderá ser conveniente somar os momentos (ou torques) em relação a um ponto *P* diferente de *G*. Em geral, isso é feito para se eliminarem do somatório dos momentos as forças desconhecidas. Quando usadas nesse sentido mais geral, as três equações de movimento se tornam

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma M_P &= \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \end{aligned} \qquad (17.18)$$

Nesta última equação $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ representa a soma dos momentos de $I_G\alpha$ e $m\mathbf{a}_G$ (ou seus componentes) em relação a *P*, como determinado pelo diagrama dinâmico.

***Problemas de Rolamento com Atrito.*** Há uma classe de problemas de dinâmica do movimento plano que merece atenção especial. Esses problemas envolvem rodas, cilindros ou corpos de forma semelhante, que rolam sobre uma superfície plana *áspera*. Devido aos carregamentos aplicados, podemos não saber se o corpo *rola sem escorregar* ou se *ele escorrega enquanto rola*. Por exemplo, consideremos o disco homogêneo mostrado na Figura 17.21*a*, que possui massa *m* e está submetido a uma força horizontal conhecida *P*. A Figura 17.21*b* mostra o diagrama de corpo livre. Como $\mathbf{a}_G$ está orientada para a direita e $\boldsymbol{\alpha}$ indica rotação no sentido horário, temos



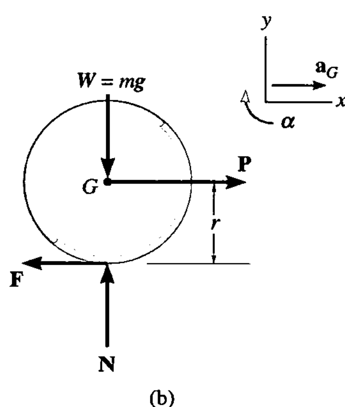




**Figura 17.21**

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad P - F = ma_G \qquad (17.19)$$

$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y;\qquad N - mg = 0\qquad(17.20)$

$\circlearrowleft+\Sigma M_G = I_G\alpha;\qquad Fr = I_G\alpha\qquad(17.21)$

É necessário considerar uma quarta equação, pois as três equações anteriores contêm *quatro incógnitas*: $F$, $N$, $\alpha$ e $a_G$.

***Rolamento sem Escorregamento.*** Se a força de atrito $F$ for suficientemente intensa para garantir que o disco role sem escorregar, então $a_G$ estará relacionada com $\alpha$ pela equação cinemática,[9]

$(\circlearrowleft+)\qquad a_G = \alpha r\qquad(17.22)$

As quatro incógnitas podem ser determinadas *resolvendo-se* o *sistema* de equações formado pelas equações 17.19 a 17.22. Obtida a solução, a hipótese de não escorregamento deve ser *verificada*. Lembremos que, para não ocorrer escorregamento, $F \leq \mu_e N$, onde $\mu_e$ é o coeficiente de atrito estático. Se a inequação for satisfeita, o problema estará resolvido. Todavia, se $F > \mu_e N$, a solução deverá ser refeita, pois, nesse caso, o disco escorrega enquanto rola.

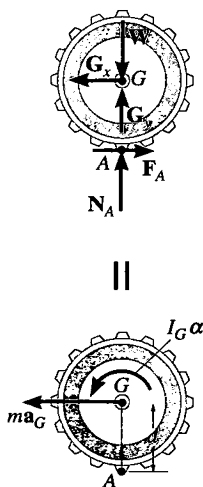
***Rolamento com Escorregamento.*** Se há escorregamento, $\alpha$ *e* $a_G$ são *independentes*, de modo que não podemos aplicar a Equação 17.22. Nesse caso, a intensidade da força de atrito relaciona-se com a da força normal de contato:

$$F = \mu_k N\qquad(17.23)$$

onde $\mu_c$ é o coeficiente de atrito cinético.

Nesse caso, as equações 17.19 a 17.21 e 17.23 devem ser usadas para se resolver o problema. É importante sempre ter em mente que para usar as equações 17.22 ou 17.23 é necessário haver consistência nos sentidos dos vetores. No caso da Equação 17.22, $\mathbf{a}_G$ deverá apontar para a direita quando $\boldsymbol{\alpha}$ indicar rotação no sentido horário, como é exigido pelo rolamento. Além disso, na Equação 17.23, **F** deverá apontar para a esquerda, opondo-se ao sentido do escorregamento para a direita (Figura 17.21*b*). Por outro lado, se essas equações *não são usadas*, podemos supor qualquer sentido para esses vetores. Logo, se os valores numéricos calculados para essas quantidades forem negativos, os vetores terão os sentidos opostos aos arbitrados. Os exemplos 17.15 e 17.16 ilustram numericamente esses conceitos.






*O rolo compactador apresenta movimento plano geral durante o avanço da máquina. As forças mostradas no diagrama de corpo livre para o rolo produzem os efeitos mostrados no diagrama dinâmico. Se somarmos os momentos em relação ao centro de massa, G, então $\Sigma M_G = I_G\alpha$. Todavia, se a soma for efetuada em relação ao ponto A, então $\circlearrowright+\Sigma M_A = I_G\alpha + (ma_G)d$.*

[9] Veja o Exemplo 16.3 ou o 16.14.

## PRODEDIMENTO PARA ANÁLISE

Os problemas de dinâmica que envolvem movimento plano geral de um corpo rígido podem ser resolvidos usando-se o seguinte procedimento.

*Diagrama de Corpo Livre*

- Estabeleça um sistema inercial de coordenadas $x$, $y$ e construa o diagrama de corpo livre para o corpo em análise.
- Especifique a direção e o sentido da aceleração do centro de massa, $\mathbf{a}_G$, e da aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ do corpo.
- Calcule o momento de inércia $I_G$.
- Identifique as incógnitas do problema.
- Se decidir usar equação do movimento de rotação $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M})_P$; construa o diagrama dinâmico para ajudar a 'visualizar' os 'momentos' dos componentes $m(\mathbf{a}_G)x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ que farão parte da soma dos momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

*Equações de Movimento*

- Aplique as três equações de movimento seguindo a convenção estabelecida para os sinais.
- Na presença de atrito, há a possibilidade de movimento sem escorregamento ou tombamento. Cada uma dessas possibilidades deve ser considerada na análise do movimento.

*Cinemática*

- Use a cinemática se uma solução completa não puder ser obtida estritamente com as equações de movimento.
- Se houver *vínculos* (restrições ao movimento) impostos por suportes, equações adicionais poderão ser obtidas utilizando-se $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, que relaciona as acelerações de quaisquer dois pontos $A$ e $B$ do corpo.
- Quando uma roda, um disco, um cilindro ou uma bola rolam sem escorregar, então $a_G = \alpha r$.

## EXEMPLO 17.14

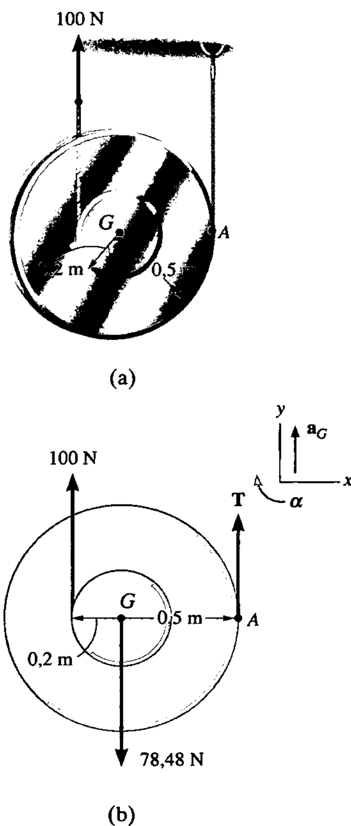



**Figura 17.22**

A bobina mostrada na Figura 17.22*a* tem massa de 8 kg e raio de giração $k_G$ = 0,35 m. Se as cordas de massas desprezíveis estão enroladas no cilindro central e na periferia, como mostrado na figura, determine a aceleração angular da bobina.

### SOLUÇÃO I

***Diagrama de Corpo Livre.*** Consideremos a Figura 17.22*b*. A força de 100 N causa uma aceleração $\mathbf{a}_G$ para cima. Além disso, $\boldsymbol{\alpha}$ corresponde a um movimento de rotação no sentido horário, pois a bobina enrola a corda em sua periferia.

Há três incógnitas: $T$, $a_G$ e $\alpha$. O momento de inércia da bobina em relação ao seu centro de massa é

$$I_G = mk_G^2 = 8\,\text{kg}(0{,}35\,\text{m})^2 = 0{,}980\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

***Equações de Movimento.***

$$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y;\quad T + 100\,\text{N} - 78{,}48\,\text{N} = (8\,\text{kg})a_G \qquad (1)$$

$$\circlearrowright+\Sigma M_G = I_G\alpha;\quad 100\,\text{N}(0{,}2\,\text{m}) - T(0{,}5\,\text{m}) = (0{,}980\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \qquad (2)$$

***Cinemática.***

Obtemos uma solução completa se usamos a cinemática para relacionar $a_G$ com $\alpha$. Nesse caso, a bobina 'rola sem escorregar' na corda em $A$. Podemos usar os resultados do Exemplo 16.3 ou 16.14, de forma que

$$(\circlearrowright+)a_G = \alpha r, \qquad a_G = 0{,}5\alpha \qquad (3)$$

Resolvendo as equações 1 a 3, temos

$$\alpha = 10{,}3 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

$$a_G = 5{,}16 \text{ m/s}^2$$

$$T = 19{,}8 \text{ N}$$

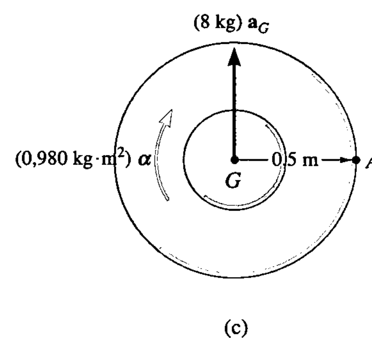



**Figura 17.22**

## SOLUÇÃO II

***Equações de Movimento.*** Podemos eliminar a incógnita $T$ somando os momentos em relação ao ponto $A$. Dos diagramas de corpo livre e dinâmico (figuras 17.22*b* e 17.22*c*), temos

$$\curvearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \quad 100 \text{ N}(0{,}7 \text{ m}) - 78{,}48 \text{ N}(0{,}5 \text{ m}) = (0{,}980 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [(8 \text{ kg})a_G](0{,}5 \text{ m})$$

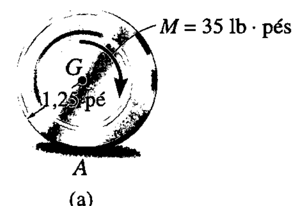
Usando a Equação 3:

$$\alpha = 10{,}3 \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resposta}$$

---

## EXEMPLO 17.15

A roda de 50 lb mostrada na Figura 17.23*a* tem raio de giração $k_G = 0{,}70$ pé. Considerando a aplicação de um torque de binário de 35 lb · pés à roda, determine a aceleração do seu centro de massa $G$. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre a roda e o plano são $\mu_e = 0{,}3$ e $\mu_c = 0{,}25$, respectivamente.



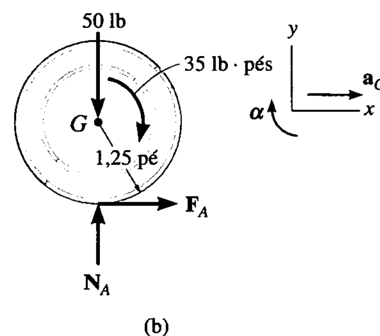




**Figura 17.23**

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Por inspeção da Figura 17.23*b*, vemos que o torque impõe à roda uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ (sentido horário). Em conseqüência, a aceleração do centro de massa $\mathbf{a}_G$ orienta-se para a direita. O momento de inércia é

$$I_G = mk_G^2 = \frac{50 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}(0{,}70 \text{ pé})^2 = 0{,}761 \text{ slug}\cdot\text{pé}^2$$

As incógnitas são $N_A$, $F_A$, $a_G$ e $\alpha$.

***Equações de Movimento.***

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_A = \frac{50 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 50 \text{ lb} = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \quad 35 \text{ lb}\cdot\text{pés} - 1{,}25 \text{ pé}(F_A) = (0{,}761 \text{ slug}\cdot\text{pé}^2)\alpha \qquad (3)$$

Necessitamos de uma quarta equação para resolver o problema.

***Cinemática (Sem Escorregamento).*** Com essa hipótese:

$$(\curvearrowright +) \qquad a_G = (1{,}25 \text{ pé})\alpha \qquad (4)$$

Resolvendo as equações 1 a 4:

$$N_A = 50{,}0 \text{ lb} \qquad F_A = 21{,}3 \text{ lb}$$

$$\alpha = 11{,}0 \text{ rad/s}^2 \qquad a_G = 13{,}7 \text{ pés/s}^2$$

A hipótese inicial de que não há escorregamento exige $F_A \leq \mu_e N_A$. Todavia, uma vez que 21,3 lb > 0,3(50 lb) = 15 lb, a roda escorrega enquanto rola.

***(Com Escorregamento).*** A Equação 4 não é válida, logo $F_A = \mu_c N_A$ ou

$$F_A = 0{,}25 N_A \tag{5}$$

Resolvendo as equações 1 a 3 e 5, obtemos

$$N_A = 50{,}0 \text{ lb} \qquad F_A = 12{,}5 \text{ lb}$$

$$\alpha = 25{,}5 \text{ rad/s}^2$$

$$a_G = 8{,}05 \text{ pés/s}^2 \rightarrow$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 17.16

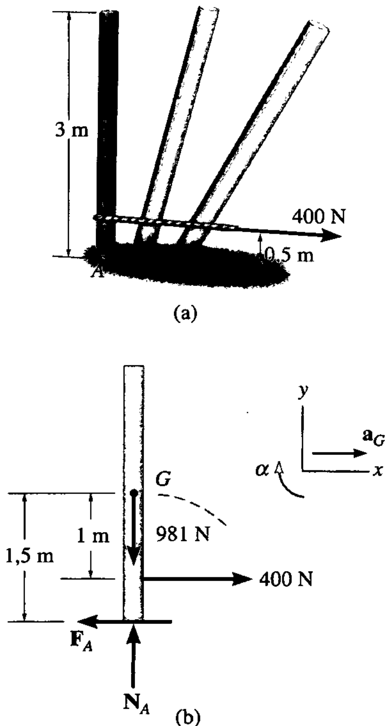



**Figura 17.24**

O poste delgado e uniforme mostrado na Figura 17.24*a* tem massa de 100 kg e momento de inércia $I_G = 75$ kg · m². Se os coeficientes de atrito estático e cinético entre a extremidade do poste e o piso são $\mu_e = 0{,}3$ e $\mu_c = 0{,}25$, respectivamente, determine a aceleração angular no instante em que se aplica a força horizontal de 400 N. O poste está inicialmente em equilíbrio.

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Consideremos a Figura 17.24*b*. O movimento do centro de massa *G* ocorrerá ao longo de uma curva desconhecida de raio de curvatura $\rho$, cuja tangente é inicialmente paralela ao eixo *y*. Não há componente normal ou componente *y* da aceleração, pois o poste está inicialmente em repouso, $\mathbf{v}_G = 0$, de modo que $(a_G)_y = v_G^2/\rho = 0$. Supomos que o centro de massa acelera para a direita e que o poste tem aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ no sentido horário. As incógnitas são $N_A$, $F_A$, $a_G$ e $\alpha$.

***Equações de Movimento.***

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 400 \text{ N} - F_A = (100 \text{ kg}) a_G \tag{1}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 981 \text{ N} = 0 \tag{2}$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \quad F_A(1{,}5 \text{ m}) - 400 \text{ N}(1 \text{ m}) = (75 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \tag{3}$$

É necessário considerar uma quarta equação para resolver o problema.

***Cinemática (Sem Escorregamento).*** Nesse caso, o ponto *A* age como um 'pivô' de tal forma que, se $\alpha$ tem sentido horário, então $a_G$ está orientada para a direita.

$$\curvearrowright + a_G = \alpha r_{AG}; \qquad a_G = (1{,}5 \text{ m})\alpha \tag{4}$$

Resolvendo as equações 1 a 4, temos

$$N_A = 981 \text{ N} \qquad F_A = 300 \text{ N}$$

$$a_G = 1 \text{ m/s}^2 \qquad \alpha = 0{,}667 \text{ rad/s}^2$$

O teste da hipótese de que não há escorregamento exige que $F_A \leq \mu_e N_A$. Todavia, 300 N > 0,3(981 N). (Há escorregamento em *A*.)

***(Com Escorregamento).*** Nesse caso, a Equação 4 *não* se aplica, sendo necessário considerar $F_A = \mu_c N_A$. Logo:

$$F_A = 0{,}25 N_A \qquad (5)$$

A solução das equações 1 a 3 e 5 é

$N_A = 981$ N $\qquad F_A = 245$ N $\qquad a_G = 1{,}55$m/s2

$$\alpha = -0{,}428 \text{ rad/s}^2 = 0{,}428 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## EXEMPLO 17.17

A roda de 30 kg mostrada na Figura 17.25*a* tem centro de massa $G$ e raio de giração $k_G = 0{,}15$ m. Se a roda está inicialmente em repouso e é abandonada na posição mostrada na figura, determine sua aceleração angular. Não há escorregamento.

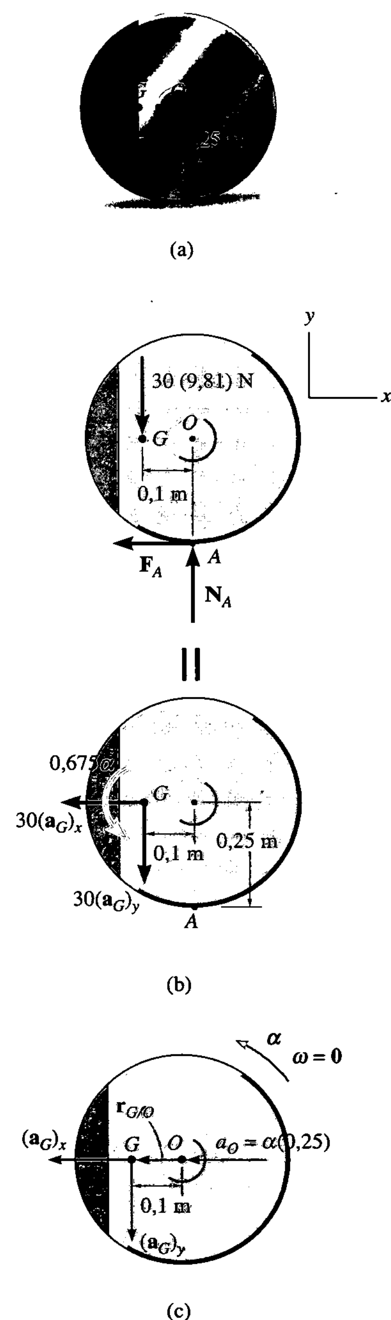


**Figura 17.25**

## SOLUÇÃO

***Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico.*** As duas incógnitas $F_A$ e $N_A$ mostradas no diagrama de corpo livre (Figura 17.25*b*) poderão ser eliminadas se somarmos os momentos em relação ao ponto $A$. O diagrama dinâmico acompanha a solução para se ilustrar a aplicação de $\Sigma(\mathcal{M}_k)_A$. Como o ponto $G$ se move numa trajetória curvilínea, os dois componentes $m(\mathbf{a}_G)x$ e m$(\mathbf{a}_G)y$ são mostrados no diagrama dinâmico (Figura 17.25*b*).

O momento de inércia é

$$I_G = mk_G^2 = 30(0{,}15)^2 = 0{,}675 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Há cinco incógnitas: $F_A$, $N_A$, $(a_G)x$, $(a_G)y$ e $\alpha$.

***Equação de Movimento.*** Aplicando a equação do movimento de rotação em torno do ponto $A$ para eliminarmos $F_A$ e $N_A$, temos

$$\circlearrowright+\Sigma M_A = \Sigma(\text{m}_k)_A; \qquad 30(9{,}81) \text{ N}(0{,}1 \text{ m}) =$$

$$(0{,}675 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha + (30 \text{ kg})(a_G)_x(0{,}25 \text{ m}) + (30 \text{ kg})(a_G)_y(0{,}1 \text{ m}) \qquad (1)$$

Há três incógnitas nessa equação: $(a_G)_x$, $(a_G)_y$ e $\alpha$.

***Cinemática.*** Usando-se a cinemática, $(a_G)_x$, $(a_G)_y$ podem ser relacionadas com $\alpha$. Como se mostra na Figura 17.25*c*, essas acelerações devem ter os mesmos sentidos dos vetores correspondentes mostrados no diagrama dinâmico, pois estamos procurando uma solução simultânea com a Equação 1. Uma vez que não há escorregamento, $a_0 = \alpha r = \alpha(0{,}25 \text{ m})$, e o sentido é para a esquerda (Figura 17.25*c*). Além disso, $\omega = 0$, pois a roda está inicialmente em repouso. Aplicando a equação da aceleração ao ponto $O$ (ponto de base) e ao ponto $G$, temos

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/O} - \omega^2 \mathbf{r}_{G/O}$$

$$-(a_G)_x\mathbf{i} - (a_G)_y\mathbf{j} = -\alpha(0{,}25)\mathbf{i} + (\alpha\mathbf{k}) \times (-0{,}1\mathbf{i}) - \mathbf{0}$$

Expandindo e igualando os correspondentes termos em **i** e **j**, temos

$$(a_G)_x = \alpha\,(0{,}25) \qquad (2)$$

$$(a_G)_y = \alpha\,(0{,}1) \qquad (3)$$

Resolvendo as equações 1 a 3 obtemos

$$\alpha = 10{,}3 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$(a_G)_x = 2{,}58 \text{ m/s}^2$$

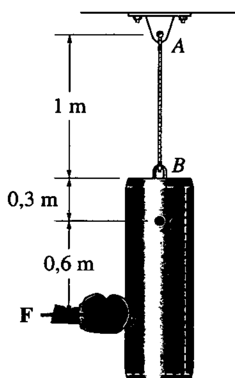
$$(a_G)_y = 1{,}03 \text{ m/s}^2$$

Mostre que $F_A = 77{,}4$ N e $N_A = 263$ N.

## PROBLEMAS

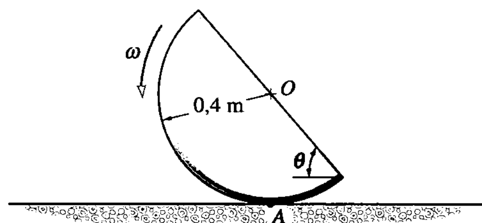
**17.87.** Se o disco mostrado na Figura 17.21*a rola sem escorregar*, mostre que, quando os momentos são somados em relação ao centro instantâneo de velocidade nula, *CI*, é possível usar a equação de momento $\Sigma M_{IC} = I_{IC}\alpha$, onde $I_{CI}$ representa o momento de inércia do disco em relação ao eixo instantâneo de velocidade nula.

***17.88.** O saco de treinamento tem 20 kg e raio de giração $k_G = 0{,}4$ m, em relação ao centro de massa *G*. Se ele está inicialmente em repouso e é submetido a uma força horizontal $F = 30$ N, determine a aceleração angular inicial do saco e a tensão no cabo de suporte *AB*.



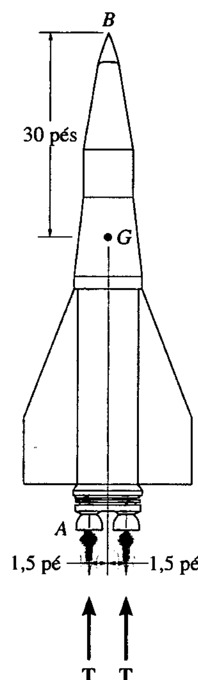

**Problema 17.88**

**17.89.** O disco semicircular com 10 kg está girando a uma velocidade angular $\omega = 4$ rad/s, no instante em que $\theta = 60°$. Se o coeficiente de atrito estático em *A* é $\mu_e = 0{,}5$, determine se o corpo escorrega nesse instante.



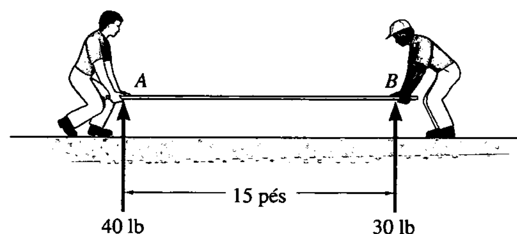

**Problema 17.89**

**17.90.** O foguete tem peso de 20.000 lb, centro de massa em *G* e raio de giração $k_G = 21$ pés, em torno de seu centro de massa, no instante do início da ignição. Cada um dos motores fornece um empuxo $T = 50.000$ lb. Num dado instante, o motor *A* falha repentinamente. Determine a aceleração angular do foguete e a aceleração de seu nariz *B*.



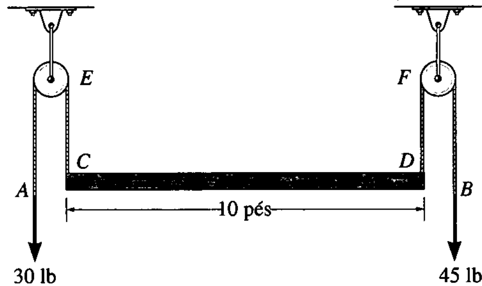

**Problema 17.90**

**17.91.** Dois homens exercem forças verticais constantes de 40 lb e 30 lb nas extremidades *A* e *B* de uma prancha uniforme de 50 lb. Se a prancha está inicialmente em repouso, determine a sua aceleração angular e a aceleração de seu centro de massa. Suponha que a prancha seja uma barra delgada.




**Problema 17.91**

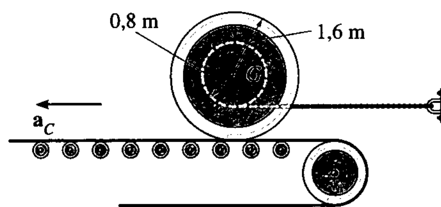
*17.92. A tábua uniforme pesa 50 lb e está suspensa pelas cordas $C$ e $D$. Se essas cordas estão submetidas a forças constantes de 30 lb e 45 lb, respectivamente, determine a aceleração angular da tábua e a aceleração de seu centro de massa. Suponha que a tábua seja uma placa fina. Despreze a massa das polias em $E$ e $F$.




Problema 17.92

17.93. A bobina tem massa de 500 kg e raio de giração $k_G$ = 1,30 m. Ela está apoiada na superfície de uma esteira transportadora que apresenta coeficientes de atrito iguais a 0,5 (atrito estático) e 0,4 (atrito cinético). Se a esteira acelera a uma taxa de 1 m/s², determine a tensão inicial no fio e a aceleração angular da bobina. A bobina está inicialmente em repouso.

17.94. A bobina tem massa de 500 kg e raio de giração $k_G$ = 1,30 m. Ela está apoiada na superfície de uma esteira transportadora que apresenta um coeficiente de atrito estático igual a 0,5. Determine a aceleração máxima $a_C$ que a esteira pode ter sem que haja escorregamento da bobina. Determine também a tensão inicial no fio e a aceleração angular da bobina. Considere a bobina inicialmente em repouso.

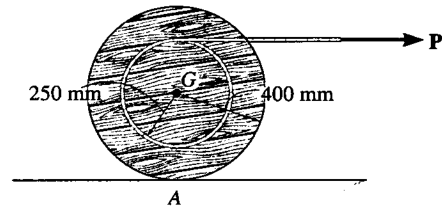



Problemas 17.93/94

17.95. A bobina tem massa de 100 kg e raio de giração $k_G$ = 0,3 m. Se os coeficientes de atrito em $A$ são iguais a 0,2 (atrito estático) e 0,15 (atrito cinético), determine a aceleração angular da bobina se $P$ = 50 N.

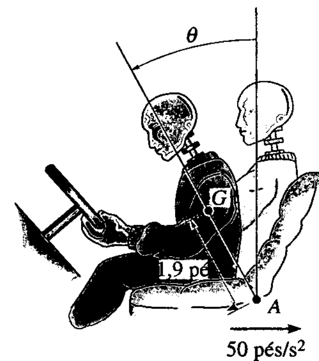
*17.96. Resolva o Problema 17.95, considerando a corda e a força $P$ = 50 N verticais (**P** para cima).

17.97. A bobina tem massa de 100 kg e raio de giração $k_G$ = 0,3 m. Se os coeficientes de atrito em $A$ são iguais a 0,2 (atrito estático) e 0,15 (atrito cinético), determine a aceleração angular da bobina se $P$ = 600 N.



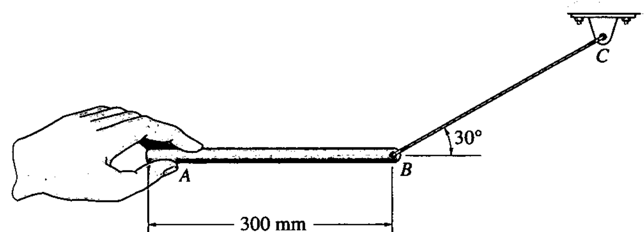

Problemas 17.95/96/97

17.98. A parte superior do boneco tem peso de 75 lb, centro de gravidade $G$ e raio de giração $k_G$ = 0,7 pé, em relação a $G$. Graças ao cinto de segurança, essa parte do corpo pode ser considerada como ligada por um pino ao banco do carro. Se um impacto causa no carro uma desaceleração de 50 pés/s², determine a velocidade angular do corpo para um ângulo $\theta$ = 30°.




Problema 17.98

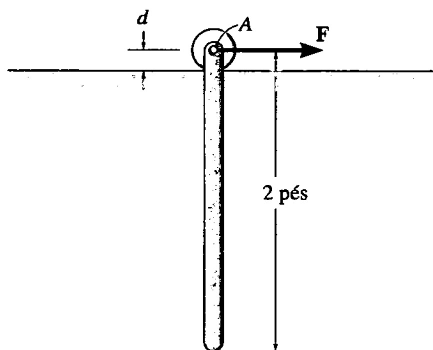
17.99. A barra delgada tem massa de 2 kg e está presa por uma corda $BC$. Se ela é solta a partir do repouso na posição mostrada na figura, determine a sua aceleração angular inicial e a tensão na corda.




Problema 17.99

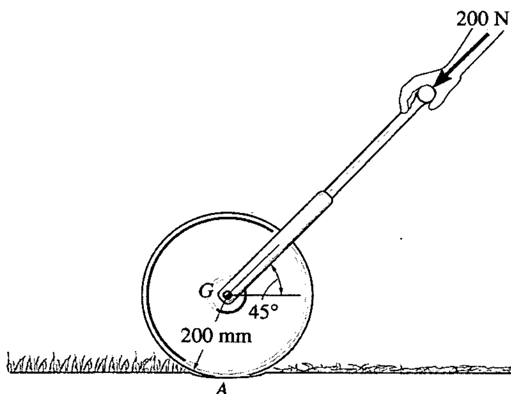
*17.100. Uma barra de 10 lb está ligada por um pino em $A$ a um rolete que se move num trilho horizontal. Se barra está inicialmente em repouso e uma força horizontal $F$ = 15 lb é aplicada ao rolete, determine a aceleração deste último. Despreze a massa do rolete e o seu raio $d$.

17.101. Resolva o Problema 17.100 supondo que o rolete em $A$ é substituído por um bloco deslizante que tem massa desprezível. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o trilho é $\mu_c$ = 0,2. Despreze a dimensão $d$ e o tamanho do bloco.



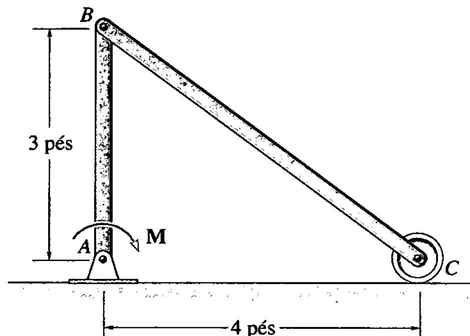

**Problemas 17.100/101**

**17.102.** O cortador de grama tem massa de 80 kg e raio de giração $k_G = 0{,}175$ m. Se ele é empurrado com uma força de 200 N quando sua haste está a 45°, determine a sua aceleração angular. Os coeficientes de atrito entre o solo e o cortador são iguais a 0,12 (atrito estático) e 0,1 (atrito cinético).



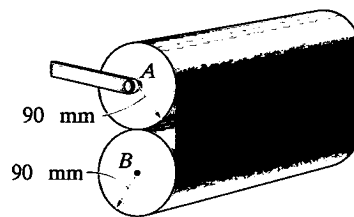

**Problema 17.102**

**17.103.** As duas barras ligadas por pinos têm peso de 10 lb/pé. Se um torque $M = 60$ lb é aplicado à barra $AB$, determine a reação vertical inicial em $C$ e os componentes horizontal e vertical da reação em $B$. Despreze o tamanho do rolete em $C$. As barras estão inicialmente em repouso.



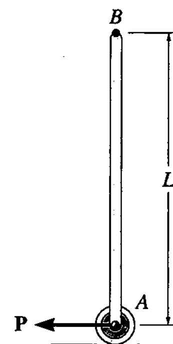

**Problema 17.103**

***17.104.** Uma tira de papel bem longa está enrolada como se mostra na figura. Cada rolo tem massa de 8 kg. Apenas o rolo $A$ é suportado por um pino pelo seu centro. Se $B$ é posto em contato com $A$ e, então, liberado a partir do repouso, determine a tensão inicial no papel entre os rolos e a aceleração angular de cada rolo. Considere que os rolos são cilindros.



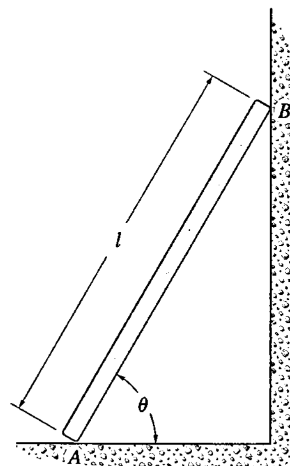

**Problema 17.104**

**17.105.** Uma barra uniforme de massa $m$ e comprimento $L$ é mantida na posição vertical, graças uma força horizontal **P** aplicada no rolete em $A$. Determine a aceleração angular inicial da barra e a aceleração de seu ponto $B$.




**Problema 17.105**

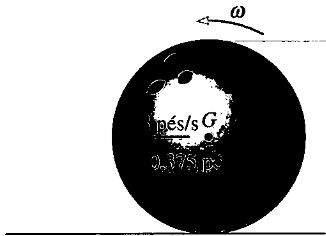
**17.106.** A escada tem peso $W$ e está apoiada numa parede lisa e no solo. Determine sua aceleração angular em função de $\theta$ após ser solta e podendo escorregar para baixo. Considere a escada como uma barra delgada.




**Problema 17.106**

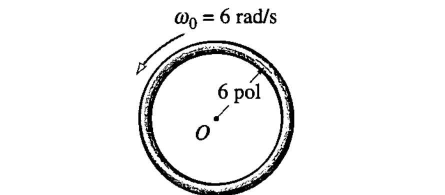
**17.107.** A bola de boliche com 16 lb é lançada horizontalmente sobre a pista de tal modo que a sua velocidade angular inicial é $\omega = 0$ e a velocidade inicial de seu centro de massa é $v = 8$ pés/s. Se o coeficiente de atrito cinético

entre a pista e a bola é $\mu_c = 0{,}12$, determine a distância que a bola se desloca antes de começar a rolar sem escorregar. Despreze os orifícios para os dedos e suponha que a bola tem densidade uniforme.



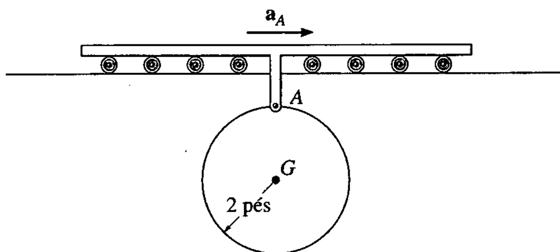

**Problema 17.107**

***17.108.** Comunica-se ao aro de 10 lb uma velocidade angular inicial de 6 rad/s, quando ele é posto sobre a superfície. Se o coeficiente de atrito cinético entre o aro e a superfície é $\mu_c = 0{,}3$, determine a distância percorrida pelo corpo até que ele pare de escorregar.




**Problema 17.108**

**17.109.** Uma placa circular está suspensa por meio de um pino em $A$. Se o pino está preso a um sistema com roletes ao qual se comunica uma aceleração $a_A = 3$ pés/s$^2$, determine os componentes horizontal e vertical da reação em $A$ e a aceleração do centro de massa $G$ da placa. A placa parte do repouso.

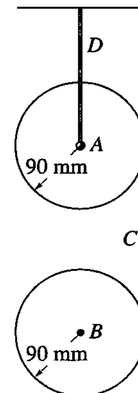



**Problema 17.109**

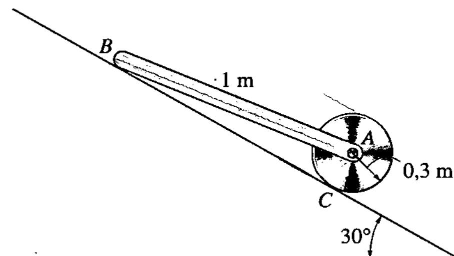
**17.110.** Uma corda $C$ está enrolada em dois discos, como se mostra na figura. Se os discos são abandonados a partir do repouso, determine a tensão na corda fixa $D$. Despreze a massa da corda.

■**17.111.** O sistema mostrado na figura consiste em um disco de 8 kg e uma barra de 10 kg ligados por um pino. Se o sistema é solto a partir do repouso, determine a aceleração angular do disco. Os coeficientes de atrito entre o disco e o plano inclinado são de 0,6 (estático) e 0,4 (cinético). Despreze o atrito em $B$.

***17.112.** Resolva o Problema 17.111, considerando que a barra foi removida e que os coeficientes de atrito entre o disco e o plano inclinado são de 0,15 (estático) e 0,1 (cinético).

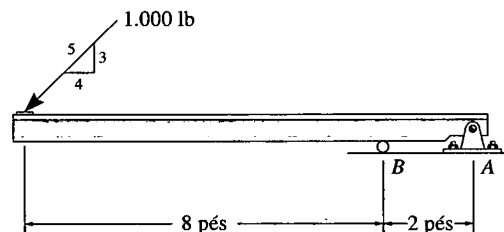



**Problema 17.110**




**Problemas 17.111/112**

**17.113.** A viga de 500 lb suportada em $A$ e $B$ está submetida a uma força de 1.000 lb como se mostra na figura. Se o pino em $A$ se rompe repentinamente, determine a aceleração angular inicial da viga e a força do rolete em $B$. Suponha que a espessura da barra é desprezível.

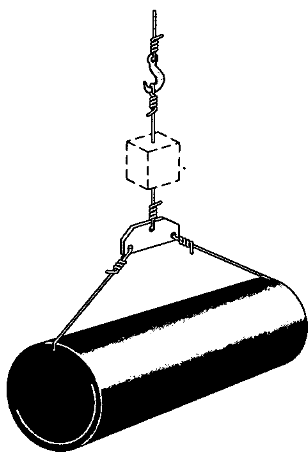



**Problema 17.113**

# ESTUDO DE PROJETOS

## 17.1P PROJETO DE UM DINAMÔMETRO

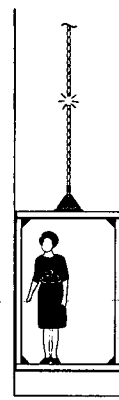
Para testar a resistência dinâmica de cabos, deve-se utilizar um instrumento denominado *dinamômetro,* que medirá a tensão num cabo quando este eleva, em movimento acelerado, um objeto pesado. Projete um dinamômetro, baseado no uso de uma mola ou múltiplas molas, de forma que ele possa ser utilizado num cabo que levanta a uma aceleração de 2 m/s$^2$ um tubo de 300 kg. Apresente um desenho e explique como o seu dinamômetro funciona.



**Problema 17.1P**

## 17.2P PROJETO DE UM FREIO PARA UM PEQUENO ELEVADOR

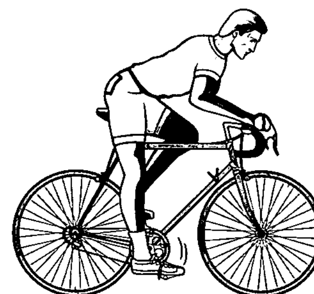
Um pequeno elevador é operado por meio de um guincho. Por razões de segurança é necessário instalar um mecanismo de freio que atuará automaticamente no caso de falha do cabo durante a operação. Projete um mecanismo de freio usando elementos de aço e molas. Suponha que o elevador e seu conteúdo tenham uma massa de 300 kg e que se desloquem a 2,5 m/s. A desaceleração máxima permissível para interromper o movimento deve ser de 4 m/s$^2$. Suponha que o coeficiente de atrito cinético entre elementos de aço e as paredes do elevador seja de 0,3. O espaço entre a estrutura do elevador e cada parede é de 50 mm. Apresente um desenho em escala de seu projeto juntamente com uma análise das forças, mostrando que seu projeto atenderá às condições de movimento exigidas. Discuta os aspectos de segurança e confiabilidade do mecanismo.



**Problema 17.2P**

## 17.3P DESEMPENHO SEGURO DE UMA BICICLETA

Um dos acidentes mais comuns com bicicleta é aquele em que o ciclista é lançado para a frente passando por cima do guidão. Obtenha os valores da massa e das dimensões (incluindo a localização do centro de massa) de uma bicicleta de tamanho padrão. Considere que você é o ciclista, com o centro de massa em seu umbigo. Realize um experimento para determinar o coeficiente de atrito cinético entre as rodas e o pavimento. Com esses dados, calcule a possibilidade de um salto sobre o guidão quando se aplicam (a) somente os freios traseiros, (b) somente os dianteiros e (c) simultaneamente ambos os freios. Que efeito deve ter a altura do selim sobre esses resultados? Sugira um modo de melhorar o projeto da bicicleta e prepare um relatório sobre a segurança do ciclismo baseada em sua análise.



**Problema 17.3P**

## REVISÃO DO CAPÍTULO

As equações da cinemática do movimento retilíneo devem ser aplicadas usando-se o seguinte procedimento.

### *Sistema de Coordenadas*

- ***Momento de Inércia.*** O momento de inércia é uma medida da resistência de um corpo a mudanças em sua velocidade angular. Ele é definido por $I = \int r^2\, dm$ e tem, em geral, valores diferentes para diferentes eixos considerados. Para corpos com simetria axial, a integração é realizada, em geral, utilizando-se discos ou 'cascas' de espessuras infinitesimais.
  Muitos corpos são compostos de formas simples. Nesses casos, podemos usar valores de $I$ tabulados como aqueles fornecidos na tabela no final deste livro. Para se obter o momento de inércia de um corpo composto, em relação a um dado eixo, determina-se o momento de inércia de cada parte, em relação ao eixo, e os resultados são, então, somados. Com esse tipo de procedimento, utiliza-se freqüentemente o teorema dos eixos paralelos $I = I_G + md^2$. Os manuais também podem informar valores do raio de giração $k$ para diferentes corpos e eixos. Se a massa $m$ e o raio de giração $k$ são conhecidos, então o momento de inércia é calculado por $I = mk^2$.
- ***Equações do Movimento Plano.*** A equação que define o movimento de translação de um corpo rígido é $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$, onde $\mathbf{a}_G$ é a aceleração de seu centro de massa $G$.
  A equação que descreve o movimento de rotação do corpo é determinada calculando-se os momentos de todos os pontos do corpo, em relação ao eixo. Quando o eixo passa pelo centro de massa, o resultado se torna $\Sigma M_G = I_G\alpha$. Se os momentos são tomados em relação a algum ponto $P$ arbitrário, temos $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$. O somatório no segundo membro dessa equação representa os momentos dos vetores dinâmicos $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$, em relação ao ponto $P$.
  Para se levar em conta todos os termos nessas equações, é conveniente que sua aplicação seja acompanhada do diagrama de corpo livre, e em alguns problemas é conveniente construir o diagrama dinâmico.
- ***Translação.*** Nesse caso, $I_G\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, pois $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Se o corpo tem movimento de translação retilínea, use um sistema inercial de coordenadas $x$–$y$, caso em que as equações de movimento são

$$\Sigma F = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = 0$$

  Para movimento de translação curvilínea, use eixos inerciais $n$–$t$, de modo que

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t$$
$$\Sigma M_G = 0$$

- ***Rotação em torno de um Eixo Fixo.*** Para rotação em torno de um eixo fixo, o vetor dinâmico $m(\mathbf{a}_G)_n$ não produz momento em relação ao eixo de rotação, assim a equação de movimento reduz-se a uma forma simplificada em relação ao ponto $O$. As equações de movimento são

$$\Sigma F_n = m\omega^2 r_G \qquad \Sigma F_t = m\alpha r_G$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \quad \text{ou} \quad \Sigma M_O = I_O\alpha$$

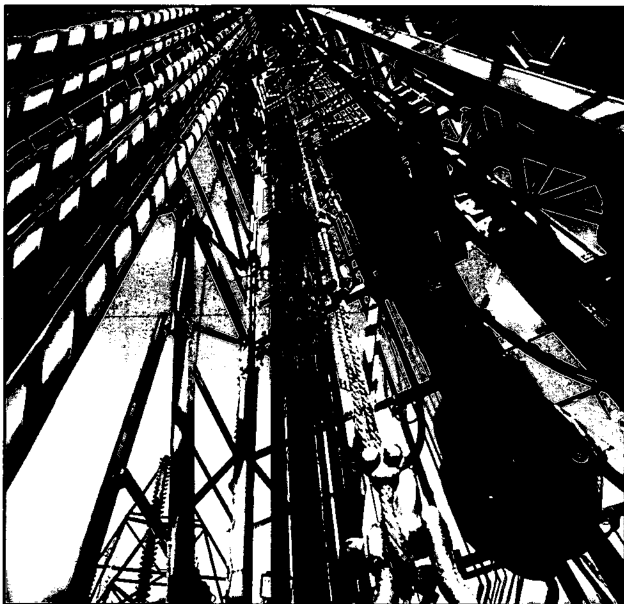
- ***Movimento Plano Geral.*** Para um movimento plano geral, temos

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x \qquad \Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \quad \text{ou} \quad \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

  Se o corpo é vinculado por seus suportes, então equações adicionais da cinemática podem ser obtidas usando-se $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ para relacionar as acelerações de quaisquer dois pontos $A$ e $B$ do corpo.




# Dinâmica do Movimento Plano de um Corpo Rígido: Trabalho e Energia


*O princípio do trabalho e energia desempenha um papel importante no movimento da maquinaria usada para içar tubos neste equipamento de perfuração.*

## Objetivos do Capítulo

- Desenvolver formulações para a energia cinética de um corpo e definir os vários modos como forças e torques realizam trabalho.
- Aplicar o princípio do trabalho e energia para resolver problemas de dinâmica do movimento plano de um corpo rígido que envolvem força, velocidade e deslocamento.
- Mostrar como a conservação de energia pode ser usada na resolução de problemas.

## 18.1 Energia Cinética

Neste capítulo aplicaremos os métodos da energia a problemas que envolvem força, velocidade e deslocamento relacionados ao movimento plano de um corpo rígido. Antes de iniciar este assunto, todavia, será necessário desenvolver um meio de se obter a energia cinética do corpo em movimento de translação, de rotação em torno de um eixo fixo ou movimento plano geral.

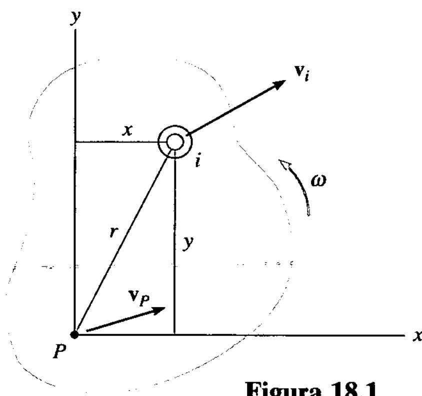


**Figura 18.1**

Para isso, consideremos o corpo rígido mostrado na Figura 18.1, que está representado por uma *placa* que se move no plano inercial *x–y*. O *i*-ésimo ponto material pertencente ao corpo tem massa *dm* e está localizado a uma distância *r* do ponto arbitrário *P*. Se num dado instante o ponto tem velocidade $\mathbf{v}_i$, então sua energia cinética é $T_i = \frac{1}{2} dm\, v_i^2$.

A energia cinética do corpo é determinada escrevendo-se expressões análogas para cada ponto e integrando-se os resultados, isto é,

$$T = \frac{1}{2}\int_m dm\, v_i^2$$

Essa equação também pode ser expressa em termos da velocidade do ponto $P$. Se a velocidade angular do corpo é $\boldsymbol{\omega}$, então da Figura 18.1 temos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P}\\ &= (v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\\ &= [(v_P)_x - \omega y]\mathbf{i} + [(v_P)_y + \omega x]\mathbf{j}\end{aligned}$$

O quadrado do módulo da velocidade $\mathbf{v}_i$ é então

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = v_i^2 &= [(v_P)_x - \omega y]^2 + [(v_P)_y + \omega x]^2\\ &= (v_P)_x^2 - 2(v_P)_x\omega y + \omega^2 y^2 + (v_P)_y^2 + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 x^2\\ &= v_P^2 - 2(v_P)_x\omega y + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 r^2\end{aligned}$$

Substituindo o resultado anterior na expressão da energia cinética, temos

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\int_m dm\right)v_P^2 - (v_P)_x\omega\left(\int_m y\,dm\right) + (v_P)_y\omega\left(\int_m x\,dm\right) + \tfrac{1}{2}\omega^2\left(\int_m r^2\,dm\right)$$

A primeira integral do segundo membro dessa equação representa a massa total $m$ do corpo. Como $\bar{y}m = \int y\,dm$ e $\bar{x}m = \int x\,dm$, então a segunda e a terceira integrais determinam o centro de massa $G$ relativamente ao ponto $P$. A última integral representa o momento de inércia $I_P$ do corpo em relação ao eixo $z$ que passa pelo ponto $P$. Logo,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 - (v_P)_x\,\omega\bar{y}m + (v_P)_y\,\omega\bar{x}m + \tfrac{1}{2}I_P\,\omega^2 \qquad (18.1)$$

Como um caso especial, se o ponto $P$ coincide com o centro de massa $G$ do corpo, $\bar{y} = \bar{x} = 0$, e, portanto,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (18.2)$$

onde $I_G$ é o momento de inércia do corpo em relação a um eixo que é perpendicular ao plano do movimento e passa pelo centro de massa. Ambos os termos no segundo membro são *sempre positivos*, pois as velocidades estão elevadas ao quadrado. Além disso, podemos verificar que esses termos têm unidades de comprimento vezes força, sendo unidades comuns m · N ou pé · lb. No entanto, observemos que no sistema SI a unidade de energia é o joule (J), com 1 J = 1 m · N.

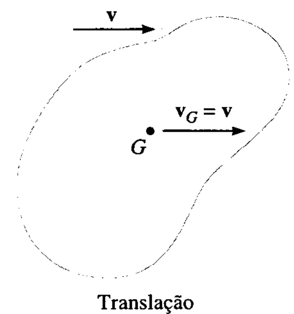


**Figura 18.2**

***Translação.*** Quando um corpo rígido de massa $m$ está submetido a uma *translação* retilínea ou curvilínea, a energia cinética de rotação é nula, pois $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Da Equação 18.2, a energia do cinética do corpo é então

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}mv_G^2} \qquad (18.3)$$

onde $v_G$ é o valor do módulo da velocidade de translação $\mathbf{v}$ no instante considerado (Figura 18.2).

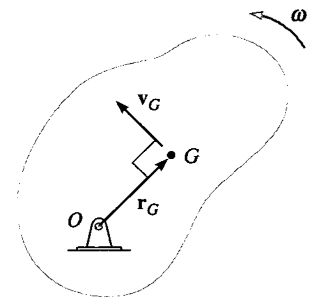
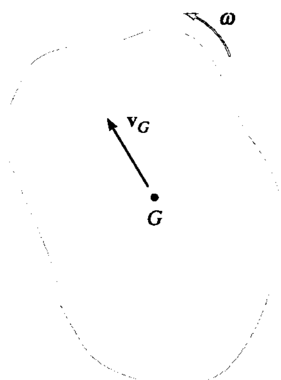


**Figura 18.3**

***Rotação em torno de um Eixo Fixo.*** Quando o corpo rígido está *girando em torno de um eixo fixo* passando pelo ponto $O$ (Figura 18.3), este tem energia cinética de *translação* e de *rotação* definida pela Equação 18.2, isto é,

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2} \qquad (18.4)$$

A energia cinética do corpo também pode ser reescrita na forma $T = \frac{1}{2}(I_G + mr_G^2)\omega^2$, observando-se que $v_G = r_G\omega$. Pelo teorema dos eixos paralelos, os termos entre parênteses representam o momento de inércia $I_O$ do




Movimento plano geral

**Figura 18.4**

corpo em relação a um eixo que é perpendicular ao plano do movimento e passa por $O$. Logo:[1]

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \tag{18.5}$$

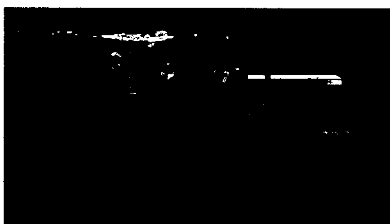
Observemos que a equação acima é equivalente à Equação 18.4, pois dá conta de *ambas* as energias cinéticas do corpo: a de translação e a de rotação.

***Movimento Plano Geral.*** Quando o corpo tem movimento plano geral (Figura 18.4), ele apresenta uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e o seu centro de massa tem velocidade $\mathbf{v}_G$. Logo, a energia cinética é definida pela Equação 18.2, isto é,

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \tag{18.6}$$

Vemos dessa equação que a energia cinética do corpo consiste na soma *escalar* da energia cinética de *translação*, $\frac{1}{2} m v_G^2$, e da energia cinética de *rotação* em torno do seu centro de massa, $\frac{1}{2} I_G \omega^2$.

Como a energia é uma quantidade escalar, a energia cinética total de corpos *ligados* é a soma das energias cinéticas de todas as suas partes móveis. Dependendo do tipo de movimento, a energia cinética de cada corpo pode ser calculada aplicando-se a Equação 18.2 ou as outras formas alternativas que acabamos de mencionar.



*A energia cinética deste compactador de solo consiste na energia cinética de translação do corpo ou da estrutura da máquina e nas energias de translação e rotação do rolo e das rodas em seu movimento plano geral. Estamos excluindo as energias cinéticas adicionais desenvolvidas pelas partes móveis do motor e da transmissão.*

## EXEMPLO 18.1

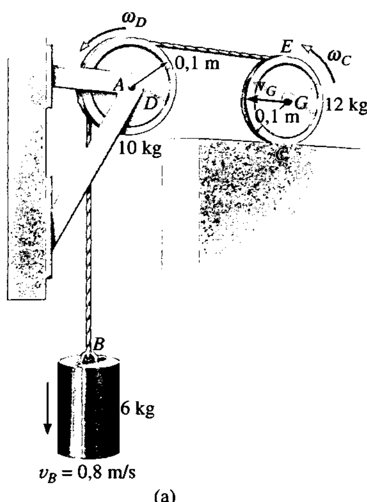



**Figura 18.5**

O sistema de três elementos mostrado na Figura 18.5*a* consiste em um bloco $B$ de 6 kg, um disco $D$ de 10 kg e um cilindro $C$ de 12 kg. Se não há escorregamento, determine a energia cinética total do sistema na situação mostrada na figura.

### SOLUÇÃO

Para calcular a energia cinética do disco e do cilindro, é necessário primeiro determinar $\omega_D$, $\omega_C$ e $v_G$ (Figura 18.5*a*). Da *cinemática* do disco,

$$v_B = r_D \omega_D; \qquad 0{,}8 \text{ m/s} = (0{,}1 \text{ m})\omega_D \qquad \omega_D = 8 \text{ rad/s}$$

Como o cilindro rola sem escorregar, o centro instantâneo de velocidade nula está no ponto de contato com o solo (Figura 18.5*b*); logo:

$$v_E = r_{E/IC} \omega_C; \qquad 0{,}8 \text{ m/s} = (0{,}2 \text{ m})\omega_C \qquad \omega_C = 4 \text{ rad/s}$$

$$v_G = r_{G/IC} \omega_C; \qquad v_G = (0{,}1 \text{ m})(4 \text{ rad/s}) = 0{,}4 \text{ m/s}$$

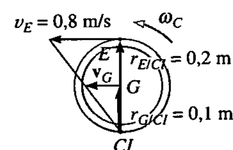
[1] Observemos a semelhança entre essa dedução e aquela de $\Sigma M_O = I_O \alpha$ (Equação 17.16). Notemos também que o mesmo resultado pode ser obtido diretamente da Equação 18.1, tomando $P$ coincidente com $O$ e observando que $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$.

*Bloco*

$$T_B = \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}(6\text{ kg})(0{,}8\text{ m/s})^2 = 1{,}92\text{ J}$$

*Disco*

$$T_D = \tfrac{1}{2}I_D\omega_D^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_D r_D^2)\omega_D^2$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0{,}1\text{ m})^2](8\text{ rad/s})^2 = 1{,}60\text{ J}$$




(b)

**Figura 18.5**

*Cilindro*

$$T_C = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_C^2 = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_C r_C^2)\omega_C^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(12\text{ kg})(0{,}4\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(12\text{ kg})(0{,}1\text{ m})^2](4\text{ rad/s})^2 = 1{,}44\text{ J}$$

A energia cinética do sistema é, portanto,

$$T = T_B + T_D + T_C$$
$$= 1{,}92\text{ J} + 1{,}60\text{ J} + 1{,}44\text{ J} = 4{,}96\text{ J}$$

## 18.2 O TRABALHO DE UMA FORÇA

Encontramos vários tipos de forças nos problemas de dinâmica do movimento plano de corpos rígidos. Os trabalhos dessas forças, apresentados na Seção 14.1, estão relacionados a seguir.

***Trabalho de uma Força Variável.*** Se uma força externa **F** age num corpo rígido, o trabalho realizado por essa força quando seu ponto de aplicação se move ao longo da trajetória $s$ (Figura 18.6) é definido por

$$\boxed{U_F = \int_s F\cos\theta\, ds} \qquad (18.7)$$

onde $\theta$ é o ângulo entre o vetor força e o vetor deslocamento infinitesimal. Na integração devemos levar em conta as variações da força em intensidade e em direção.

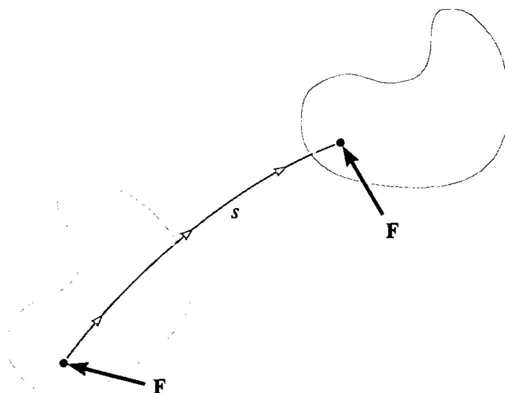



**Figura 18.6**

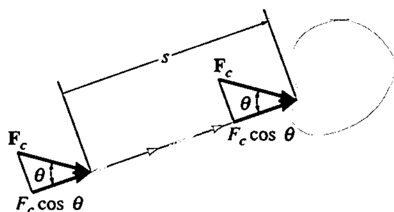



Figura 18.7

***Trabalho de uma Força Constante.*** Se uma força externa $\mathbf{F}_c$ agindo num corpo rígido mantém constantes sua intensidade e sua direção $\theta$ relativamente à trajetória, durante um movimento de translação retilínea $s$ (Figura 18.7), então a Equação 18.7 pode ser integrada de forma que o trabalho se torna

$$\boxed{U_{F_c} = (F_c \cos\theta)s} \tag{18.8}$$

Nessa equação, $F_c \cos\theta$ representa o componente da força na direção do deslocamento.

Figura 18.8

***Trabalho de um Peso.*** O peso de um corpo rígido realiza trabalho apenas se o seu centro de massa $G$ sofre um *deslocamento vertical* $\Delta y$. Se esse deslocamento é *para cima* (Figura 18.8), o trabalho é *negativo*, pois o peso e o deslocamento têm sentidos opostos.

$$\boxed{U_W = -W\Delta y} \tag{18.9}$$

De maneira similar, se o deslocamento se dá *para baixo*, o trabalho é *positivo*. Em ambos os casos, a variação de cota é considerada pequena para que o peso **W**, força gravitacional, seja constante.

Posição da mola não deformada, $s = 0$

Figura 18.9

***Trabalho da Força de uma Mola.*** Se um corpo é ligado à extremidade livre de uma mola elástica linear, a força da mola $F_s = ks$ *agindo no corpo* realiza trabalho quando a mola se distende ou se comprime de uma posição $s_1$ a outra $s_2$, mais distante. Em ambos os casos, o trabalho é *negativo*, pois *o deslocamento do corpo* se dá no sentido oposto ao da força (Figura 18.9). O trabalho realizado é

$$\boxed{U_s = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right)} \tag{18.10}$$

onde $|s_2| > |s_1|$.

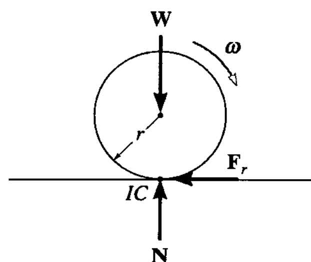
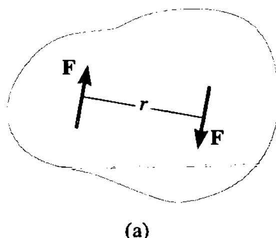



Figura 18.10

***Forças que não Realizam Trabalho.*** Há algumas forças externas que não realizam trabalho quando o corpo se desloca. Essas forças podem agir em *pontos fixos* do corpo ou são *perpendiculares ao deslocamento* de seus pontos de aplicação. Como exemplos temos as reações em um pino de suporte em torno do qual um corpo gira, a reação normal agindo num corpo que se move sobre uma superfície fixa e o peso de um corpo quando o seu centro de massa se move num *plano horizontal* (Figura 18.10).

A força de resistência $\mathbf{F}_r$ agindo no ponto de contato de um corpo que rola *sem escorregar* sobre uma superfície áspera também não realiza trabalho (Figura 18.10).[2] Isso ocorre porque, durante um tempo infinitesimal $dt$, $\mathbf{F}_r$ age num ponto do corpo que possui *velocidade nula* (centro instantâneo de velocidade nula, *CI*), e, portanto, o trabalho realizado pela força é nulo. Em outras palavras, o ponto não se desloca na direção da força durante esse tempo. Como $\mathbf{F}_r$ contacta pontos sucessivos na mesma condição, o trabalho dessa força é nulo.

## 18.3 TRABALHO DE UM BINÁRIO



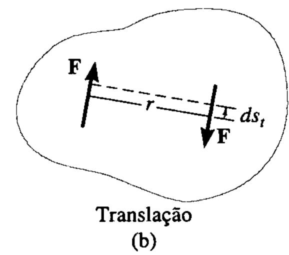

(a)

Figura 18.11

Quando um corpo submetido a um binário está em movimento plano geral, as forças do binário realizam trabalho *apenas* quando o corpo sofre uma *rotação*. Para demonstrar esse fato, consideremos o corpo na Figura 18.11*a*, que está submetido a um binário de torque $M = Fr$. Um deslocamento infinitesimal geral do corpo pode ser considerado como a soma de uma translação com uma rotação. Quando o corpo *translada* de forma que o *componente do deslo-*

[2] O trabalho realizado pela força de atrito *quando o corpo escorrega* foi discutido na Seção 14.3.

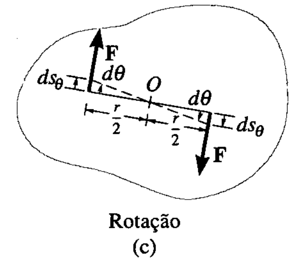
*camento* ao longo da reta de ação das forças é $ds_t$ (Figura 18.11*b*), vemos claramente que o trabalho 'positivo' de uma das forças *cancela* o trabalho 'negativo' da outra. Se o corpo sofre uma rotação infinitesimal $d\theta$ em torno de um eixo que é perpendicular ao plano do binário e corta o plano em $O$ (Figura 18.11*c*), então o ponto de aplicação de cada força desloca-se de $ds_\theta = (r/2)d\theta$ na direção da força. Assim, o trabalho total realizado é



Translação
(b)

$$dU_M = F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)\,d\theta$$

$$= M\,d\theta$$



Rotação
(c)

**Figura 18.11**

Observemos que $d\boldsymbol{\theta}$ e $\mathbf{M}$ *são sempre paralelos para um movimento plano geral*, pois são perpendiculares ao plano do movimento. Além disso, o trabalho resultante é *positivo* quando $d\boldsymbol{\theta}$ e $\mathbf{M}$ têm *o mesmo sentido* e, obviamente, *negativo* se esses vetores têm *sentidos opostos*.

Quando o corpo gira no plano, de um ângulo finito medido em radianos, de $\theta_1$ a $\theta_2$, o trabalho do binário é

$$\boxed{U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta} \qquad (18.11)$$

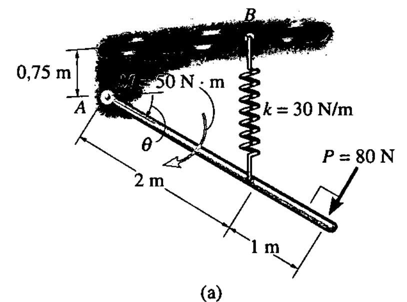
Se o torque $\mathbf{M}$ do binário tem *módulo constante*, então

$$\boxed{U_M = M(\theta_2 - \theta_1)} \qquad (18.12)$$

Nessa equação o trabalho é *positivo* se $\mathbf{M}$ e $(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1)$ têm o mesmo sentido.

## EXEMPLO 18.2

A barra mostrada na Figura 18.12*a* tem uma massa de 10 kg e está submetida a um momento de binário $M = 50$ N·m e a uma força de intensidade $P = 80$ N aplicada sempre perpendicularmente à barra, na sua extremidade livre. Além disso, a mola tem um comprimento de 0,5 m, quando não deformada, e se mantém na posição vertical devido à guia para o rolete $B$. Determine o trabalho total realizado por todas as forças agindo na barra, quando esta gira para baixo de $\theta = 0°$ a $\theta = 90°$.



(a)

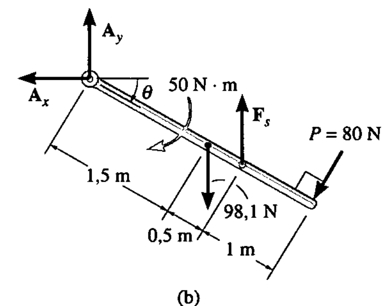
### SOLUÇÃO

Primeiro construímos o diagrama de corpo livre para a barra, levando em conta todas as forças agindo nela (Figura 18.12*b*).

***Peso W.*** Como o peso 10(9,81) N = 98,1 N desloca-se de 1,5 m para baixo, o trabalho é

$$U_W = 98{,}1\text{ N}(1{,}5\text{ m}) = 147{,}2\text{ J}$$

Por que o trabalho é positivo?



(b)

**Figura 18.12**

***Torque de Binário M.*** O deslocamento angular (módulo $\theta = \pi/2$ rad) tem o mesmo sentido do torque, logo

$$U_M = 50\text{ N}\cdot\text{m}(\pi/2) = 78{,}5$$

***Força da Mola $F_s$.*** Quando $\theta = 0°$, a mola está distendida (0,75 m − 0,5 m) = 0,25 m e quando $\theta = 90°$, o alongamento é de (2 m + 0,75 m) − 0,5 m = 2,25 m. Logo:

$$U_s = -[\tfrac{1}{2}(30\text{ N/m})(2{,}25\text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(30\text{ N/m})(0{,}25\text{ m})^2] = -75{,}0\text{ J}$$

Por inspeção, a mola realiza trabalho negativo sobre a barra, pois $F_s$ age no sentido oposto ao do deslocamento. Essa análise está de acordo com o resultado obtido.

***Força P.*** À medida que a barra se move para baixo, o ponto de aplicação da força se desloca uma distância de $(\pi/2)$ (3 m) = 4,712 m. O trabalho é positivo. Por quê?

$$U_P = 80\text{ N}(4{,}712\text{ m}) = 377{,}0\text{ J}$$

***Reações no pino.*** As forças $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$ não realizam trabalho, pois não sofrem deslocamento.

***Trabalho Total.*** O trabalho de todas as forças quando a barra se move é

$$U = 147{,}2\text{ J} + 78{,}5\text{ J} - 75{,}0\text{ J} + 377{,}0\text{ J} = 528\text{ J} \qquad \textit{Resposta}$$

## 18.4 PRINCÍPIO DO TRABALHO E ENERGIA

Aplicando-se a cada ponto material de um corpo rígido o princípio do trabalho e energia desenvolvido na Seção 14.2 e somando-se os resultados algebricamente, pois energia é uma quantidade escalar, o princípio do trabalho e energia para o corpo rígido se torna

$$\boxed{T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2} \qquad (18.13)$$

Essa equação afirma que a energia cinética de translação *e* de rotação inicial mais o trabalho realizado por todas as forças externas e torques de binário externos agindo no corpo, conforme este se move de sua posição inicial à sua posição final, é igual à energia cinética de translação *e* de rotação final. Observemos que o trabalho das *forças internas* não deve ser considerado, pois o corpo é rígido. Essas forças ocorrem aos pares de forças opostas e colineares, de modo que quando o corpo se move o trabalho de uma força cancela o de seu oponente. Além disso, como o corpo é rígido, não ocorre movimento relativo entre essas forças, de modo que não há realização de trabalho.

Quando vários corpos rígidos são ligados por pinos, ligados por cabos inextensíveis ou engranzados, a Equação 18.13 pode ser aplicada ao sistema de corpos. Em todos esses casos, as forças internas que mantêm ligados os vários elementos não realizam trabalho, portanto não são consideradas na análise.



*O trabalho do torque ou momento desenvolvido pelas engrenagens motrizes dos dois motores se transforma em energia cinética de rotação da betoneira.*

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

O princípio do trabalho e energia é usado para resolver problemas de dinâmica que envolvem *velocidade, força* e *deslocamento*, pois esses termos estão envolvidos na formulação do princípio. Para aplicações, sugere-se o uso do seguinte procedimento.

***Energia Cinética (Diagramas Cinemáticos)***

- A energia cinética de um corpo compõe-se de dois termos: a energia cinética de translação expressa em termos da velocidade do centro de massa, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$, e a energia cinética de rotação que envolve o momento de inércia em relação ao centro de massa, $T = \frac{1}{2}I_G\omega^2$. No caso especial da rotação em torno de um eixo fixo, essas duas energias cinéticas combinam-se e o resultado pode ser expresso como $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$, onde $I_O$ é o momento de inércia em relação ao eixo de rotação.
- *Diagramas cinemáticos* para a velocidade podem ser úteis para a determinação de $v_G$ e $\omega$ ou para o estabelecimento de uma *relação* entre $v_G$ e $\omega$.†

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre)***

- Construa um diagrama de corpo livre do corpo para uma posição intermediária na trajetória, levando em conta todas as forças e todos os momentos de binário que realizam trabalho sobre o corpo ao longo de sua trajetória.
- Uma força realiza trabalho se seu ponto de aplicação se move na direção da força.
- Forças que são funções do deslocamento devem ser integradas para se obter o trabalho realizado. Graficamente, o trabalho é igual à área sob a curva num diagrama força-deslocamento.
- O trabalho da força peso é o produto da intensidade da força e o deslocamento vertical, sendo positivo quando o peso se move para baixo.*
- O trabalho da força de uma mola é da forma $U_s = \frac{1}{2}ks^2$, onde $k$ é a rigidez e $s$, a distensão ou a compressão da mola.**
- O trabalho de um binário é o produto do momento do binário e o deslocamento angular expresso em radianos.***
- É importante observar que o trabalho tem *sinal algébrico*. Especificamente, o trabalho é *positivo* quando a força (ou o torque) tem o *mesmo sentido* do deslocamento; caso contrário, ele é negativo.

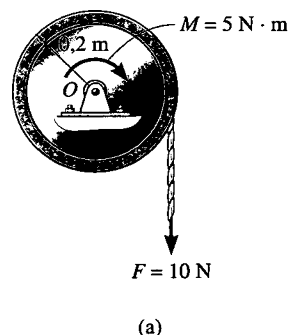
***Princípio do Trabalho e Energia***

- Aplique o princípio do trabalho e energia, $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$. Como essa equação é escalar, ela pode ser usada para uma única incógnita quando aplicada a um único corpo rígido.

† Uma recapitulação rápida das seções 16.5 a 16.7 pode ser útil para resolver problemas, pois os cálculos de energia cinética exigem uma análise cinemática da velocidade.
* Veja a Equação 14.3 (N. do T.).
** Veja a Equação 14.4 (N. do T.).
*** Veja a Equação 18.11 (N. do T.).

## EXEMPLO 18.3

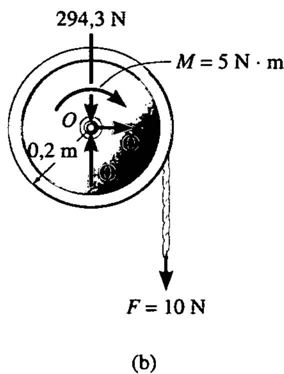
O disco mostrado na Figura 18.13*a* pode girar em torno do pino em seu centro. Determine o número de revoluções que ele deve realizar para atingir a velocidade angular de 20 rad/s, a partir do repouso. Sobre o disco agem uma força constante $F = 10$ N, que é aplicada pela corda enrolada em sua periferia, e um torque de binário de valor constante $M = 5$ N·m. Despreze a massa da corda.



(a)
**Figura 18.13**

### SOLUÇÃO

***Energia Cinética.*** Como o disco gira em torno de um eixo fixo, a energia cinética pode ser calculada usando-se $T=\frac{1}{2}I_O\omega^2$, onde o momento de inércia é $I_O=\frac{1}{2}mr^2$. Inicialmente, o disco está em repouso, de modo que




(b)

**Figura 18.13**

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2} I_O \omega_2^2 = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(30\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2](20\text{ rad/s})^2 = 120\text{ J}$$

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** Como mostrado na Figura 18.13*b*, as reações no pino, $\mathbf{O}_x$ e $\mathbf{O}_y$, e o peso (294,3 N) não realizam trabalho, pois essas forças não se deslocam. O momento de binário, tendo valor constante, realiza trabalho positivo $U_M = M\theta$, à medida que o disco gira de um ângulo $\theta$ no sentido horário. A força constante $F$ realiza trabalho positivo $U_{F_c} = Fs$, à medida que a corda se move (para baixo) de um comprimento $s = \theta r = \theta\,(0{,}2\text{ m})$.

***Princípio do Trabalho e Energia.***

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \{M\theta + Fs\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \{(5\text{ N}\cdot\text{m})\theta + (10\text{ N})\theta(0.2\text{ m})\} = \{120\text{ J}\}$$

$$\theta = 17{,}1\text{ rad} = 17{,}1\text{ rad}\left(\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 2{,}73\text{ rev} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Este problema também foi resolvido no Exemplo 17.9. Compare os dois métodos de solução e observe que, como força, velocidade e deslocamento angular estão envolvidos, uma abordagem baseada em 'trabalho-energia' fornece uma solução mais direta.

## EXEMPLO 18.4



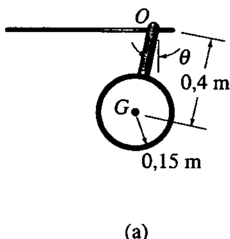
O tubo de 700 kg está igualmente suspenso pelos dois dentes do garfo da empilhadeira mostrada na foto. O tubo está sofrendo um movimento oscilatório, de modo que sua velocidade é nula quando $\theta = 30°$. Determine as forças normal e de atrito agindo em cada dente no instante em que $\theta = 0°$. As medidas do tubo e do elemento de suspensão estão na Figura 18.14*a*. Despreze a massa do elemento de suspensão e a espessura do tubo.

## SOLUÇÃO

Devemos usar as equações de movimento para determinar as forças sobre os dentes, pois essas forças não realizam trabalho. Antes, porém, apliquemos o princípio do trabalho e energia para determinar a velocidade angular do tubo quando $\theta = 30°$.

***Energia Cinética (Diagrama Cinemático).*** Como o tubo está inicialmente em repouso:

$$T_1 = 0$$




(a)

**Figura 18.14**

A energia cinética final pode ser calculada tanto relativamente a um ponto fixo $O$, quanto relativamente ao centro de massa $G$. Para o cálculo, consideraremos o tubo como um anel fino, de modo que $I_G = mr^2$. Se o ponto $G$ for considerado, teremos

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m (v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega_2^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(700\text{ kg})[(0{,}4\text{ m})\omega_2]^2 + \tfrac{1}{2}[700\text{ kg}(0{,}15\text{ m})^2]\omega_2^2$$

$$= 63{,}875\omega_2^2$$

Se o ponto $O$ for considerado, então, o teorema dos eixos paralelos deverá ser utilizado para a determinação de $I_O$. Logo:

$$T_2 = \tfrac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}[700\text{ kg}(0{,}15\text{ m})^2 + 700\text{ kg}(0{,}4\text{ m})^2]\omega_2^2$$
$$= 63{,}875\omega_2^2$$

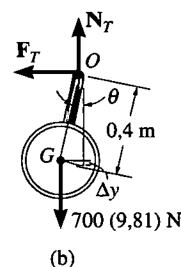


Figura 18.14

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** Consideremos a Figura 18.14*b*. As forças normal e de atrito nos dentes não realizam trabalho, pois seus pontos de aplicação não se movem durante as oscilações do tubo. O peso, centrado em $G$, realiza trabalho positivo conforme $G$ desce de $\Delta y = 0{,}4\text{ m} - 0{,}4\cos 30°\text{ m} = 0{,}05359\text{ m}$.

***Princípio do Trabalho e Energia.***

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$
$$\{0\} + \{700(9{,}81)\text{ N}(0{,}05359\text{ m})\} = \{63{,}875\omega_2^2\}$$
$$\omega_2 = 2{,}40\text{ rad/s}$$

***Equações de Movimento.*** Tendo em mente os diagramas de corpo livre e dinâmico mostrados na Figura 18.14*c* e usando o resultado para $\omega_2$, obtemos

$$\overset{+}{\leftarrow}\Sigma F_t = m(a_G)_t; \qquad F_T = 700(a_G)_t$$
$$+\uparrow\Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad N_T - 700(9{,}81)\text{ N} = 700\text{ kg}(2{,}40\text{ rad/s})^2(0{,}4\text{ m})$$
$$\circlearrowleft+\Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 0 = [700\text{ kg}(0{,}15\text{ m})^2 + 700\text{ kg}(0{,}4\text{ m})^2]\alpha$$

Como $(a_G)_t = 0{,}4\alpha$, então

$$\alpha = 0,\ (a_G)_t = 0$$
$$F_T = 0$$
$$N_T = 8{,}48\text{ kN}$$

Há dois dentes para suporte da carga, portanto

$$F'_T = 0 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$
$$N'_T = \frac{8{,}48\text{ kN}}{2} = 4{,}24\text{ kN} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

Devido ao movimento oscilatório, os dentes estão submetidos a uma força normal *maior* do que a que ocorreria se a carga estivesse estática, caso em que $N'_T = 700(9{,}81)\text{N}/2 = 3{,}43\text{ kN}$.

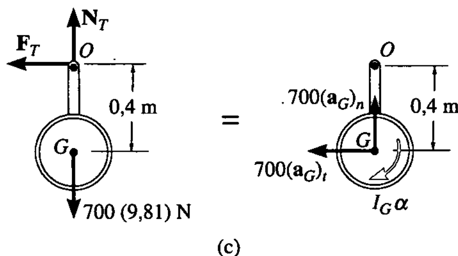
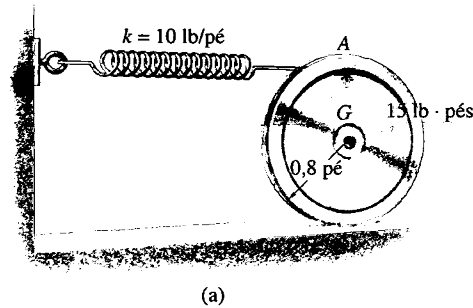


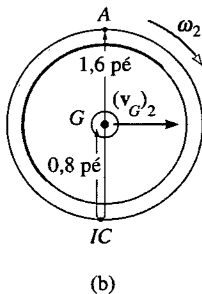
Figura 18.14

## EXEMPLO 18.5

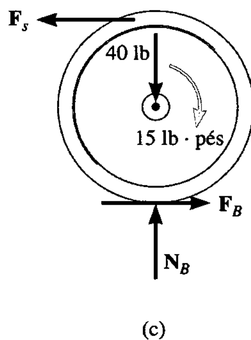
A roda mostrada na Figura 18.15*a* pesa 40 lb e possui um raio de giração $k_G = 0{,}6$ pé, em relação ao seu centro de massa *G*. Se ela está submetida a um momento de binário no sentido horário de 15 lb·pés e rola sem escorregar, a partir do repouso, determine sua velocidade angular após seu centro *G* ter sofrido um deslocamento de 0,5 pé. A mola tem uma rigidez $k = 10$ lb/pé e não está inicialmente deformada no instante em que o momento é aplicado.



(a)



(b)



(c)

**Figura 18.15**

## SOLUÇÃO

***Energia Cinética (Diagrama Cinemático).*** Como a roda está inicialmente em repouso:

$$T_1 = 0$$

A Figura 18.15*b* mostra o diagrama cinemático da roda, correspondente à posição final. Logo, a energia cinética final é

$$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{40 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{40 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}(0{,}6 \text{ pé})^2\right]\omega_2^2$$

Podemos relacionar a velocidade do centro de massa com a velocidade angular por meio do centro instantâneo de velocidade zero (*CI*), isto é, $(v_G)_2 = 0{,}8\omega_2$. Substituindo esse resultado na equação anterior e simplificando, temos

$$T_2 = 0{,}621\omega_2^2$$

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** Como mostrado na Figura 18.15*c*, somente a força da mola $\mathbf{F}_s$ e o momento de binário realizam trabalho. O ponto de aplicação da força normal não tem movimento ao longo da reta de ação e a força de atrito *não realiza trabalho*, pois a roda não escorrega enquanto rola.

O trabalho de $\mathbf{F}_s$ pode ser calculado usando-se $U_s = -\frac{1}{2}ks^2$. Esse trabalho é negativo, pois $\mathbf{F}_s$ é oposta ao deslocamento. Como a roda não escorrega enquanto o centro *G* se desloca 0,5 pé, então a roda gira $\theta = s_G/r_{G/CI} = 0{,}5$ pé/0,8 pé $= 0{,}625$ rad (Figura 18.15*b*). Logo, a mola se distende $s_A = \theta r_{A/CI} = 0{,}625$ rad(1,6 pé) $= 1$ pé.

***Princípio do Trabalho e Energia.***

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \{M\theta - \tfrac{1}{2}ks^2\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \{15 \text{ lb}\cdot\text{pés}(0{,}625 \text{ rad}) - \frac{1}{2}(10 \text{ lb/pé})(1 \text{ pé})^2\} = \{0{,}621\omega_2^2 \text{ pé}\cdot\text{lb}\}$$

$$\omega_2 = 2{,}65 \text{ rad/s}\circlearrowright$$

## EXEMPLO 18.6

A barra de 10 kg mostrada na Figura 18.16*a* está vinculada de forma que suas extremidades movem-se em ranhuras. A barra está inicialmente em repouso quando $\theta = 0°$. Se o bloco deslizante $B$ está submetido a uma força horizontal $P$ = 50 N, determine a velocidade angular da barra no instante em que $\theta$ = 45°. Despreze os atritos e as massas dos blocos $A$ e $B$.

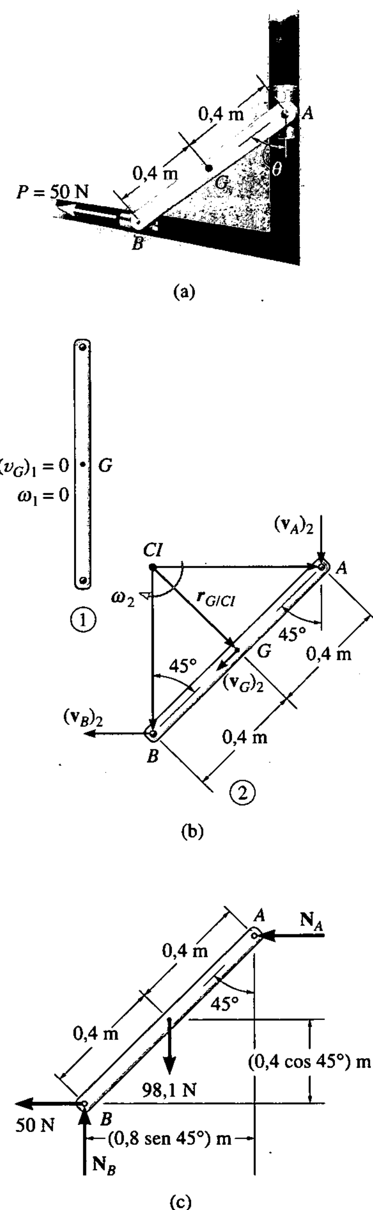


**Figura 18.16**

### SOLUÇÃO

Por que podemos usar o princípio do trabalho e energia para resolver este problema?

***Energia Cinética (Diagrama Cinemático).*** A Figura 18.16*b* mostra dois diagramas cinemáticos da barra, correspondendo às suas posições inicial 1 e final 2. Quando a barra está na posição 1, $T_1 = 0$, pois $(\mathbf{v}_G)_1 = \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$. Na posição 2, a velocidade angular é $\boldsymbol{\omega}_2$ e a velocidade do centro de massa é $(\mathbf{v}_G)_2$. Logo, a energia cinética é

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{12}(10 \text{ kg})(0{,}8 \text{ m})^2]\omega_2^2$$
$$= 5(v_G)_2^2 + 0{,}267(\omega_2)^2$$

As duas incógnitas $(v_G)_2$ e $\omega_2$ podem ser relacionadas considerando-se o centro instantâneo de velocidade nula da barra (Figura 18.16*b*). Vê-se que enquanto $A$ desce com velocidade $(\mathbf{v}_A)_2$, $B$ se desloca horizontalmente para a esquerda com velocidade $(\mathbf{v}_B)_2$. Conhecidos os sentidos desses movimentos, o $CI$ pode ser determinado como se mostra na figura. Logo:

$$(v_G)_2 = r_{G/CI}\omega_2 = (0{,}4 \text{ tg } 45° \text{ m})\omega_2$$
$$= 0{,}4\omega_2$$

Portanto:

$$T_2 = 0{,}8\omega_2^2 + 0{,}267\omega_2^2 = 1{,}067\omega_2^2$$

***Trabalho (Diagrama de Corpo Livre).*** Consideremos a Figura 18.16*c*. As forças normais $\mathbf{N}_A$ e $\mathbf{N}_B$ não realizam trabalho durante o movimento da barra. Por quê? O peso de 98,1 N desloca-se uma distância vertical $\Delta y$ = (0,4 − 0,4 cos 45°) m, enquanto a força de 50 N desloca-se uma distância horizontal $s$ = (0,8 sen 45°) m. Essas duas forças realizam trabalho positivo. Por quê?

***Princípio do Trabalho e Energia.***

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \{W\Delta y + Ps\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \{98{,}1\ \text{N}(0{,}4\ \text{m} - 0{,}4\cos 45°\ \text{m}) + 50\ \text{N}(0{,}8\ \text{sen}\ 45°\ \text{m})\}$$

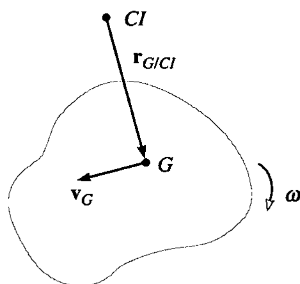
$$= \{1{,}067\omega_2^2\ \text{J}\}$$

Resolvendo $\omega_2$, obtemos

$$\omega_2 = 6{,}11\ \text{rad/s}$$ ***Resposta***

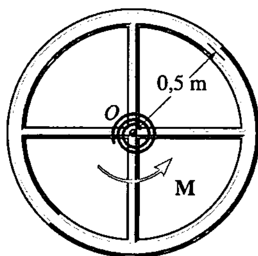
## PROBLEMAS

**18.1.** Num dado instante, o corpo de massa $m$ possui velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e seu centro de massa, velocidade $\mathbf{v}_G$. Mostre que sua energia cinética pode ser escrita como $T = \frac{1}{2}I_{CI}\omega^2$, onde $I_{CI}$ é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo instantâneo de velocidade nula, localizado a uma distância $r_{G/CI}$ do centro de massa, como mostra a figura.



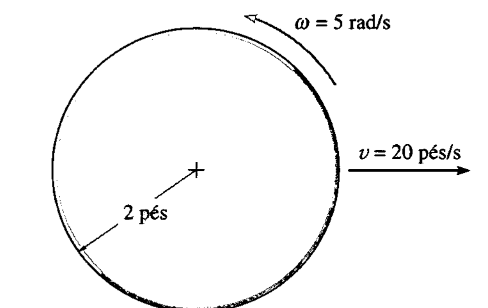

**Problema 18.1**

**18.2.** A roda é constituída de um anel fino de 5 kg e duas barras delgadas de 2 kg cada uma. Se a mola de torção ligada no centro da roda tem rigidez $k = 2$ N·m/rad, de forma que o torque no centro da roda é $M = (2\theta)$ N·m, onde $\theta$ é expresso em radianos, determine a velocidade angular máxima da roda, se ela é girada duas voltas e então é solta a partir do repouso.



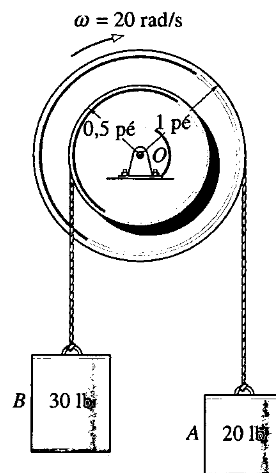

**Problema 18.2**

**18.3.** Na situação mostrada na figura, o disco de 30 lb tem velocidade angular de 5 rad/s, no sentido anti-horário, enquanto seu centro tem velocidade de 20 pés/s. Determine a energia cinética do disco nessa situação.



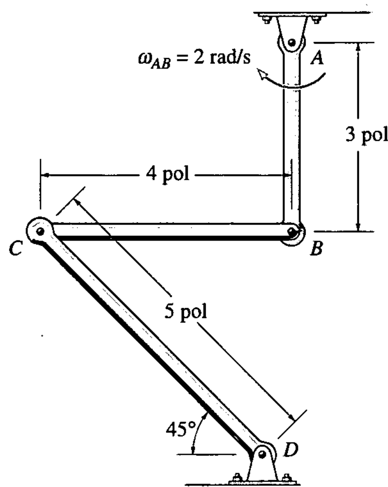

**Problema 18.3**

***18.4.** A polia dupla consiste em duas partes fixadas rigidamente uma na outra. Ela tem peso de 50 lb, raio de giração em relação ao seu centro $k_O = 0{,}6$ pé e está girando com velocidade angular de 20 rad/s, no sentido horário. Determine a energia cinética do sistema. Suponha que os cabos não escorregam na polia.




**Problema 18.4**

**18.5.** Na situação mostrada na figura, o elemento de ligação $AB$ tem velocidade angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s. Se cada elemento de ligação for considerado uma barra delgada com peso de 0,5 lb/pol, determine a energia cinética total do sistema.



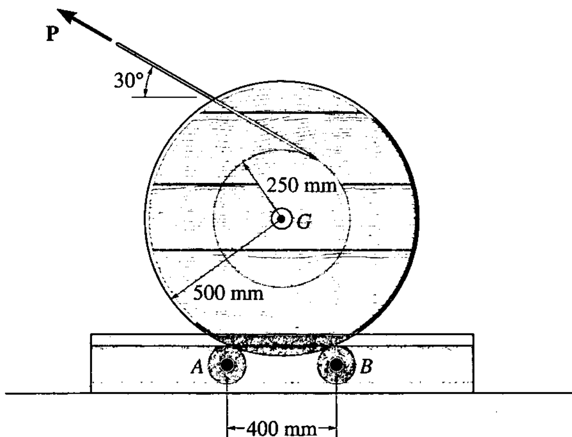

Problema 18.5

**18.6.** Resolva o Problema 17.58 usando o princípio do trabalho e energia.

**18.7.** Resolva o Problema 17.59 usando o princípio do trabalho e energia.

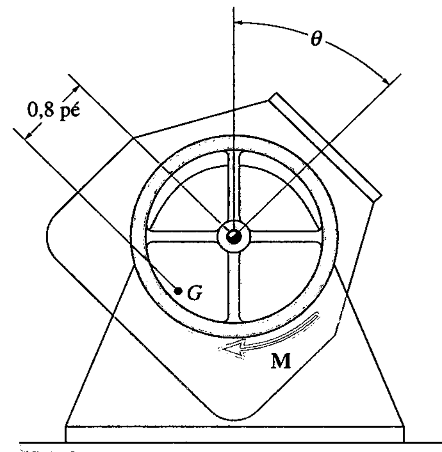
***18.8.** Resolva o Problema 17.63 usando o princípio do trabalho e energia.

**18.9.** Aplica-se uma força $P$ = 20 N ao cabo, fazendo girar a bobina de 175 kg apoiada nos roletes $A$ e $B$. Determine a velocidade angular da bobina ao fim de duas voltas, a partir do repouso. Despreze a massa dos roletes e do cabo. O raio de giração da bobina, em relação ao eixo central, é $k_G$ = 0,42 m.



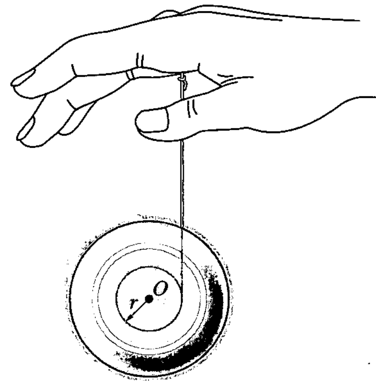

Problema 18.9

**18.10.** A parte móvel da betoneira tem peso de 70 lb e raio de giração $k_G$ = 1,3 em relação ao seu centro de gravidade. Se um torque constante $M$ = 60 lb·pés é aplicado à roda, determine a velocidade angular da parte móvel no instante em que ela está na posição $\theta$ = 90°, sendo que ela partiu do repouso na posição $\theta$ = 0°.



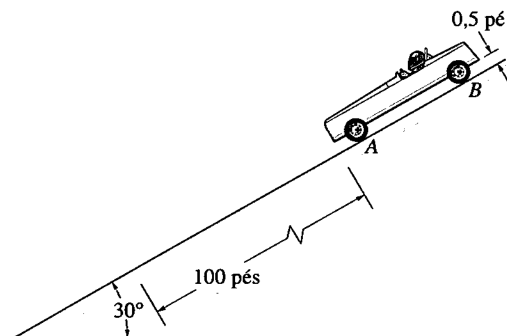

Problema 18.10

**18.11.** Um ioiô tem peso de 0,3 lb e raio de giração $k_O$ = 0,06 pé. Se ele é solto a partir do repouso, determine quanto ele deve descer para atingir uma velocidade angular $\omega$ = 70 rad/s. Despreze a massa do fio e suponha que o fio forme ao redor do pino central um rolo com raio médio $r$ = 0,02 pé.



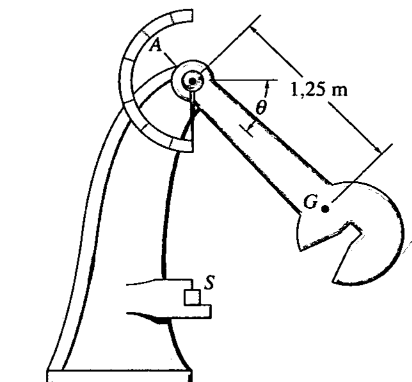

Problema 18.11

***18.12.** O carro mostrado na figura tem peso de 110 lb, incluindo o passageiro, mas *excluindo* suas quatro rodas. Cada roda tem 5 lb, raio de 0,5 pé e raio de giração $k$ = 0,3 pé calculado para um eixo que coincide com o eixo da roda. Determine a velocidade do carro após um percurso de 100 pés, partindo do repouso. As rodas rolam sem escorregar. Despreze a resistência do ar.



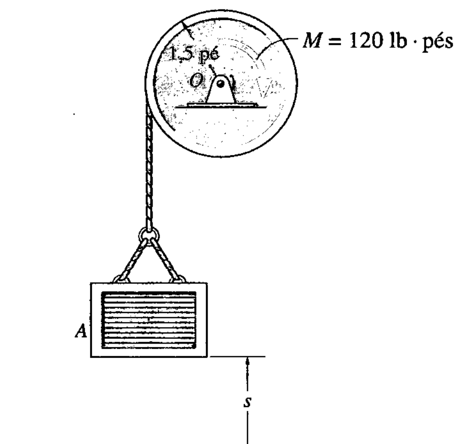

Problema 18.12

**18.13.** O pêndulo da máquina de impacto *Charpy* possui massa de 50 lb e raio de giração $k_A = 1{,}75$ m. Se ele é abandonado a partir do repouso em $\theta = 0°$, determine sua velocidade imediatamente antes de colidir com a amostra $S$, em $\theta = 90°$.




**Problema 18.13**

**18.14.** O motor fornece ao tambor um torque constante $M = 120$ lb·pés. Se o tambor tem peso de 30 lb e raio de giração $k_O = 0{,}8$ pé, determine a velocidade do engradado $A$, de 15 lb, ao fim de uma subida $s = 4$ pés, a partir do repouso. Despreze a massa da corda.

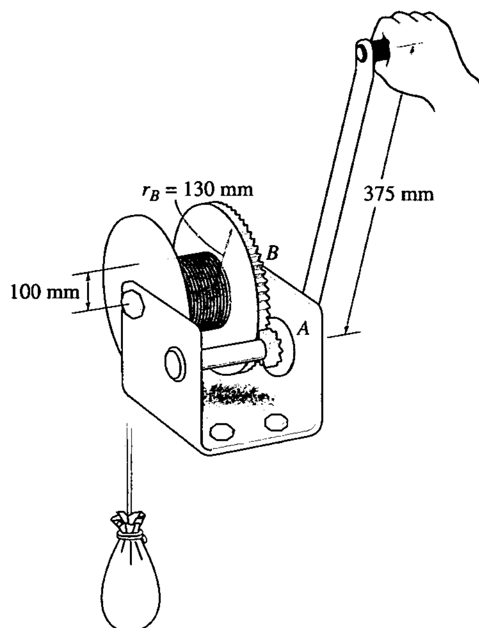



**Problema 18.14**

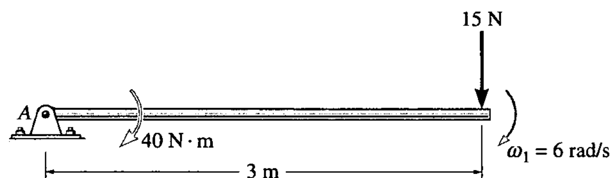
**18.15.** Usa-se o guincho manual para elevar a carga de 50 kg. Determine o trabalho necessário para girar a manivela em cinco voltas. A engrenagem $A$ tem raio de 20 mm.

***18.16.** A barra delgada de 4 kg está submetida a uma força e a um torque de binário. Quando ela está na posição mostrada na figura, sua velocidade angular é $\omega_1 = 6$ rad/s. Determine sua velocidade angular no instante em que sua posição angular é de 90° para baixo. A força se mantém aplicada perpendicularmente à barra e o movimento ocorre num plano vertical.

**18.17.** A barra delgada de 4 kg está submetida a uma força e a um torque de binário. Quando ela está na posição mostrada na figura, sua velocidade angular é $\omega_1 = 6$ rad/s. Determine sua velocidade angular após um giro de 360°. A força se mantém aplicada perpendicularmente à barra e o movimento ocorre em um plano vertical.

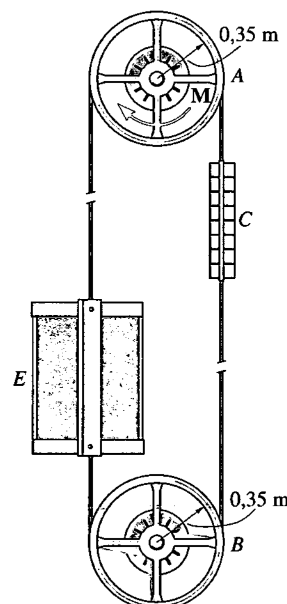



**Problema 18.15**




**Problemas 18.16/17**

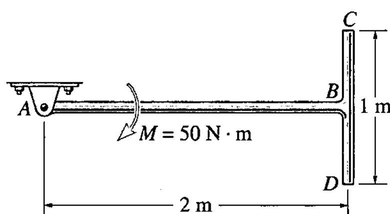
**18.18.** O carro $E$ do elevador tem massa de 1,80 t (1 t = $10^3$ kg) e o contrapeso $C$, de 2,30 t. Se o motor aplica na roldana $A$ um torque constante $M = 100$ N·m, determine a velocidade do elevador após ter subido 10 m, partindo do repouso. As roldanas $A$ e $B$ têm cada uma massa de 150 kg e raio de giração $k = 0{,}2$ m, em relação ao centro de massa. Despreze a massa do cabo e considere que ele não escorrega nas roldanas.




**Problemas 18.18/19**

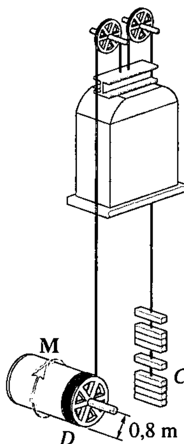
**18.19.** O carro $E$ do elevador tem massa de 1,80 t (1 t = $10^3$ kg) e o contrapeso $C$, de 2,30 t. Se o motor aplica na roldana $A$ um torque $M = (0{,}06\theta^2 + 7{,}5)$ N·m, onde $\theta$ é dado em radianos, determine a velocidade do elevador após ter subido 12 m, partindo do repouso. As roldanas $A$ e $B$ têm cada uma massa de 150 kg e raio de giração $k = 0{,}2$ m, em relação ao centro de massa. Despreze a massa do cabo e considere que ele não escorrega nas roldanas.

***18.20.** O pêndulo consiste em duas barras delgadas, cada uma com massa de 4 kg/m. Se ele está submetido a um momento $M = 50$ N·m e é solto a partir do repouso na posição mostrada na figura, determine sua velocidade angular após ter girado (a) 90° e (b) 180°. O movimento ocorre num plano vertical.




**Problema 18.20**

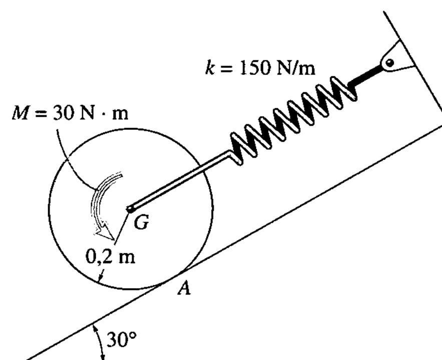
**18.21.** Um motor fornece um torque constante $M = 6$ kN·m ao tambor que aciona o elevador. O elevador tem massa de 900 kg e o contrapeso $C$, de 200 kg. O tambor tem massa de 600 kg e raio de giração $k = 0{,}6$ m, em relação ao seu eixo. Determine a velocidade do elevador após uma subida de 5 m a partir do repouso. Despreze a massa das polias.




**Problema 18.21**

**18.22.** O disco de 20 kg está em equilíbrio estático, mantido pela mola. Aplica-se então um torque de binário $M = 30$ N·m, como se mostra na figura. Determine a velocidade angular do disco após o seu centro de massa $G$ ter descido 0,8 m. O disco rola sem escorregar.

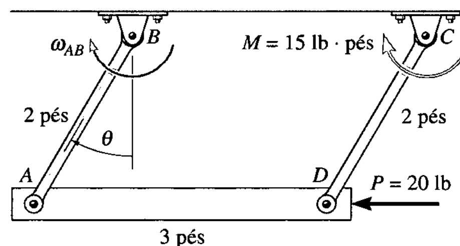
**18.23.** O disco de 20 kg está em equilíbrio estático, mantido pela mola. Aplica-se então um torque de binário $M = 30$ N·m, como se mostra na figura. Determine quanto o centro de massa do disco se desloca plano abaixo (deslocamento medido a partir da posição de equilíbrio), antes de parar. O disco rola sem escorregar.




**Problemas 18.22/23**

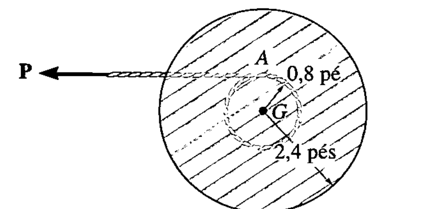
***18.24.** O sistema consiste em duas barras, $AB$ e $CD$, de 8 lb cada, e uma terceira, $AD$, de 10 lb. Quando $\theta = 0°$, a barra $AB$ tem velocidade angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s. Se a barra $CD$ está submetida a um momento de binário $M = 15$ lb·pés e a barra $AD$, a uma força horizontal $P = 20$ lb, como mostra a figura, determine $\omega_{AB}$ no instante em que $\theta = 90°$.

**18.25.** O sistema consiste em duas barras, $AB$ e $CD$, de 8 lb cada, e uma terceira, $AD$, de 10 lb. Quando $\theta = 0°$, a barra $AB$ tem velocidade angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s. Se a barra $CD$ está submetida a um momento de binário $M = 15$ lb·pés e a barra $AD$, a uma força horizontal $P = 20$ lb, como mostra a figura, determine $\omega_{AB}$ no instante em que $\theta = 45°$.



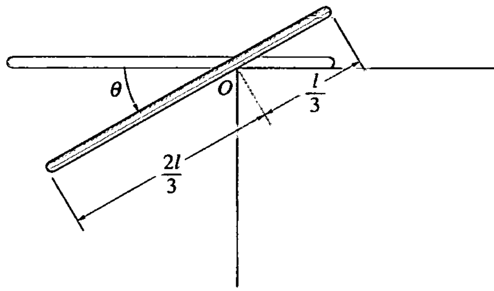

**Problemas 18.24/25**

**18.26.** A bobina tem peso de 500 lb e raio de giração $k_G = 1{,}75$ pé. Aplica-se uma força horizontal $P = 15$ lb a um cabo enrolado no cilindro central. Se a bobina está inicialmente em repouso, determine sua velocidade angular após o centro de massa $G$ ter se movido 6 pés para a esquerda. A bobina rola sem escorregar. Despreze a massa do cabo.



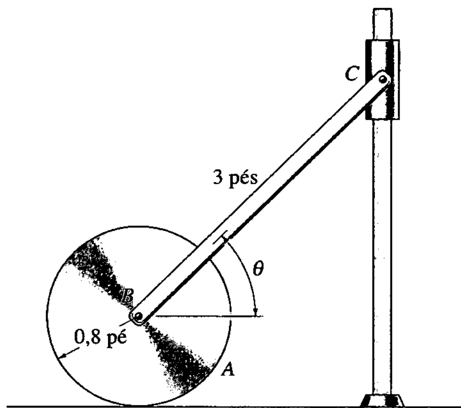

**Problema 18.26**

**18.27.** A barra uniforme tem massa $m$ e comprimento $l$. Se barra é abandonada a partir do repouso quando $\theta = 0°$, determine o ângulo $\theta$ para o qual ela começa a escorregar. O coeficiente de atrito estático em $O$ é $\mu_e = 0{,}3$.



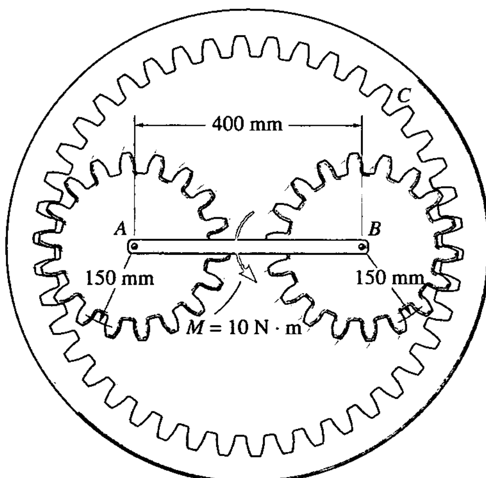

Problema 18.27

*18.28. O sistema consiste em um disco $A$ de 20 lb, uma barra delgada $BC$ de 4 lb e um colar liso $C$ de 1 lb. Se o disco rola sem escorregar, determine a velocidade do colar no instante em que a barra se torna horizontal, isto é, $\theta = 0°$. O sistema é abandonado a partir do repouso, quando $\theta = 45°$.



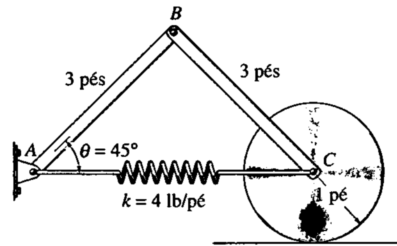

Problema 18.28

18.29. As engrenagens $A$ e $B$, cada uma com 2 kg, estão ligadas nas extremidades de uma barra delgada. As engrenagens rolam sem escorregar na engrenagem fixa $C$, que está num plano horizontal. Se um torque de 10 N·m é aplicado ao centro da barra, como se indica na figura, determine o número de revoluções da barra, contadas a partir do repouso, necessário para se atingir a velocidade angular $\omega_{AB} = 20$ rad/s. Considere que as engrenagens podem ser aproximadas por discos finos. Qual seria o resultado se as engrenagens estivessem num plano vertical?



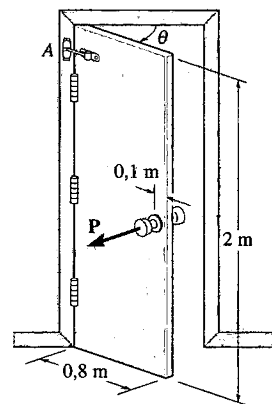

Problema 18.29

18.30. O arranjo consiste em duas barras delgadas de 15 lb cada, um disco de 20 lb e uma mola. Se a mola não está deformada quando $\theta = 45°$ e o arranjo é solto a partir do repouso nessa posição, determine a velocidade angular da barra $AB$ no instante em que $\theta = 0°$. O disco rola sem escorregar.



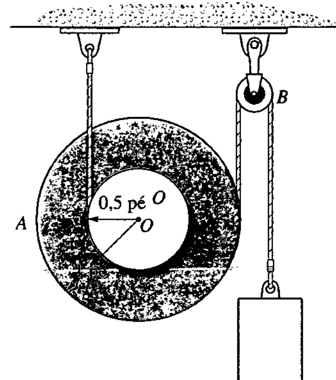

Problema 18.30

18.31. Uma porta uniforme tem massa de 20 kg e pode ser tratada como uma placa fina com as dimensões mostradas na figura. Se ela está ligada a uma mola de torção em $A$, que possui rigidez $k = 80$ N·m/rad, determine o ângulo de torção inicial que a mola deve ter, em radianos, para que a porta tenha uma velocidade angular de 12 rad/s ao se fechar ($\theta = 0°$), após ter sido aberta a 90° ($\theta = 90°$) e solta em repouso. *Dica:* para uma mola de torção, $M = k\theta$, onde $k$ é a rigidez e $\theta$ o ângulo de torção.



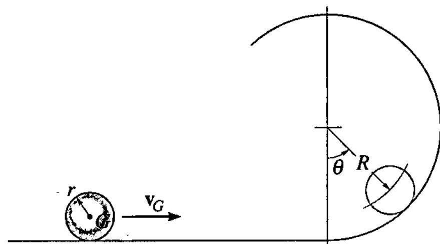

Problema 18.31

*18.32. A polia $A$ pesa 15 lb e tem raio de giração $k_O = 0,8$ pé. Se o sistema é solto a partir do repouso, determine a velocidade do centro $O$ da polia, após o bloco de 10 lb ter descido 4 pés. Despreze a massa da polia $B$.



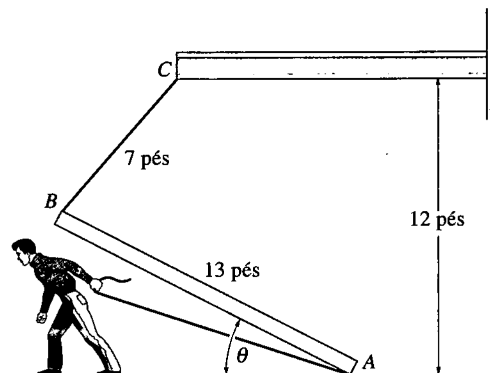

Problema 18.32

**18.33.** Uma bola de massa $m$ e raio $r$ é lançada na superfície horizontal, passando a rolar sem escorregar. Determine a velocidade mínima $v_G$ que o seu centro de massa $G$ pode ter para que ela faça o *loop*, rolando pela parte curva de raio $R + r$, sem perder contato com o trilho.




**Problema 18.33**

**18.34.** A viga tem peso de 1.500 lb e é erguida para a posição vertical ao ser puxada bem devagar pela sua extremidade inferior $A$. Se a corda se parte quando $\theta = 60°$ e a viga está essencialmente em repouso, determine a velocidade de $A$ no instante em que a corda $BC$ se torna vertical. Despreze o atrito e as massas das cordas e considere a viga uma barra delgada.




**Problema 18.34**

# 18.5 CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Quando as forças que agem num corpo rígido são todas *conservativas*, podemos usar o teorema da conservação da energia mecânica para resolver mais facilmente um problema que de outra forma seria resolvido usando-se o princípio do trabalho e energia. Em geral, esse teorema é de aplicação mais fácil, pois o trabalho de uma força conservativa *não depende da trajetória*; depende apenas das posições inicial e final do corpo. Discutimos na Seção 14.5 que o trabalho de uma força conservativa pode ser expresso como a diferença da energia potencial medida a partir de um nível de referência escolhido arbitrariamente.

***Energia Potencial Gravitacional.*** Como o peso total do corpo pode ser considerado concentrado em seu centro de gravidade, a *energia potencial gravitacional* do corpo é determinada conhecendo-se a altura do centro de gravidade acima ou abaixo da linha ou nível de referência escolhido. Medindo-se $y_G$ como *positivo acima* da linha de referência, e *negativo abaixo* dessa posição, a energia potencial gravitacional do corpo é

$$\boxed{V_g = W y_G} \qquad (18.14)$$

Assim, a energia potencial é *positiva* se $y_G$ é *positivo* (posição acima da referência), pois o peso tem a capacidade de realizar *trabalho positivo* se o corpo se move de volta (para baixo) à linha de referência (Figura 18.17). De maneira análoga, se o corpo estiver abaixo da referência ($y_G$ *negativo*), a energia potencial será *negativa*, pois, para um deslocamento de volta (para cima) à linha de referência, o trabalho do peso é *negativo*.

***Energia Potencial Elástica.*** A força desenvolvida por uma mola elástica também é conservativa. A *energia potencial elástica* que a mola comunica a um corpo ligado a ela, quando a mola é distendida ou comprimida a partir da posição $s = 0$ (mola não deformada) até uma posição final $s$ (Figura 18.18), é

$$\boxed{V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2} \qquad (18.15)$$

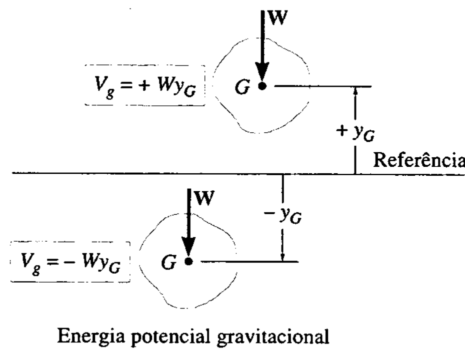



**Figura 18.17**

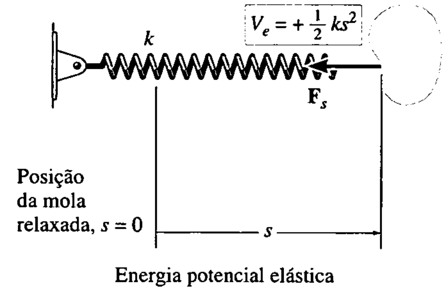



**Figura 18.18**

Estando a mola deformada, a força que ela exerce *no corpo* sempre tem a capacidade de realizar trabalho positivo quando ela retorna à sua configuração de mola não deformada (veja a Seção 14.5).

***Conservação da Energia.*** Em geral, se um corpo está submetido a ambas as forças, gravitacional e elástica, a *energia potencial total* é expressa como uma função potencial $V$ representada como a soma algébrica

$$\boxed{V = V_g + V_e} \qquad (18.16)$$

A medida de $V$ depende da posição do corpo em relação à linha de referência escolhida.

Ao observarmos que o trabalho de forças conservativas pode ser escrito como a diferença de suas energias potenciais, isto é $(\Sigma U_{1\text{-}2})_{\text{cons}} = V_1 - V_2$ (Equação 14.16), podemos reescrever o princípio do trabalho e energia para um corpo rígido como

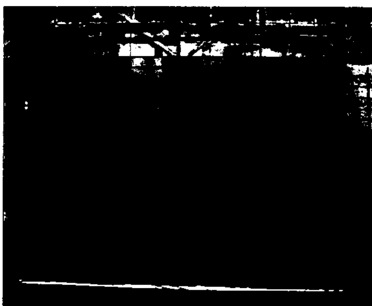
$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1\text{-}2})_{\text{não cons}} = T_2 + V_2 \qquad (18.17)$$

O termo $(\Sigma U_{1-2})_{\text{não cons}}$ representa o trabalho das forças não conservativas como o atrito. Se esse termo for zero, então

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2} \qquad (18.18)$$

Essa equação representa a conservação da energia mecânica. De acordo com essa equação, a *soma* das energias cinética e potencial (energia mecânica) permanece *constante* quando o corpo se move de uma posição para outra. Ela também se aplica a um sistema de corpos rígidos lisos e articulados, ligados por cabos inextensíveis e corpos engranzados com outros corpos. Em todos esses casos, as forças que agem nos pontos de contato são *eliminadas* da análise, pois elas ocorrem aos pares de forças colineares opostas e cada par sofre o mesmo deslocamento.

É importante lembrar que apenas problemas que envolvem sistemas de forças conservativas podem ser resolvidos usando a Equação 18.18. Como afirmado na Seção 14.5, atritos e forças de arrasto dependentes da velocidade ou da aceleração não são conservativos. O trabalho de tais forças é transformado em energia térmica usada para aquecer as superfícies em contato e conseqüentemente essa energia se dissipa para as vizinhanças, não podendo ser recuperada. Logo, problemas que envolvem forças de atrito podem ser resolvidos usando-se o princípio do trabalho e energia escrito na forma da Equação 18.17, se for o caso, ou as equações de movimento.



*As molas de torção localizadas no topo da porta da garagem se torcem à medida que se abaixa a porta. Quando se sobe a porta, a energia potencial armazenada nas molas transfere-se para a energia potencial gravitacional associada ao peso da porta, tornando fácil a sua abertura.*

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A equação da conservação da energia é aplicada para resolver problemas que envolvem *velocidade, deslocamento* e *sistemas de forças conservativas*. Para aplicações sugere-se o seguinte procedimento.

### *Energia Potencial*

- Trace dois diagramas mostrando o corpo nas suas posições inicial e final localizadas na trajetória.
- Se o centro de gravidade $G$ sofre um deslocamento vertical, estabeleça uma linha horizontal de referência para expressar a energia potencial gravitacional $V_g$.
- Dados referentes à altura $y_G$ do centro de gravidade medida a partir da linha de referência e da extensão ou compressão de qualquer mola ligada ao corpo podem ser determinados pela geometria do problema e apresentados nos dois diagramas.
- Lembre-se de que a energia potencial é dada por $V = V_g + V_e$, onde $V_g = Wy_G$, que pode ser positivo ou negativo, e $V_e = \frac{1}{2}ks^2$.

### *Energia Cinética*

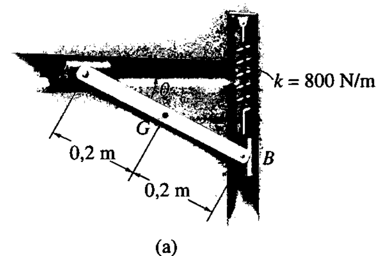
- A energia cinética do corpo rígido consiste em duas partes: a energia cinética de translação, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$, e a energia cinética de rotação, $T = \frac{1}{2}I_G\omega^2$.
- Diagramas cinemáticos para a velocidade podem ser úteis para a determinação de $v_G$ e $\omega$ ao se estabelecer uma *relação* entre essas quantidades.

### *Conservação da Energia*

- Aplique a equação da conservação da energia, $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.

## EXEMPLO 18.7

A barra $AB$ de 10 kg mostrada na Figura 18.19*a* tem seus movimentos restritos pelas ranhuras horizontal e vertical. A mola tem uma rigidez $k = 800$ N/m e não está deformada quando $\theta = 0°$. Determine a velocidade angular de $AB$ quando $\theta = 0°$, se a roda é solta a partir do repouso quando $\theta = 30°$. Despreze a massa dos blocos deslizantes.



(a)

## SOLUÇÃO

***Energia Potencial.*** Os dois diagramas da barra, quando ela é localizada em suas posições inicial e final, estão na Figura 18.19*b*. O nível de referência usado para expressar a energia potencial gravitacional é alinhado com a barra quando $\theta = 0°$.

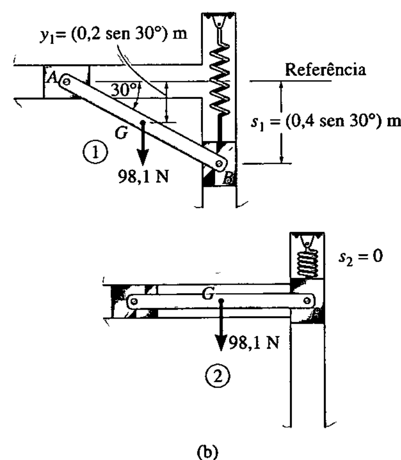
Quando a barra está na posição 1, o centro de gravidade $G$ localiza-se abaixo da linha de referência, de modo que a energia potencial gravitacional é *negativa*. Além disso, energia potencial elástica (*positiva*) fica armazenada na mola, pois ela está distendida de uma distância $s_1 = (0{,}4 \text{ sen } 30°)$ m. Logo:

$$V_1 = -Wy_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2$$

$$= -98{,}1 \text{ N}(0{,}2 \text{ sen } 30° \text{ m}) + \tfrac{1}{2}(800 \text{ N/m})(0{,}4 \text{ sen } 30° \text{ m})^2 = 6{,}19 \text{ J}$$

Quando a barra está na posição 2, a energia potencial da barra é zero, pois a mola não está deformada, $s_2 = 0$, e o centro de gravidade $G$ está na linha de referência. Logo:

$$V_2 = 0$$



(b)

**Figura 18.19**

***Energia Cinética.*** A barra é solta a partir do repouso na posição 1, assim $(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{0}$ e $\omega_1 = \mathbf{0}$, e

$$T_1 = 0$$

Na posição 2, a velocidade angular é $\boldsymbol{\omega}_2$ e o centro de massa tem velocidade $(\mathbf{v}_G)_2$. Assim:

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{12}(10\text{ kg})(0{,}4\text{ m})^2]\omega_2^2$$

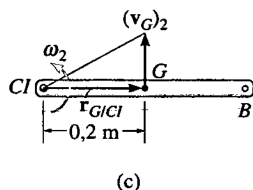


**Figura 18.19**

Usando a *cinemática*, $(\mathbf{v}_G)_2$ pode ser relacionada com $\boldsymbol{\omega}_2$, como podemos ver na Figura 18.19*c*. Nessa posição, o centro instantâneo de velocidade nula (*CI*) da barra está em *A*; logo, $(v_G)_2 = (r_{G/CI})\omega_2 = (0{,}2)\omega_2$. Substituindo a expressão anterior e simplificando, temos

$$T_2 = 0{,}267\omega_2^2$$

***Conservação da Energia.***

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$

$$\{0\} + \{6{,}19\} = \{0{,}267\omega_2^2\} + \{0\}$$

$$\omega_2 = 4{,}82\text{ rad/s}\circlearrowleft \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 18.8

O disco mostrado na Figura 18.20*a* tem peso de 30 lb e raio de giração $k_G = 0{,}6$ pé. Ele está preso a uma mola de rigidez $k = 2$ lb/pé e comprimento de 1 pé quando não deformada. Se o disco é solto a partir do repouso na posição mostrada na figura e rola sem escorregar, determine sua velocidade angular após *G* ter percorrido 3 pés para a esquerda.

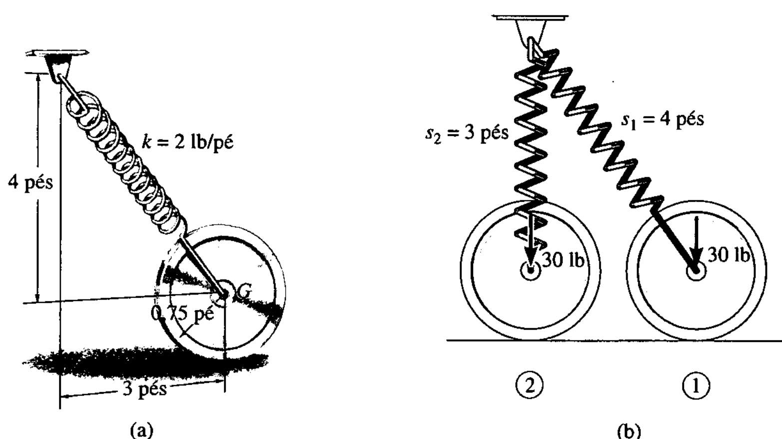


**Figura 18.20**

## SOLUÇÃO

***Energia Potencial.*** A Figura 18.20*b* mostra os dois diagramas do disco correspondentes às suas posições inicial e final. Uma linha de referência gravitacional é desnecessária neste caso, pois o peso não sofre deslocamento vertical. Da geometria do problema, deduz-se que a mola está distendida de

$s_1 = (\sqrt{3^2 + 4^2} - 1) = 4$ pés e de $s_2 = (4 - 1) = 3$ pés nas posições inicial e final, respectivamente. Assim,

$$V_1 = \tfrac{1}{2}ks_1^2 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ lb/pé})(4 \text{ pés})^2 = 16 \text{ J}$$

$$V_2 = \tfrac{1}{2}ks_2^2 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ lb/pé})(3 \text{ pés})^2 = 9 \text{ J}$$

***Energia Cinética.*** O disco é solto a partir do repouso, de modo que $(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$, logo

$$T_1 = 0$$

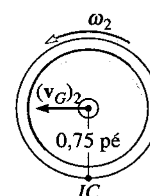
Na posição final

$$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{30 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{30 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(0{,}6 \text{ pé})^2\right]\omega_2^2$$

Como o disco rola sem escorregar, podemos relacionar $(\mathbf{v}_G)_2$ com $\boldsymbol{\omega}_2$, lançando mão do centro instantâneo de velocidade nula (Figura 18.20*c*), isto é, $(v_G)_2 = (0{,}75 \text{ pé})\omega_2$. Após substituição e simplificação obtemos

$$T_2 = 0{,}430\omega_2^2$$




(c)

**Figura 18.20**

***Conservação da Energia.***

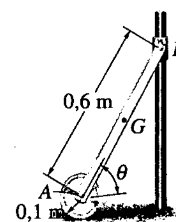
$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$

$$\{0\} + \{16\} = \{0{,}430\omega_2^2\} + \{9\}$$

$$\omega_2 = 4{,}04 \text{ rad/s}\circlearrowleft \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## EXEMPLO 18.9

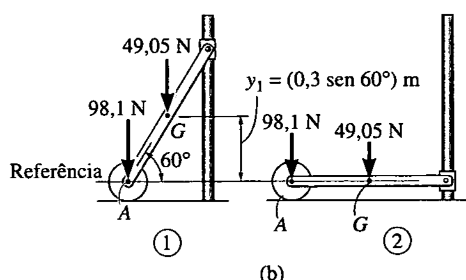
O disco homogêneo, de 10 kg, mostrado na Figura 18.21*a*, está preso numa barra uniforme *AB*, de 5 kg. Se o conjunto é solto a partir do repouso quando $\theta = 60°$, determine a velocidade angular da barra quando $\theta = 0°$. Suponha que o disco role sem escorregar. Despreze o atrito ao longo da haste guia. Despreze também a massa do cursor *B*.




(a)

## SOLUÇÃO

***Energia Potencial.*** A Figura 18.21*b* mostra os dois diagramas para a barra e o disco correspondentes às suas posições iniciais e finais. Por conveniência, o nível de referência passa pelo ponto *A*.




(b)

**Figura 18.21**

Quando o sistema ocupa a posição 1, a barra tem energia potencial gravitacional positiva. Assim,

$$V_1 = W_R y_1 = 49{,}05\ \text{N}(0{,}3\ \text{sen}\ 60°\ \text{m}) = 12{,}74\ \text{J}$$

Quando o sistema está na posição 2, o disco e a barra têm energia potencial nula. Por quê? Logo:

$$V_2 = 0$$

***Energia Cinética.*** Como o sistema todo está inicialmente em repouso,

$$T_1 = 0$$

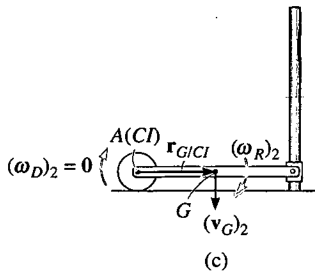



**Figura 18.21**

Na posição final, a barra tem uma velocidade angular $(\boldsymbol{\omega}_R)_2$ e seu centro de massa tem uma velocidade $(\mathbf{v}_G)_2$ (Figura 18.21*c*). Como a barra está na *posição horizontal,* o disco tem velocidade *nula*, donde $(\mathbf{v}_A)_2 = \mathbf{0}$ e $(\boldsymbol{\omega}_D)_2 = \mathbf{0}$. Para a barra $(\mathbf{v}_G)_2$ pode ser relacionada com $(\boldsymbol{\omega}_R)_2$ fazendo-se uso do centro instantâneo de velocidade nula, que está localizado em $A$ (Figura 18.21c). Logo, $(v_G)_2 = r_{G/CI}(\omega_R)_2$ ou $(v_G)_2 = 0{,}3(\omega_R)_2$. Assim:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_R(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G(\omega_R)_2^2 + \frac{1}{2}m_D(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}I_A(\omega_D)_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(5\ \text{kg})[0{,}3\ \text{m}(\omega_R)_2]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(5\ \text{kg})(0{,}6\ \text{m})^2\right](\omega_R)_2^2 + 0 + 0 \\ &= 0{,}3(\omega_R)_2^2 \end{aligned}$$

***Conservação da Energia.***

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$

$$\{0\} + \{12{,}74\} = \{0{,}3(\omega_R)_2^2\} + \{0\}$$

$$(\omega_R)_2 = 6{,}52\ \text{rad/s}↓$$ ***Resposta***

# PROBLEMAS

**18.35.** Resolva o Problema 18.13 usando a equação da conservação da energia.

***18.36.** Resolva o Problema 18.12 usando a equação da conservação da energia.

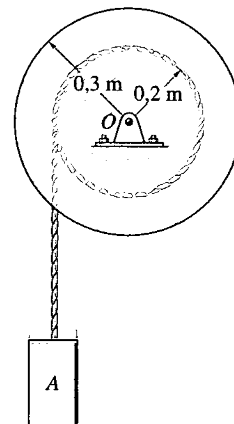
**18.37.** Resolva o Problema 18.30 usando a equação da conservação da energia.

**18.38.** Resolva o Problema 18.11 usando a equação da conservação da energia.

**18.39.** Resolva o Problema 18.34 usando a equação da conservação da energia.

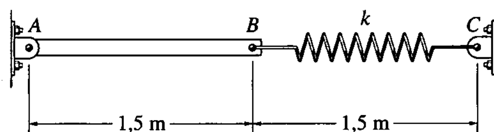
***18.40.** Resolva o Problema 18.28 usando a equação da conservação da energia.

**18.41.** A bobina tem massa de 50 kg e raio de giração $k_O$ = 0,280 m. Se o bloco $A$ de 20 kg é solto a partir do repouso, determine a que distância o bloco deve cair para que a bobina atinja uma velocidade angular de 5 rad/s. Determine também a tensão na corda durante o movimento do bloco. Despreze a massa da corda.



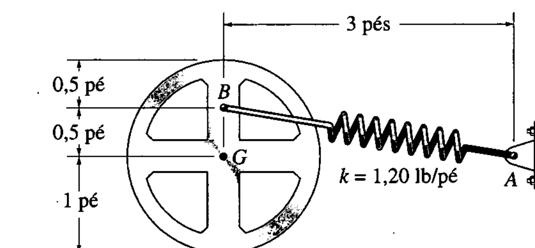

**Problema 18.41**

**18.42.** A barra delgada $AB$ de 10 kg está na posição horizontal e a mola não está deformada. Se o sistema for abandonado a partir do repouso, determine a rigidez $k$ que a mola deve ter para que a barra tenha velocidade angular nula ao atingir a posição vertical.



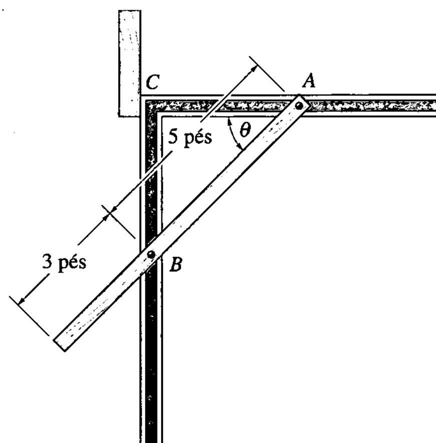

Problema 18.42

**18.43.** A roda de 50 lb tem raio de giração $k_G$ = 0,7 pé, em relação ao seu centro de gravidade $G$. Se a roda rola sem escorregar, determine sua velocidade angular quando ela tiver girado, no sentido horário, de 90°, relativamente à posição mostrada na figura. A mola tem rigidez $k$ = 1,20 lb/pé e comprimento, quando não deformada, de 0,5 pé. A roda é abandonada a partir do repouso.



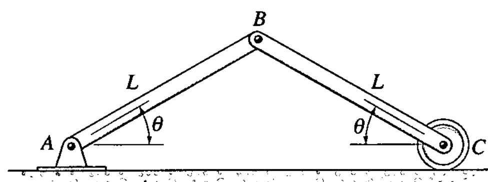

Problema 18.43

***18.44.** A porta inteiriça tem seu movimento determinado por guias, como mostrado na figura. Se a porta é levada para a posição $\theta$ = 0° (porta aberta) e, então, abandonada a partir do repouso, determine a velocidade da extremidade $A$, quando esta atinge $C$. Suponha que a porta seja uma placa de 180 lb, com uma largura de 10 pés.



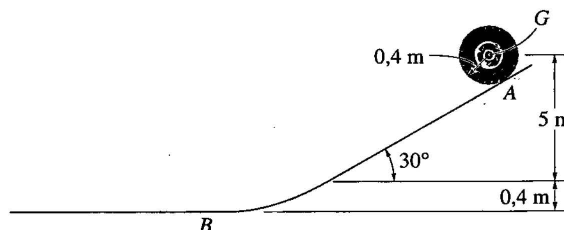

Problema 18.44

**18.45.** As duas barras são abandonadas a partir do repouso na posição $\theta$. Determine suas velocidades angulares no instante em que elas se tornam horizontais. Despreze a massa do rolete $C$. Cada barra tem massa $m$ e comprimento $L$.



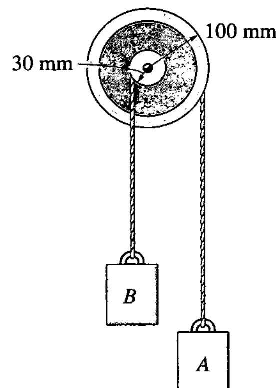

Problema 18.45

**18.46.** Uma roda de automóvel tem massa de 7 kg e raio de giração $k_G$ = 0,3 m. Se ela é abandonada a partir do repouso em $A$, determine sua velocidade angular ao atingir o piso horizontal. A roda rola sem escorregar.



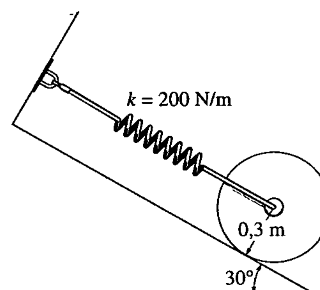

Problema 18.46

**18.47.** A polia composta é formada de um anel fixado no cubo. Se ela tem massa de 3 kg e raio de giração $k_G$ = 45 mm, determine a velocidade do bloco $A$ após uma descida de 0,2 m, a partir do repouso. Os blocos $A$ e $B$ têm, cada um, massa de 2 kg. Despreze a massa das cordas.



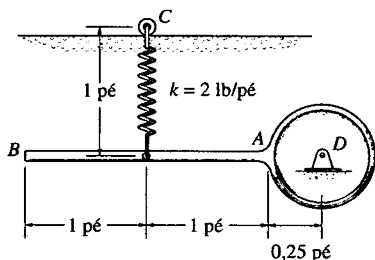

Problema 18.47

***18.48.** Na posição mostrada na figura, a mola não está deformada e o centro do disco de 40 kg tem velocidade 4 m/s. Determine a distância $d$, a partir desse ponto, percorrida pelo disco ao descer pelo plano, até atingir velocidade nula. O disco rola sem escorregar.



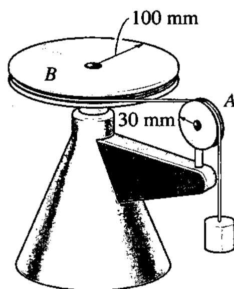

Problema 18.48

**18.49.** O pêndulo é formado por uma haste $BA$ de 2 lb e um disco de 6 lb. A mola se distende 0,3 pé quando a barra está na posição horizontal, como mostrado na figura. Se o pêndulo é solto a partir do repouso e pode girar em torno do ponto $D$, determine sua velocidade angular no instante em que a barra se torna vertical. O rolete $C$ permite que a mola se mantenha vertical durante a queda da barra.



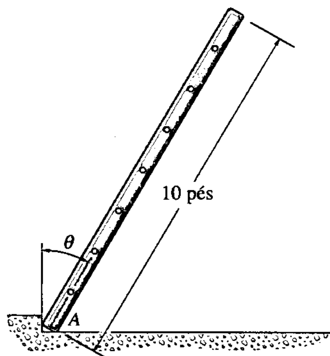

**Problema 18.49**

**18.50.** Considere o arranjo de uma polia $A$ de 3 kg com outra $B$ de 10 kg. Se um bloco de 2 kg, suspenso por uma corda, é abandonado a partir do repouso, determine a sua velocidade após ter descido 0,5 m. Despreze a massa da corda e considere as polias como discos finos. Não há escorregamento.




**Problema 18.50**

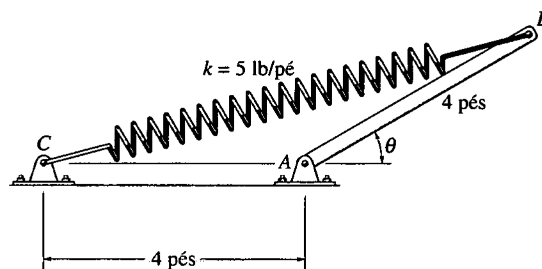
**18.51.** Uma escada uniforme de 30 lb é abandonada a partir do repouso, quando está na vertical. Se ela cai livremente, determine o ângulo $\theta$ para o qual a extremidade inferior $A$ começa a perder contato com o solo. Considere a escada uma barra delgada e despreze o atrito em $A$.




**Problema 18.51**

***18.52.** A barra delgada $AB$ de 25 lb está presa por uma mola $BC$ que tem um comprimento de 4 pés, quando não deformada. Se a barra é abandonada a partir do repouso quando $\theta = 30°$, determine sua velocidade angular no instante correspondente a $\theta = 90°$.

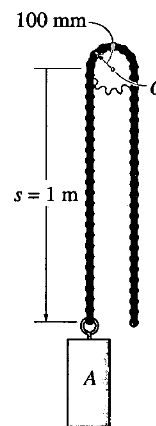
**18.53.** A barra delgada $AB$ de 25 lb está presa por uma mola $BC$ que tem comprimento de 4 pés, quando não deformada. Se a barra é abandonada a partir do repouso quando $\theta = 30°$, determine sua velocidade angular no instante em que a mola relaxa.




**Problemas 18.52/53**

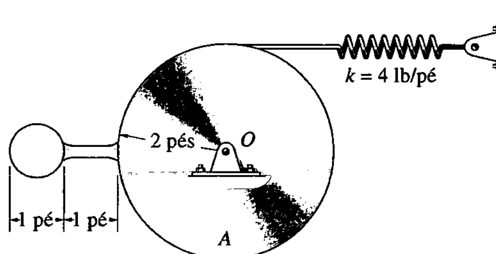
**18.54.** Uma corrente cuja massa é desprezível passa por uma roda dentada de 2 kg e raio de giração $k_O = 50$ mm. Se um bloco $A$ de 4 kg é solto a partir do repouso na posição $s = 1$ m, determine a velocidade angular da roda no instante em que $s = 2$ m.

**18.55.** Resolva o Problema 18.54 supondo que a corrente tem massa de 0,8 kg/m. Despreze a porção de corrente que passa pela roda dentada.




**Problemas 18.54/55**

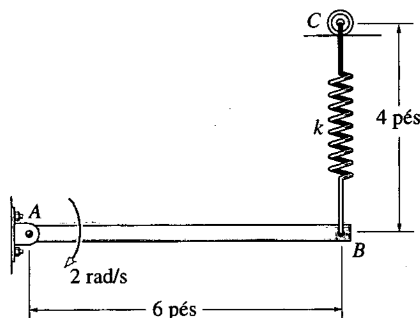
***18.56.** O disco $A$ de 15 lb pode girar em torno do pino em $O$. Uma barra de 1 pé que pesa 2 lb e uma esfera de 1 pé de diâmetro que pesa 10 lb estão soldadas no disco, como se mostra na figura. Se a mola está inicialmente distendida de 1 pé e a esfera é solta da posição mostrada na figura, determine a velocidade angular do disco ao fim de um giro de 90°.




**Problema 18.56**

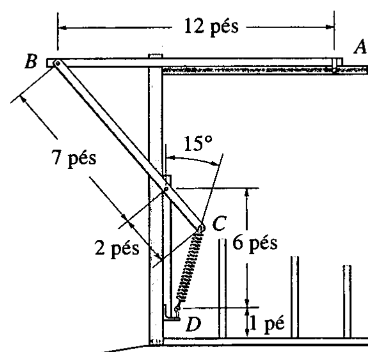
**18.57.** Num dado instante, a barra de 50 lb está girando para baixo a 2 rad/s, como mostrado na figura. A mola presa à sua extremidade permanece vertical devido ao rolete na guia *C*. Se a mola tem comprimento de 2 pés, quando não deformada, e rigidez $k = 6$ lb/pé, determine a velocidade angular da barra no instante correspondente a um giro de 30° abaixo da horizontal.

**18.58.** Num dado instante, a barra de 50 lb está girando para baixo a 2 rad/s, como mostrado na figura. A mola presa à sua extremidade permanece vertical devido ao rolete no guia *C*. Se a mola tem comprimento de 2 pés, quando não deformada, e rigidez $k = 12$ lb/pé, determine o ângulo $\theta$ que a barra faz com a horizontal no instante em que a sua velocidade se nula.




**Problemas 18.57/58**

**18.59.** A extremidade *A* da porta *AB* da garagem desloca-se ao longo de um trilho horizontal. A extremidade do elemento *BC* está presa a uma mola *C*. Se a mola não está inicialmente deformada, determine a rigidez *k* de modo que quando a porta desce, a partir do repouso, na posição mostrada na figura, ela terá velocidade angular nula quando fechar, isto é, quando ela e *BC* se tornarem verticais. Despreze a massa do elemento *BC* e suponha que a porta seja uma placa fina com peso de 200 lb e a largura seja igual à altura de 12 pés. Há outro elemento e outra mola no outro lado da porta.




**Problema 18.59**

## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Energia Cinética.*** A energia cinética de um corpo rígido em movimento plano poder ser relacionada com seu centro de massa. Para uma translação, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$. Se há rotação em torno de um eixo fixo que passa por um ponto *O*, então o seu centro de massa tem uma velocidade e o corpo tem uma velocidade angular. Logo, $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$. Usando-se $v_G = \omega r$ e o teorema dos eixos paralelos, também se pode determinar a energia cinética relativa a *O*. Tem-se $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$.
  Para um movimento plano geral, a energia cinética é simplesmente $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$, que é a soma escalar das energias cinéticas de translação e rotação.
- ***Trabalho de uma Força e de um Momento de Binário.*** Uma força realiza trabalho quando seu ponto de aplicação sofre um deslocamento *ds* na direção da própria força. O trabalho é $U = \int F\,ds$. Se a força é constante e tem a direção do deslocamento $\Delta s$ de seu ponto de aplicação, então $U = F\,\Delta s$. Se um peso **W** desloca-se de $\Delta y$ para baixo, então $U = W\,\Delta y$. Se uma força **F** alonga uma mola a uma distância *s*, então $U = \frac{1}{2}ks^2$. As forças de atrito e normal que agem num cilindro ou esfera que rola sem escorregar não realizam trabalho, pois elas agem em pontos sucessivos que têm velocidade nula no contato com a superfície. Um momento de binário realizará trabalho quando houver rotação na direção do momento. Se o momento for constante, então $U = M\,\theta$.
- ***Princípio do Trabalho e Energia.*** Problemas que envolvem velocidade, força e deslocamento podem ser resolvidos usando-se o princípio do trabalho e energia.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

  Nessa equação, a energia cinética é a soma de ambas as partes, a de translação e a de rotação. Em aplicações, um diagrama de corpo livre deve ser construído para se levar em conta o trabalho de todas as forças e momentos de binário que agem no corpo ao longo de sua trajetória.
- ***Conservação da Energia.*** Se um corpo rígido está submetido somente a forças conservativas, então a equação da conservação da energia mecânica pode ser usada para se resolver o problema. Essa equação exige

## REVISÃO DO CAPÍTULO (CONTINUAÇÃO)

que a soma das energias potencial e cinética (energia mecânica) do corpo permaneçam as mesmas em quaisquer dois pontos na trajetória; isto é,

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Nessa equação, a energia potencial é a soma das energias potencial gravitacional e elástica.

$$V = V_g + V_e$$

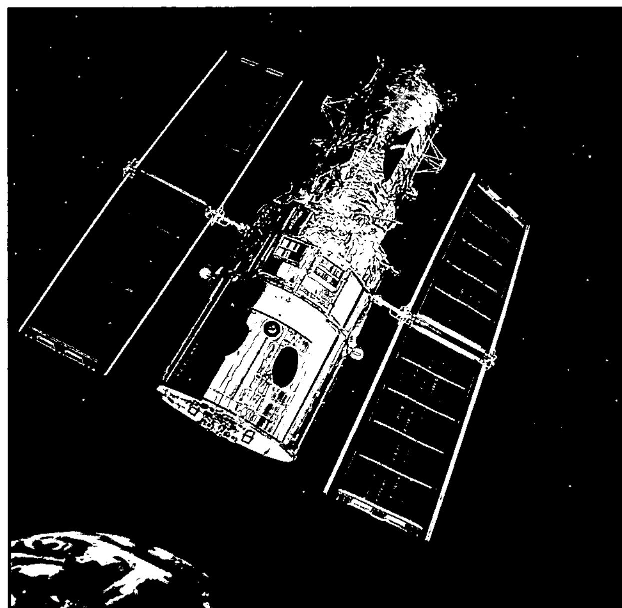
Em particular, a energia potencial será positiva se o centro de massa do corpo estiver localizado acima da linha de referência. Se estiver abaixo dessa linha, então a energia potencial gravitacional será negativa. A energia potencial elástica é sempre positiva, independentemente de a mola estar comprimida ou distendida.



# 19 Dinâmica do Movimento Plano de um Corpo Rígido: Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular

## Objetivos do Capítulo

- Desenvolver formulações para a quantidade de movimento e para o momento angular de um corpo.
- Aplicar os princípios do impulso e quantidade de movimento e momento angular na resolução de problemas de dinâmica que envolvem força, velocidade e tempo.
- Discutir a aplicação da conservação da quantidade de movimento e momento angular.
- Analisar a mecânica da colisão excêntrica.



*O lançamento deste satélite meteorológico exigiu a aplicação dos princípios do impulso e quantidade de movimento/momento angular para que se pudesse prever com suficiente exatidão seu movimento angular orbital e sua orientação.*

## 19.1 Quantidade de Movimento e Momento Angular

Neste capítulo, vamos usar os princípios do impulso e quantidade de movimento/momento angular para resolver problemas que envolvem força, velocidade e tempo, relacionados com o movimento plano de um corpo rígido. Antes de fazê-lo, será necessário formalizar os métodos para se obterem a quantidade de movimento e o momento angular do corpo que translada, gira em torno de um eixo fixo ou tem movimento plano geral. Vamos supor que o corpo seja simétrico relativamente a um plano de referência inercial $x$–$y$.

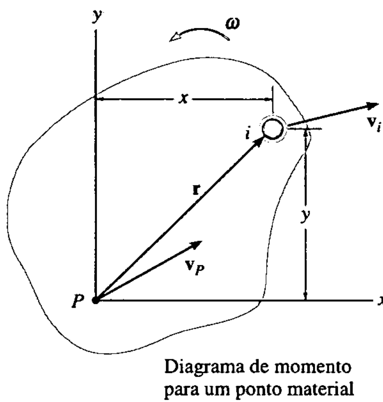
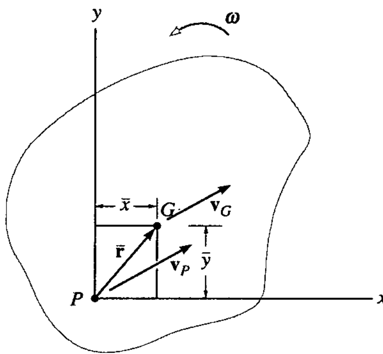



Diagrama de momento para um ponto material

(a)




(b)

**Figura 19.1**

***Quantidade de Movimento.*** A quantidade de movimento de um corpo rígido é determinada somando-se vetorialmente as quantidades de movimento para todos os pontos do corpo, isto é, $\mathbf{L} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$. Como $\Sigma m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_G$ (veja a Seção 1.2), também podemos escrever

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G \tag{19.1}$$

Essa equação afirma que a quantidade de movimento de um corpo é uma quantidade vetorial que tem *módulo* $mv_G$, expresso em kg·m/s (SI) ou em slug·pés/s, e *direção e sentido* definidos pela velocidade do centro de massa do corpo, $\mathbf{v}_G$.

***Momento Angular.*** Consideremos o corpo mostrado na Figura 19.1*a*, que tem movimento plano geral. Num determinado instante, o corpo tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e um ponto $P$ arbitrariamente escolhido nesse corpo tem velocidade $\mathbf{v}_P$. A velocidade do *i*-ésimo ponto do corpo pode ser expressa em função de $\mathbf{v}_P$ e $\boldsymbol{\omega}$ (Figura 19.1*a*) como

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

O momento angular do *i*-ésimo ponto em relação ao ponto $P$ é igual ao 'momento' da quantidade de movimento em relação a $P$ (Figura 19.1*a*). Assim,

$$(\mathbf{H}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i \mathbf{v}_i$$

Usando a expressão de $\mathbf{v}_i$ em função de $\mathbf{v}_P$, obtemos em coordenadas cartesianas

$$(H_P)_i \mathbf{k} = m_i(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(v_P)_x \mathbf{i} + (v_P)_y \mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]$$

$$(H_P)_i = -m_i y (v_P)_x + m_i x (v_P)_y + m_i \omega r^2$$

Tomando o limite $m_i \rightarrow dm$ e integrando sobre toda a massa $m$ do corpo, temos

$$H_P = -\left(\int_m y\, dm\right)(v_P)_x + \left(\int_m x\, dm\right)(v_P)_y + \left(\int_m r^2\, dm\right)\omega$$

Nessa equação $H_P$ representa o momento angular do corpo em relação a um eixo (eixo $z$) que é perpendicular ao plano do movimento e passa pelo ponto $P$. Como $\bar{y}m = \int y\, dm$ e $\bar{x}m = \int x\, dm$, as integrais para o primeiro e o segundo termo no segundo membro localizam o centro de massa $G$ relativamente a $P$ (Figura 19.1*b*). A última integral representa o momento de inércia calculado em relação ao eixo $z$, isto é, $I_P = \int r^2\, dm$. Assim,

$$H_P = -\bar{y}m(v_P)_x + \bar{x}m(v_P)_y + I_P\omega \tag{19.2}$$

A equação anterior pode ser simplificada se o ponto $P$ coincide com o centro de massa do corpo,[1] pois nesse caso $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Logo,

$$\boxed{H_G = I_G\omega} \tag{19.3}$$

*A equação anterior afirma que o momento angular do corpo em relação a G é igual ao produto do momento de inércia do corpo, em relação a um eixo*

[1] A equação também se reduz à mesma forma simples, $H_P = I_P\omega$, se o ponto $P$ é um ponto *fixo* (veja a Equação 19.9) ou a velocidade de $P$ é paralela à linha $PG$.

*que passa por G, e a velocidade angular do corpo.* É importante observar que $\mathbf{H}_G$ é uma quantidade vetorial de *módulo* $I_G\omega$, que pode ser expresso em kg·m²/s (SI) ou em slug·pés²/s, com *direção e sentido* de $\boldsymbol{\omega}$ (para o caso de corpo simétrico relativamente a um plano de referência inercial $x$–$y$), que é mantido sempre perpendicular ao plano do movimento.

A Equação 19.2 pode ser reescrita em função dos componentes $x$ e $y$ da velocidade do centro de massa do corpo, $(v_G)_x$ e $(v_G)_y$, e do momento de inércia $I_G$. Como o ponto $G$ tem coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$, então, pelo teorema dos eixos paralelos, $I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$. Substituindo esse resultado na Equação 19.2 e rearranjando os termos, temos

$$H_P = \bar{y}m[-(v_P)_x + \bar{y}\omega] + \bar{x}m[(v_P)_y + \bar{x}\omega] + I_G\omega \qquad (19.4)$$

Do diagrama cinemático (Figura 19.1*b*), $\mathbf{v}_G$ pode ser expressa em termos de $\mathbf{v}_P$ como

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}$$

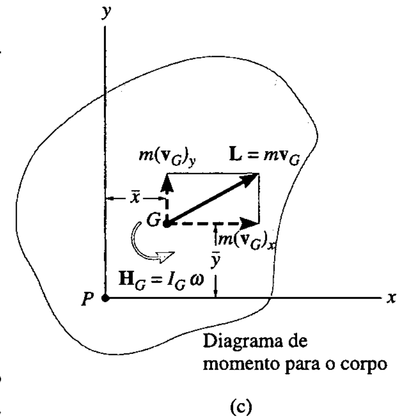
$$(v_G)_x\mathbf{i} + (v_G)_y\mathbf{j} = (v_p)_x\mathbf{i} + (v_p)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

Efetuando a multiplicação vetorial e igualando os respectivos componentes $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, temos as seguintes equações escalares

$$(v_G)_x = (v_P)_x - \bar{y}\omega$$
$$(v_G)_y = (v_P)_y + \bar{x}\omega$$

A substituição desses resultados na Equação 19.4 resulta em

$$H_P = -\bar{y}m(v_G)_x + \bar{x}m(v_G)_y + I_G\omega \qquad (19.5)$$



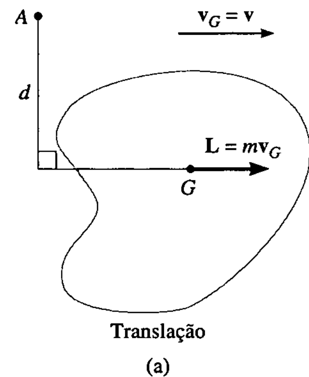
(c)

**Figura 19.1**

Com referência à Figura 19.1*c*, *esse resultado indica que o momento angular do corpo calculado em relação ao ponto P é equivalente ao momento da quantidade de movimento* $m\mathbf{v}_G$ *ou seus componentes cartesianos* $m(\mathbf{v}_G)_x$ *e* $m(\mathbf{v}_G)_y$, *em relação a P, somado ao momento angular* $I_G\boldsymbol{\omega}$. Observemos que como $\boldsymbol{\omega}$ é um vetor livre $\mathbf{H}_G$ *pode 'agir' em qualquer ponto do corpo*, desde que preserve sua direção e seu sentido. Além disso, como o momento angular é igual ao 'momento' angular da quantidade de movimento, a reta de ação de $\mathbf{L}$ deve passar pelo centro de massa $G$ para preservar o valor correto do módulo de $\mathbf{H}_P$, quando os 'momentos' são calculados em relação a $P$ (Figura 19.1*c*). Como resultado dessa análise, passaremos agora a considerar os três tipos de movimento.

***Translação.*** Quando um corpo rígido de massa $m$ está em movimento de *translação* retilínea ou curvilínea (Figura 19.2*a*), sua velocidade angular é $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e o seu centro de massa tem uma velocidade $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}$. Logo, a quantidade de movimento e o momento angular em relação a $\mathbf{G}$ se tornam

$$\boxed{\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= 0 \end{aligned}} \qquad (19.6)$$

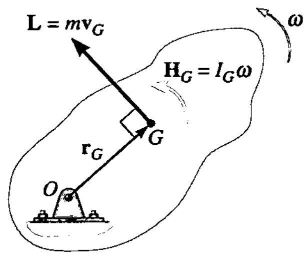


(a)

**Figura 19.2**

Se o momento angular é calculado em relação a qualquer ponto $A$ no corpo ou fora dele (Figura 19.2*a*), o 'momento' da quantidade de movimento $\mathbf{L}$ deve ser calculado em relação a esse ponto. Como $d$ é o 'braço do momento' (veja a figura), então, de acordo com a Equação 19.5, $H_A = (d)(mv_G)\,\circlearrowright$.

***Rotação em torno de um Eixo Fixo.*** Quando o corpo rígido *gira em torno de um eixo fixo* passando pelo ponto $O$ (Figura 19.2*b*), a quantidade de movimento e o momento angular em relação a $G$ são



Rotação em torno de um eixo fixo

(b)

$$\boxed{\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= I_G\omega \end{aligned}} \qquad (19.7)$$

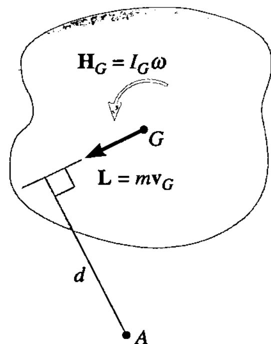
Algumas vezes torna-se conveniente calcular o momento angular do corpo em relação a $O$. Nesse caso, é necessário levar em conta os vetores $\mathbf{L}$ e $\mathbf{H}_G$ em relação a $O$. Observando que $\mathbf{L}$ (ou $\mathbf{v}_G$) é sempre perpendicular a $\mathbf{r}_G$, temos

$$\circlearrowright+ \qquad H_O = I_G\omega + r_G(mv_G) \qquad (19.8)$$

Essa equação pode ser *simplificada* substituindo-se primeiro $v_G = r_G\omega$ e, em seguida, fatorando-se $\omega$, de modo que $H_O = (I_G + mr_G^2)\omega$. Pelo teorema dos eixos paralelos, vemos que os termos entre parênteses nessa última expressão representam o momento de inércia $I_O$ do corpo em relação a um eixo que é perpendicular ao plano de movimento e passa por $O$. Logo:[2]

$$\boxed{H_O = I_O\,\omega} \qquad (19.9)$$

Para cálculos, podemos usar a Equação 19.8 ou a Equação 19.9.



Movimento plano geral

(c)

**Figura 19.2**

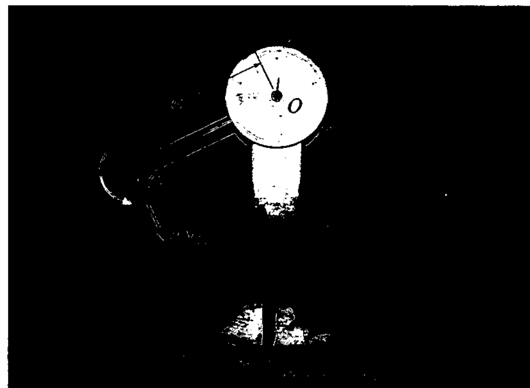
***Movimento Plano Geral.*** Quando um corpo rígido está em movimento plano geral (Figura 19.2*c*), a quantidade de movimento linear e o momento angular calculado em relação a $G$ tornam-se

$$\boxed{\begin{aligned} L &= mv_G \\ H_G &= I_G\omega \end{aligned}} \qquad (19.10)$$

Se o momento angular é calculado em relação a um ponto $A$ no corpo ou fora dele (Figura 19.2*c*), é necessário levar em conta os momentos em relação a esse ponto. Nesse caso,

$$\circlearrowright+ \qquad H_A = I_G\omega + (d)(mv_G)$$

onde $d$ é o braço do momento, como se mostra na figura.



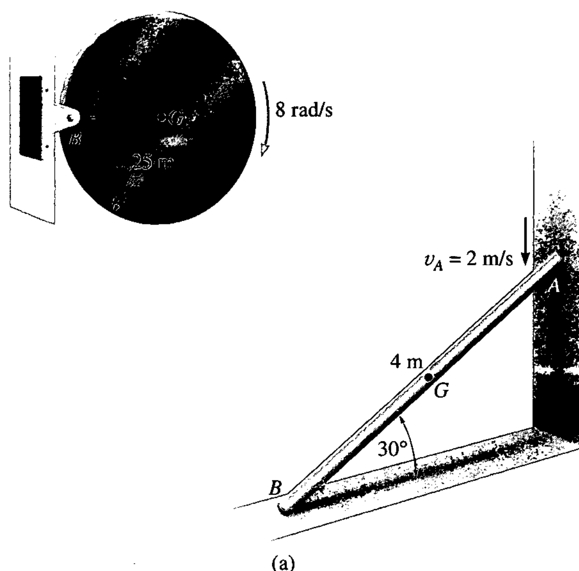
*O momento angular em relação a $O$ do pêndulo que se move para baixo pode ser determinado calculando-se a soma de $I_G\boldsymbol{\omega}$ com o momento de $m\mathbf{v}_G$ em relação a $O$. O resultado é $H_O = I_G\omega + (mv_G)d$. Como $v_G = \omega d$, então $H_O = I_G\omega + m(\omega d)d = (I_G + md^2)\omega = I_O\omega$.*

## EXEMPLO 19.1

Num dado instante, o disco de 10 kg e a barra de 5 kg têm os movimentos indicados na Figura 19.3*a*. Determine os momentos angulares em relação a $G$ e em relação ao ponto $B$ para o disco, nesse instante. Determine também

[2] Deve-se notar a semelhança entre essa dedução, a da Equação 17.16 ($\Sigma M_O = I_O\alpha$) e a da Equação 18.5 ($T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$) e também que o mesmo resultado pode ser obtido da Equação 19.2, se escolhemos o ponto $P$ coincidente com $O$ e observamos que $(v_O)_x = (v_O)_y = 0$.

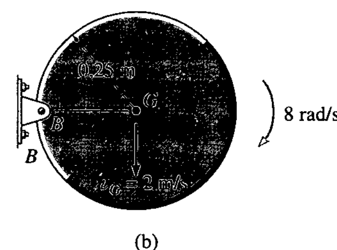
os momentos angulares em relação a $G$ e em relação ao $CI$ para a barra, no mesmo instante.




(a)

## SOLUÇÃO

***Disco.*** Como o disco *gira em torno de um eixo fixo* (passando pelo ponto $B$), então $v_G = (8 \text{ rad/s})(0{,}25 \text{ m}) = 2 \text{ m/s}$ (Figura 19.3*b*). Logo:




(b)

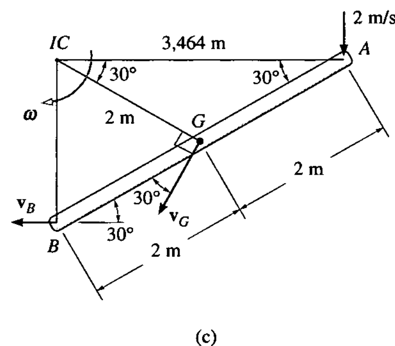
$$\circlearrowleft + H_G = I_G\omega = [\tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2](8 \text{ rad/s}) = 2{,}50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$ ***Resposta***

$$\circlearrowleft + H_B = I_G\omega + (mv_G)r_G = 2{,}50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} + (10 \text{ kg})(2 \text{ m/s})(0{,}25 \text{ m})$$
$$= 7{,}50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \circlearrowright$$ ***Resposta***

Pela tabela que consta no final do livro, $I_B = (3/2)mr^2$, de modo que

$$\circlearrowleft + H_B = I_B\omega = [\tfrac{3}{2}(10 \text{ kg})(0{,}25 \text{ m})^2](8 \text{ rad/s}) = 7{,}50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \circlearrowright$$ ***Resposta***

***Barra.*** A barra tem *movimento plano geral.* O $CI$ está determinado na Figura 19.3*c*, de modo que $\omega = (2 \text{ m/s})/(3{,}464 \text{ m}) = 0{,}5774 \text{ rad/s}$ e $v_G = (0{,}5774 \text{ rad/s})(2 \text{ m}) = 1{,}155 \text{ m/s}$. Assim:




(c)

$$\circlearrowleft + H_G = I_G\omega = [\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2](0{,}5774 \text{ rad/s}) = 3{,}85 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \circlearrowright$$ ***Resposta***

Dos momentos de $I_G$ e de $mv_G$ em relação ao $CI$ temos

$$\circlearrowleft + H_{IC} = I_G\omega + d(mv_G) = 3{,}85 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} + (2 \text{ m})(5 \text{ kg})(1{,}155 \text{ m/s})$$
$$= 15{,}4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} \circlearrowright$$ ***Resposta***

**Figura 19.3**

# 19.2 PRINCÍPIOS DO IMPULSO E QUANTIDADE DE MOVIMENTO/MOMENTO ANGULAR

Como no caso do movimento de um ponto material, os princípios do impulso e quantidade de movimento e momento angular para um corpo podem ser desenvolvidos *combinando-se* as equações de movimento com a cinemática. As

equações resultantes permitirão uma *solução direta a problemas que envolvem força, velocidade* e *tempo.*

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento.*** A equação de movimento para a translação de um corpo rígido pode ser escrita como $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G = m\,(d\mathbf{v}_G/dt)$. Como a massa do corpo é constante:

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_G)$$

Multiplicando ambos os membros por $dt$ e integrando de $t = t_1, \mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_1$ a $t = t_2, \mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_2$, obtemos

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2 - m(\mathbf{v}_G)_1 \qquad (19.11)$$

Essa equação expressa o *princípio do impulso e quantidade de movimento.* De acordo com esse princípio a soma de todos os impulsos criados pelo *sistema de forças externas* que agem no corpo durante o intervalo de tempo $t_1$ a $t_2$ é igual à variação da quantidade de movimento do corpo nesse intervalo de tempo (Figura 19.4).

***Princípio do Impulso e Momento Angulares.*** Se o corpo tem *movimento plano geral* podemos escrever $\Sigma M_G = I_G\alpha = I_G(d\omega/dt)$. Como o momento de inércia é constante,

$$\Sigma M_G = \frac{d}{dt}(I_G\omega)$$

Multiplicando ambos os membros por $dt$ e integrando de $t = t_1$, $\omega = \omega_1$ a $t = t_2$, $\omega = \omega_2$, temos

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_G\,dt = I_G\omega_2 - I_G\omega_1 \qquad (19.12)$$

Da mesma forma, para *rotação em torno de um eixo fixo* passando por $O$, a Equação 17.16 ($\Sigma M_O = I_O\alpha$), quando integrada, torna-se

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt = I_O\omega_2 - I_O\omega_1 \qquad (19.13)$$

As equações 19.12 e 19.13. expressam o *princípio do impulso e momento angulares.* Ambas as equações afirmam que a soma dos impulsos angulares que agem no corpo durante o intervalo de tempo $t_1$ a $t_2$ é igual à variação do momento angular do corpo, durante esse intervalo de tempo. Em particular, o impulso angular considerado é determinado integrando-se os momentos, em relação ao ponto $G$ ou $O$, de todas as forças e momentos de binário externos aplicados no corpo.

Resumindo os conceitos que acabamos de apresentar, podemos dizer que, se o movimento ocorre no plano $x$–$y$, usando-se os princípios do impulso e quantidade de movimento e momento angular, as seguintes *três equações escalares* descrevem o *movimento plano* do corpo rígido:

$$
\begin{aligned}
m(v_{Gx})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x \, dt &= m(v_{Gx})_2 \\
m(v_{Gy})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y \, dt &= m(v_{Gy})_2 \\
I_G \omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G \, dt &= I_G \omega_2
\end{aligned}
\tag{19.14}
$$

As primeiras duas equações representam o princípio do impulso e quantidade de movimento no plano $x$–$y$ (Equação 19.11). A terceira equação representa o princípio do impulso e momento angulares em relação ao eixo $z$, que passa pelo centro de massa $G$ (Equação 19.12).

Os termos nas equações 19.14 podem ser representados graficamente pelos diagramas de impulso e quantidade de movimento e momento angular para o corpo (Figura 19.4). Observemos que as quantidades de movimento $m\mathbf{v}_G$ têm suas origens no centro de massa do corpo (figuras 19.4*a* e 19.4*c*), enquanto os momentos angulares são vetores livres e, portanto, da mesma maneira que um torque de binário, podem ser considerados em qualquer ponto do corpo. Quando se constrói o diagrama de impulso (Figura 19.4*b*), as forças **F** e o momento **M**, que variam com o tempo, são indicados por integrais. Contudo, se **F** e **M** são *constantes* de $t_1$ a $t_2$, a integração dos impulsos resulta em $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$ e $\mathbf{M}(t_2 - t_1)$, respectivamente. Como exemplo dessa situação temos o caso da força peso **W** (Figura 19.4*b*).

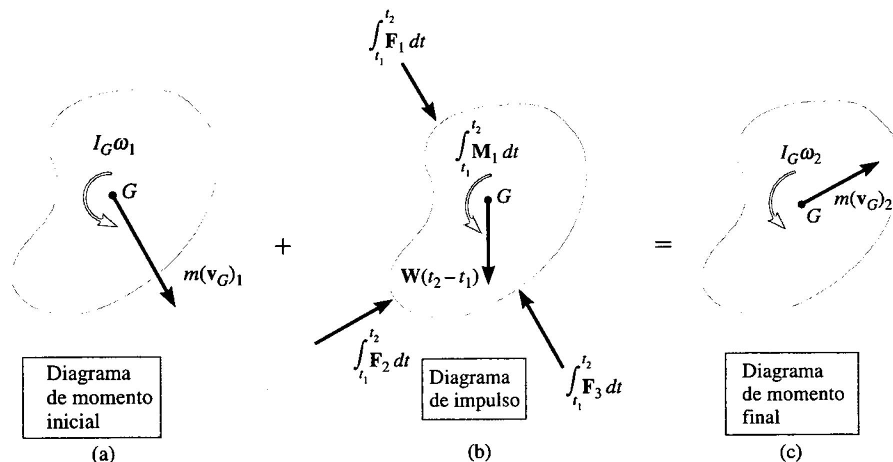



**Figura 19.4**

As equações 19.14 também podem ser aplicadas a um sistema inteiro de corpos ligados, em vez de a cada corpo separadamente. Esse procedimento elimina a necessidade de incluir os impulsos de reações que ocorrem nas ligações e são, portanto, *internas* ao sistema. As equações resultantes podem ser escritas simbolicamente como

$$
\begin{aligned}
\left(\Sigma \begin{matrix}\text{quantidade de movimento}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{x1} + \left(\Sigma \begin{matrix}\text{impulso do}\\ \text{sistema}\end{matrix}\right)_{x(1-2)} &= \left(\Sigma \begin{matrix}\text{quantidade de movimento}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{x2} \\
\left(\Sigma \begin{matrix}\text{quantidade de movimento}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{y1} + \left(\Sigma \begin{matrix}\text{impulso do}\\ \text{sistema}\end{matrix}\right)_{y(1-2)} &= \left(\Sigma \begin{matrix}\text{quantidade de movimento}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{y2} \\
\left(\Sigma \begin{matrix}\text{momento angular}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{O1} + \left(\Sigma \begin{matrix}\text{impulso angular}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{O(1-2)} &= \left(\Sigma \begin{matrix}\text{momento angular}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{O2}
\end{aligned}
\tag{19.15}
$$

Como indicado anteriormente, o impulso e o momento angulares do sistema devem ser calculados em relação ao *mesmo ponto de referência fixo O* para *todos* os corpos do sistema.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Os princípios do impulso e quantidade de movimento/momento angular são usados para resolver problemas de dinâmica que envolvem *velocidade, força* e *tempo*, pois esses termos estão inter-relacionados na formulação.

### *Diagrama de Corpo Livre*

- Estabeleça o sistema inercial $x$, $y$, $z$ e trace o diagrama de corpo livre levando em conta todas as forças e momentos de binário que produzem impulsos no corpo.
- As direções e os sentidos das velocidades, $\mathbf{v}_G$, inicial e final do centro de massa do corpo, bem como das suas velocidades angulares, $\boldsymbol{\omega}$, inicial e final, devem ser estabelecidos. Se qualquer uma dessas quantidades for desconhecida, suponha como sentidos positivos para seus componentes os sentidos dos eixos coordenados.
- Calcule o momento de inércia $I_G$ ou $I_O$.
- Como procedimento alternativo, construa os diagramas do impulso e quantidade de movimento/momento angular para o corpo ou sistema de corpos. Cada um desses diagramas representa um esboço do corpo que leva em conta os dados necessários para cada um dos três termos nas equações 19.14 ou 19.15 (Figura 19.4). Esses diagramas são particularmente úteis para a visualização dos termos de 'momento' usados no princípio do impulso e momento angulares, se a aplicação é feita em relação a um ponto diferente do centro de massa $G$ ou de um ponto fixo $O$.

### *Princípios do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular*

- Aplique as três equações escalares do impulso e quantidade de movimento/momento angular.
- O momento angular de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo é o momento de $m\mathbf{v}_G$ somado a $I_G\boldsymbol{\omega}$, em relação ao eixo. Pode-se mostrar que esse resultado é igual a $\mathbf{H}_O = I_O\boldsymbol{\omega}$, onde $I_O$ é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo.
- Todas as forças no diagrama de corpo livre do corpo criarão impulso; todavia, algumas dessas forças não realizarão trabalho.
- Forças que são funções do tempo devem ser integradas para se obterem os impulsos. Graficamente, o impulso é igual à área sob a curva 'força *versus* tempo'.
- Utiliza-se freqüentemente o princípio do impulso e momento angulares para eliminar forças impulsivas desconhecidas que são paralelas a ou passam por um eixo comum.

### *Cinemática*

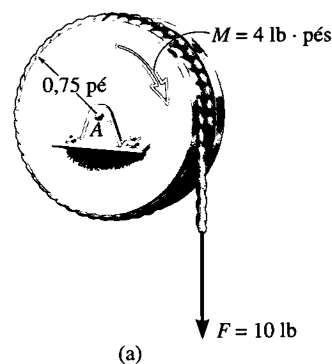
- Se mais do que três equações forem necessárias para uma solução completa, será possível relacionar, pela *cinemática*, a velocidade do centro de massa com a velocidade angular do corpo. Se o movimento parecer complicado, diagramas cinemáticos (velocidade) poderão ser úteis para se obterem as relações necessárias.

## EXEMPLO 19.2

O disco de 20 lb mostrado na Figura 19.5*a* é uniforme e está suportado por um pino em seu centro. Se o disco está submetido a um torque de binário de 4 lb·pés e a uma força de 10 lb aplicada na corda enrolada em sua periferia, determine a sua velocidade angular dois segundos após a partida do repouso. Quais são os componentes da força de reação no pino?

### SOLUÇÃO

Como velocidade angular, força e tempo estão envolvidos, aplicaremos os princípios do impulso e quantidade de movimento/momento angular.



(a)

***Diagrama de Corpo Livre.*** Consideremos a Figura 19.5*b*. O centro de massa do disco não se move; todavia, o carregamento causa uma rotação no disco no sentido horário.

O momento de inércia do disco em relação ao seu eixo fixo de rotação é

$$I_A = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(0{,}75\text{ pé})^2 = 0{,}175\text{ slug}\cdot\text{pé}^2$$

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.***

$$(\overset{+}{\rightarrow})\qquad m(v_{Ax})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_{Ax})_2$$

$$0 + A_x(2\text{ s}) = 0$$

$$(+\uparrow)\qquad m(v_{Ay})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m(v_{Ay})_2$$

$$0 + A_y(2\text{ s}) - 20\text{ lb}(2\text{ s}) - 10\text{ lb}(2\text{ s}) = 0$$

$$(\curvearrowright +)\qquad I_A\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = I_A\omega_2$$

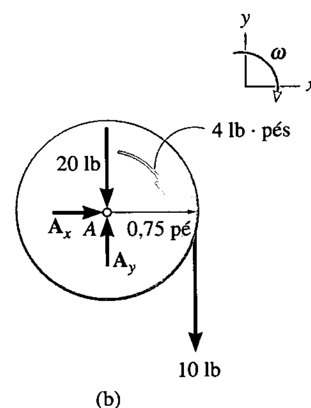
$$0 + 4\text{ lb}\cdot\text{pés}(2\text{ s}) + [10\text{ lb}(2\text{ s})](0{,}75\text{ pé}) = 0{,}175\omega_2$$

Resolvendo, obtemos

$$A_x = 0 \qquad \textit{Resposta}$$

$$A_y = 30\text{ lb} \qquad \textit{Resposta}$$

$$\omega_2 = 132\text{ rad/s} \curvearrowright \qquad \textit{Resposta}$$



(b)

**Figura 19.5**

## EXEMPLO 19.3

A bobina de 100 kg mostrada na Figura 19.6*a* tem raio de giração $k_G$ = 0,35 m. A extremidade livre de um cabo enrolado no tambor central da bobina está sujeita a uma força horizontal de intensidade variável, $P = (t + 10)$ N, onde $t$ é dado em segundos. Se a bobina está inicialmente em repouso, determine sua velocidade angular após 5 s. Suponha que a bobina role sem escorregar em $A$.

## SOLUÇÃO

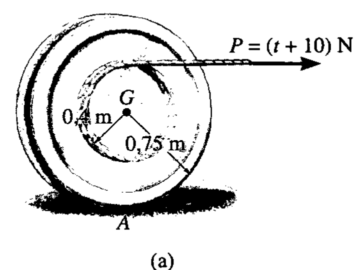
***Diagrama de Corpo Livre.*** Por inspeção do diagrama de corpo livre (Figura 19.6*b*), a força *variável* **P** causará uma força de atrito variável $\mathbf{F}_A$, portanto os impulsos de **P** e $\mathbf{F}_A$ devem ser determinados por integração. O sistema de forças impõe ao centro de massa uma velocidade $\mathbf{v}_G$ para a direita e faz a bobina girar no sentido horário, com velocidade $\boldsymbol{\omega}$.

O momento de inércia da bobina em relação ao centro de massa é

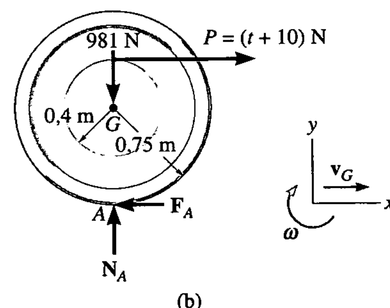
$$I_G = mk_G^2 = 100\text{ kg}(0{,}35\text{ m})^2 = 12{,}25\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.***

$$(\overset{+}{\rightarrow})\qquad m(v_G)_1 + \Sigma\int F_x\,dt = m(v_G)_2$$

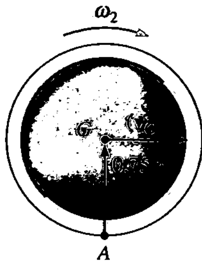


(a)



(b)

**Figura 19.6**




(c)

**Figura 19.6**

$$0 + \int_0^{5\,s} (t + 10)\,\text{N}\,dt - \int F_A\,dt = 100\,\text{kg}(v_G)_2$$

$$62{,}5 - \int F_A\,dt = 100(v_G)_2 \quad (1)$$

$$(\circlearrowright +) \qquad I_G\omega_1 + \Sigma \int M_G\,dt = I_G\omega_2$$

$$0 + \left[\int_0^{5\,s} (t + 10)\,\text{N}\,dt\right](0{,}4\,\text{m}) + \left(\int F_A\,dt\right)(0{,}75\,\text{m}) = (12{,}25\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2$$

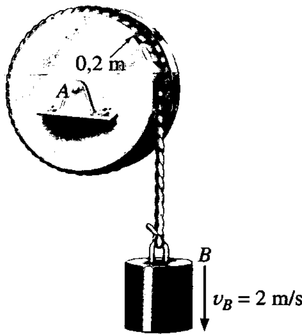
$$25 + \left(\int F_A\,dt\right)(0{,}75) = 12{,}25\omega_2 \quad (2)$$

***Cinemática.*** Como a bobina não escorrega, o ponto $A$ é o centro instantâneo de velocidade nula (Figura 19.6*c*). Logo, a velocidade de $G$ pode ser expressa em função da velocidade angular como $(v_G)_2 = (0{,}75\,\text{m})\omega_2$. Substituindo esse resultado na Equação 1 e eliminando o impulso desconhecido $\int F_A\,dt$ entre as equações 1 e 2, obtemos

$$\omega_2 = 1{,}05\,\text{rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resposta}$$

*Observação*: Uma solução mais direta poderia ser obtida aplicando-se o princípio do impulso e momento angulares em relação ao ponto $A$. Como exercício, proceda dessa forma e obtenha o mesmo resultado.

## EXEMPLO 19.4




(a)

**Figura 19.7**

O bloco mostrado na Figura 19.7*a* tem uma massa de 6 kg e está preso a uma corda enrolada na periferia de um disco de 20 kg cujo momento de inércia é $I_A = 0{,}40\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Se o bloco se desloca inicialmente para baixo a uma velocidade de 2 m/s, determine sua velocidade após 3 s. Despreze a massa da corda.

### SOLUÇÃO I

***Diagrama de Corpo Livre.*** Os diagramas de corpo livre para o bloco e o disco estão na Figura 19.7*b*. Todas as forças são *constantes*, pois o peso do bloco provoca o movimento. O movimento do bloco para baixo (velocidade $\mathbf{v}_B$) causa uma rotação do disco no sentido horário ($\boldsymbol{\omega}$).

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Podemos eliminar $\mathbf{A}_x$ e $\mathbf{A}_y$ aplicando o princípio do impulso e momento angulares em relação ao ponto $A$. Logo:

Disco

$$(\circlearrowright +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$0{,}40\,\text{kg}\cdot\text{m}^2(\omega_1) + T(3\,\text{s})(0{,}2\,\text{m}) = (0{,}4\,\text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2$$

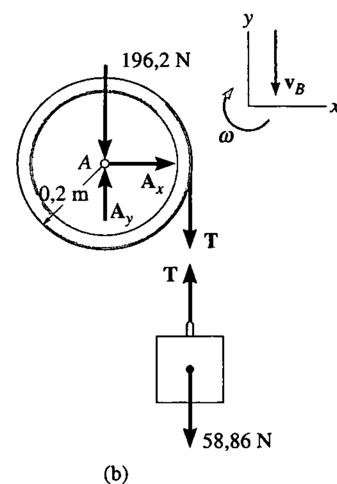
Bloco

$$(+\uparrow) \qquad m_B(v_B)_1 + \Sigma \int F_y\,dt = m_B(v_B)_2$$

$$-6\,\text{kg}(2\,\text{m/s}) + T(3\,\text{s}) - 58{,}86\,\text{N}(3\,\text{s}) = -6\,\text{kg}(v_B)_2$$

***Cinemática.*** Como $\omega = v_B/r$, então $\omega_1 = (2\text{ m/s})/(0{,}2\text{ m}) = 10\text{ rad/s}$ e $\omega_2 = (v_B)_2/0{,}2\text{ m} = 5(v_B)_2$. Substituindo e resolvendo o sistema de equações, obtemos

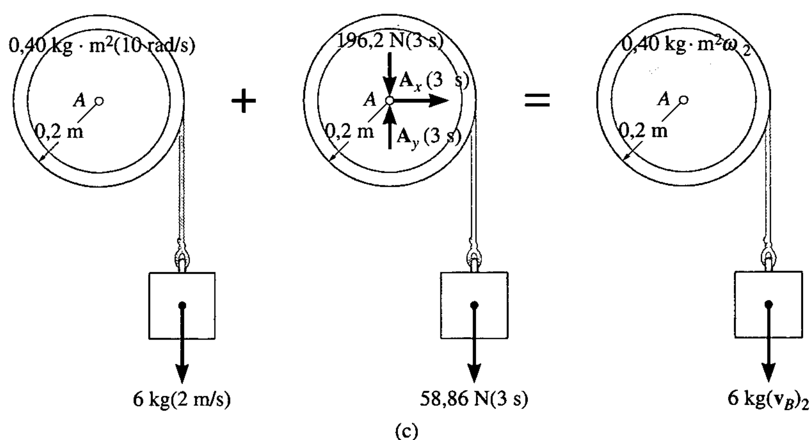
$$(v_B)_2 = 13{,}0\text{ m/s}\downarrow \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$



(b)

## SOLUÇÃO II

***Diagramas de Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Podemos obter $(v_B)_2$ diretamente considerando o sistema formado pelo bloco, a corda e o disco. Os diagramas de impulso e quantidade de movimento/momento angular foram desenhados para facilitar a aplicação do princípio do impulso e momento angulares em relação ao ponto $A$ (Figura 19.7*c*).



(c)

**Figura 19.7**

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Observando que $\omega_1 = 10$ rad/s e $\omega_2 = 5(v_B)$, temos

$$(\circlearrowleft+)\quad \left(\sum \begin{matrix}\text{momento angular}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{A1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso angular}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{A(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{momento angular}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{A2}$$

$$6\text{ kg}(2\text{ m/s})(0{,}2\text{ m}) + 0{,}4\text{ kg}\cdot\text{m}^2(10\text{ rad/s}) + 58{,}86\text{ N}(3\text{ s})(0{,}2\text{ m})$$

$$= 6\text{ kg}(v_B)_2(0{,}2\text{ m}) + 0{,}40\text{ kg}\cdot\text{m}^2[5(v_B)_2(0{,}2\text{ m})]$$

$$(v_B)_2 = 13{,}0\text{ m/s}\downarrow$$

## EXEMPLO 19.5

O teste de impacto de Charpy é utilizado nas avaliações das características de absorção de energia de um material durante um impacto. O teste é realizado usando-se o pêndulo mostrado na Figura 19.8*a*, que tem massa $m$, centro de massa em $G$ e raio de giração $k_G$ em relação a $G$. Determine a distância $r_P$ do ponto $P$ ao pino $A$. A colisão com o corpo de prova $S$ deve ocorrer no ponto $P$ e deve ocorrer de tal forma que a força horizontal no pino $A$ seja essencialmente nula. Suponha que o corpo de prova absorva toda a energia cinética que o pêndulo adquire durante a sua queda, de modo que este último pára na posição $\theta = 0°$.

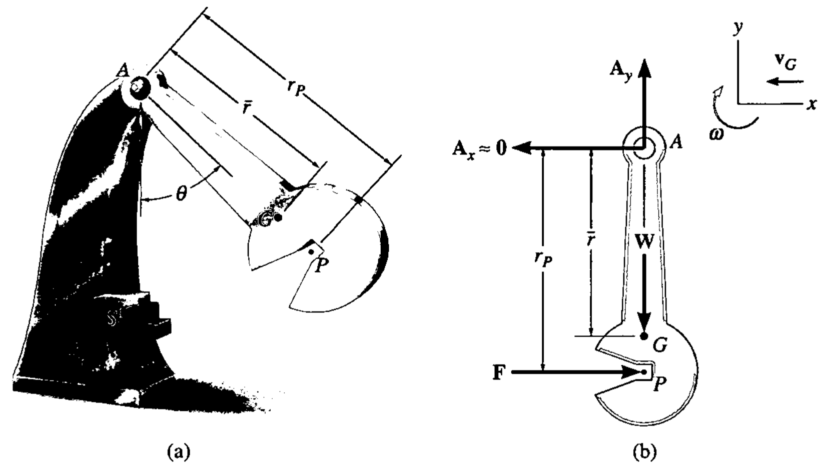



**Figura 19.8**

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Como mostrado no diagrama de corpo livre (Figura 18.8*b*), as condições do problema exigem que o impulso horizontal em $A$ seja zero. Imediatamente antes da colisão, o pêndulo tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_1$ correspondente a um movimento no sentido horário, e o centro de massa está se movendo para a esquerda com velocidade $(v_G)_1 = \bar{r}\omega_1$.

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Aplicaremos o princípio do impulso e momento angulares em relação ao ponto $A$.

$$(\curvearrowright +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma M_A\, dt = I_A\omega_2$$

$$I_A\omega_1 - \left(\int F\, dt\right) r_P = 0$$

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_G)_1 + \Sigma F\, dt = m(v_G)_2$$

$$-m(\bar{r}\omega_1) + \int F\, dt = 0$$

Eliminando o impulso $\int F\, dt$ e substituindo $I_A = mk_G^2 + m\bar{r}^2$, temos

$$[mk_G^2 + m\bar{r}^2]\omega_1 - m(\bar{r}\omega_1)r_P = 0$$

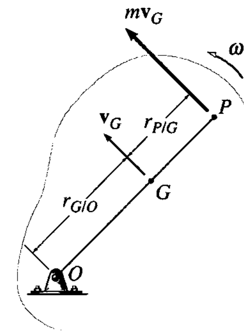
Fatorando $m\omega_1$ e resolvendo para $r_P$, obtemos

$$r_P = \bar{r} + \frac{k_G^2}{\bar{r}} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

O ponto $P$, definido como o ponto onde ocorre a colisão com o corpo de prova de forma que a força horizontal no pino $A$ é essencialmente nula, é denominado *centro de percussão*. Localizando-se o ponto de impacto em $P$, a força desenvolvida no pino é, portanto, minimizada. Muitas raquetes de esporte, tacos etc. são desenvolvidos de modo que a colisão com o objeto a ser rebatido ocorre no centro de percussão. Conseqüentemente, nenhum 'golpe' ou leve desconforto é sentido pelo jogador. (Veja também os problemas 17.65 e 19.1.)

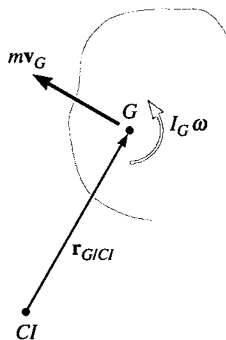
## PROBLEMAS

**19.1.** O corpo rígido (placa) tem massa $m$ e gira com velocidade angular $\omega$ em torno de um eixo que é perpendicular ao plano do movimento e passa pelo ponto fixo $O$. Mostre que o momento angular do corpo, em relação ao eixo de rotação, é equivalente ao momento angular, em relação ao mesmo eixo, de um ponto material de massa $m$ e velocidade $\mathbf{v}_G$, localizado num ponto $P$ (denominado *centro de percussão*) a uma distância $r_{P/G} = k_G^2/r_{G/O}$ do centro de massa $G$, onde $k_G$ é o raio de giração do corpo, em relação a um eixo perpendicular ao plano do movimento e passando por $G$.



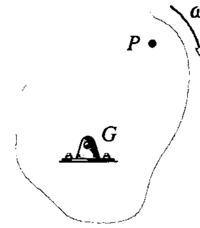

Problema 19.1

**19.2.** Num dado instante, o corpo tem quantidade de movimento $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$ e momento angular $\mathbf{H}_G = I_G\boldsymbol{\omega}$ em relação ao seu centro de massa. Mostre que o momento angular do corpo em relação ao centro instantâneo de velocidade nula $CI$ pode ser expresso como $\mathbf{H}_{CI} = I_{CI}\boldsymbol{\omega}$, onde $I_{CI}$ representa o momento de inércia em relação ao eixo instantâneo de velocidade nula. Como mostra a figura, o $CI$ localiza-se a uma distância $r_{G/CI}$ do centro de massa $G$.



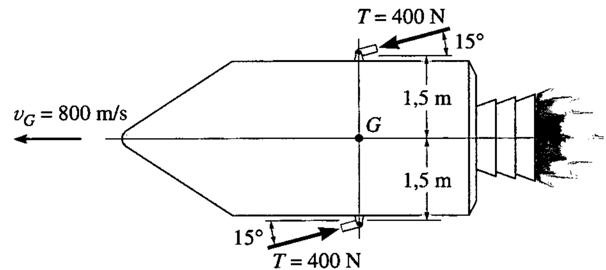

Problema 19.2

**19.3.** Mostre que, se uma placa gira em torno de um eixo que é perpendicular ao seu plano e passa pelo seu centro de massa $G$, o momento angular é o mesmo quando calculado em relação a qualquer outro ponto $P$ dessa placa.




Problema 19.3

***19.4.** A cápsula espacial tem massa de 1.200 kg e momento de inércia $I_G = 900$ kg · m$^2$ em relação a um eixo que passa por $G$ e é perpendicular à página. Se ela se desloca para a frente com velocidade $v_G = 800$ m/s e executa uma volta graças à ação de dois jatos, que fornecem um empuxo constante de 400 N, durante 0,3 s, determine a velocidade angular da cápsula depois de interrompida a ação dos jatos.




Problema 19.4

**19.5.** Resolva o Problema 17.55 usando o princípio do impulso e momento angulares.

**19.6.** Resolva o Problema 17.54 usando o princípio do impulso e momento angulares.

**19.7.** Resolva o Problema 17.69 usando o princípio do impulso e momento angulares.

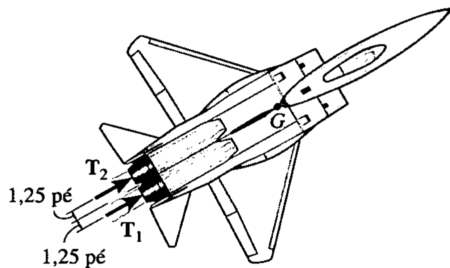
***19.8.** Resolva o Problema 17.80 usando o princípio do impulso e momento angulares.

**19.9.** Resolva o Problema 17.73 usando o princípio do impulso e momento angulares.

**19.10.** Um volante tem massa de 60 kg e raio de giração $k_G$ = 150 mm em relação a um eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa. Se o motor fornece um torque no sentido horário de intensidade $M = (5t)$ N · m, onde $t$ é dado em segundos, determine a velocidade angular do volante no instante $t = 3$ s. Inicialmente o volante está girando com velocidade angular $\omega_1 = 2$ rad/s, no sentido horário..

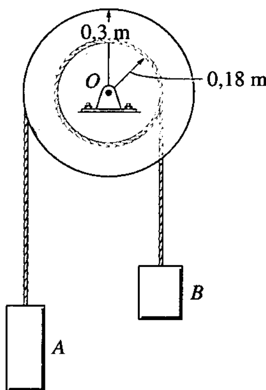
**19.11.** O piloto de um caça F-15 foi capaz de controlar o seu vôo regulando os empuxos dos dois motores. Se o jato pesa 17.000 lb e tem raio de giração $k_G = 4{,}7$ pés em relação ao centro de massa $G$, determine a velocidade de seu centro de massa em $t = 5$ s, considerando que o empuxo em cada motor se modificou para $T_1 = 5.000$ lb e $T_2 = 800$ lb, como mostra a figura. Inicialmente o caça voava em linha reta a

1.200 pés/s. Despreze os efeitos do arrasto e da perda de combustível.



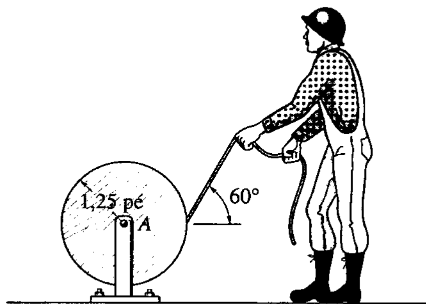

**Problema 19.11**

***19.12.** A bobina tem massa de 30 kg e raio de giração $k_G$ = 0,25 m. O bloco *A* tem massa de 25 kg e o bloco *B*, de 10 kg. Se eles são soltos a partir do repouso, determine o tempo necessário para o bloco *A* atingir uma velocidade de 2 m/s. Despreze a massa das cordas.



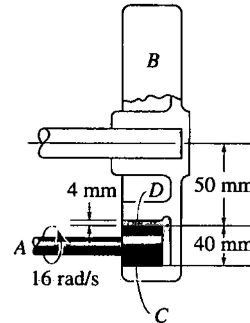

**Problema 19.12**

**19.13.** O homem puxa a corda com uma força de 8 lb, na direção mostrada na figura. Se a bobina tem peso de 250 lb e raio de giração $k_G$ = 0,8 pé em relação ao seu eixo em *A*, determine a velocidade angular da bobina 3 s após ter partido do repouso. Despreze o atrito e o peso da corda removida.



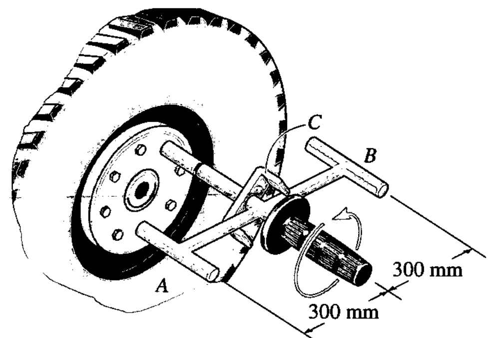

**Problema 19.13**

**19.14.** Transmite-se movimento de rotação de uma roda motriz *A* à roda *B* por meio de atrito entre elas no ponto *C*. Se *A* sempre gira a uma taxa constante de 16 rad/s e o coeficiente de atrito cinético entre as rodas é $\mu_c$ = 0,2, determine o tempo necessário para *B* atingir uma velocidade angular constante a partir do momento em que as rodas entram em contato. Suponha que a força normal de contato tem intensidade de 50 N. Qual será a velocidade angular final da roda *B*? A roda *B* tem massa de 90 kg e raio de giração em torno do seu eixo de rotação $k_G$ = 120 mm.



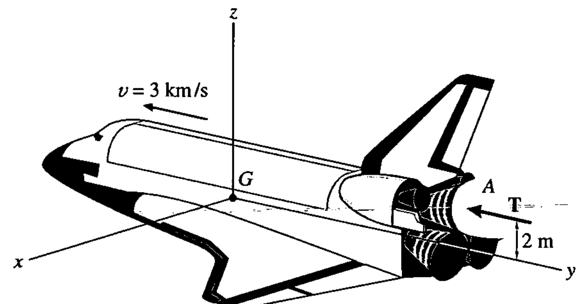

**Problema 19.14**

**19.15.** A chave de impacto consiste em uma barra delgada *AB* de 1 kg e comprimento de 580 mm e as extremidades cilíndricas *A* e *B*, cada uma com diâmetro de 20 mm e massa de 1 kg. Esse conjunto pode girar em torno do cabo e do soquete que estão conectados ao parafuso de fixação da roda do carro. Comunica-se à barra *AB* uma velocidade de 4 rad/s e ela atinge a peça *C* sem rebater. Determine o impulso angular comunicado ao parafuso.



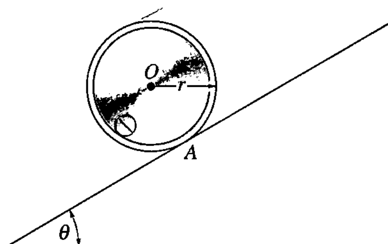

**Problema 19.15**

***19.16.** O ônibus espacial está viajando no 'espaço profundo', onde os efeitos gravitacionais são desprezíveis. A nave tem massa de 12 t, centro de massa *G* e raio de giração $(k_G)_x$ = 14 m em relação ao eixo *x*. O ônibus espacial está se deslocando para a frente com velocidade $v$ = 3 km/s quando o piloto liga o motor em *A*, criando um empuxo $T = 600(1 - e^{-0,3t})$ kN, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade angular da nave 2 s mais tarde.



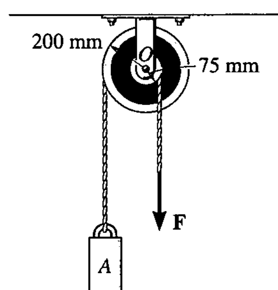

**Problema 19.16**

**19.17.** O tambor tem massa de 70 kg, raio de 300 mm e raio de giração $k_O$ = 125 mm. Se os coeficientes de atrito estático e cinético em $A$ são $\mu_e$ = 0,4 e $\mu_c$ = 0,3, respectivamente, determine a velocidade angular do tambor 2 s após ele ter sido abandonado a partir do repouso. Considere $\theta$ = 30°.



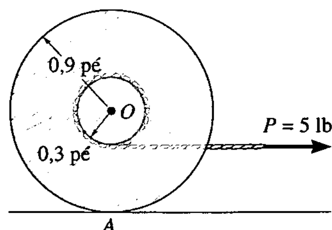

**Problema 19.17**

**19.18.** A polia dupla é formada por duas rodas presas uma à outra de forma a girarem com a mesma velocidade angular. A polia tem massa de 15 kg e raio de giração $k_O$ = 110 mm. Se o bloco $A$ tem massa de 40 kg, determine a sua velocidade 3 s após o início da aplicação de uma força constante $F$ = 2 kN à extremidade livre da corda enrolada na roda menor. O bloco está inicialmente em repouso.



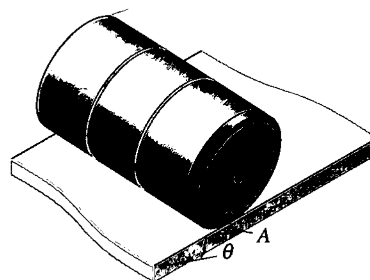

**Problema 19.18**

**19.19.** A bobina tem peso de 30 lb e raio de giração $k_O$ = 0,45 pé. Uma corda está enrolada no tambor interno e sua extremidade livre está submetida a uma força horizontal $P$ = 5 lb. Determine a velocidade angular da bobina 4 s após sua partida do repouso. Suponha que a bobina role sem escorregar.



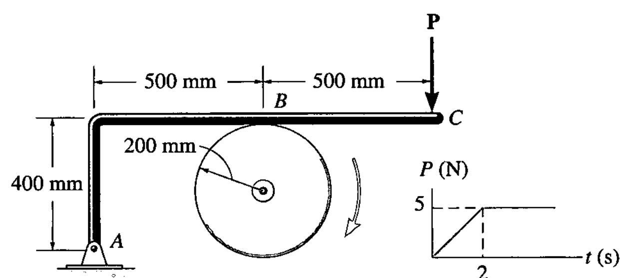

**Problema 19.19**

***19.20.** O tambor de massa $m$, raio $r$ e raio de giração $k_O$ rola por um plano inclinado para o qual o coeficiente de atrito estático é $\mu_e$. Se o tambor é abandonado a partir do repouso, determine o valor máximo do ângulo de inclinação $\theta$ para que o tambor role sem escorregar.



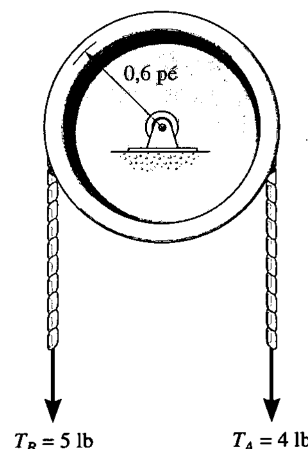

**Problema 19.20**

**19.21.** O disco de 12 kg tem velocidade angular de 20 rad/s. Se o freio $ABC$ é aplicado de tal forma que a intensidade da força **P** varia com o tempo como se mostra na figura, determine o tempo necessário para o disco parar. O coeficiente de atrito cinético em $B$ é $\mu_c$ = 0,4.



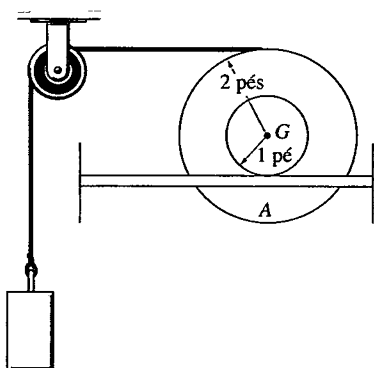

**Problema 19.21**

**19.22.** A polia tem peso de 8 lb e pode ser considerada como um disco fino. As extremidades de uma corda que passa pela periferia da polia estão submetidas às forças $T_A$ = 4 lb e $T_B$ = 5 lb. Determine a velocidade angular da polia quando $t$ = 4 s se ela parte do repouso em $t$ = 0. Despreze a massa da corda.



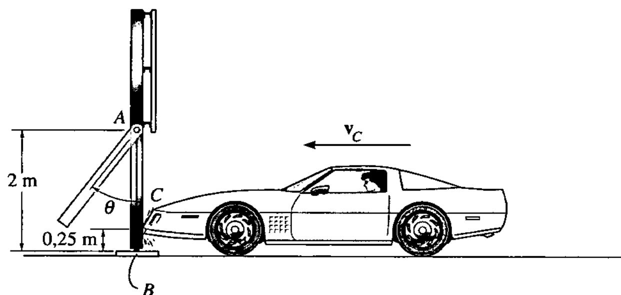

**Problema 19.22**

**19.23.** O cilindro interno da bobina apóia-se num trilho horizontal. Se ele não escorrega em $A$, determine a velocidade do bloco de 10 lb 2 s após ele ter sido solto a partir do repouso. A bobina tem peso de 30 lb e raio de giração $k_G$ = 1,30 pé. Despreze a massa da polia e da corda.



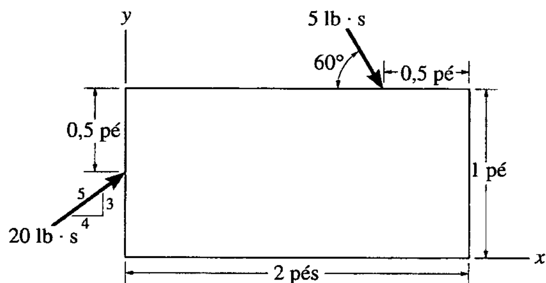

Problema 19.23

*19.24. Por razões de segurança, o poste (com 20 kg) de uma placa de sinalização foi desenvolvido para se partir com resistência desprezível em $B$ quando for submetido a um impacto de um carro. Suponha que o poste seja ligado por um pino em $A$ e seja considerado uma barra delgada. Determine o impulso comunicado pelo pára-choque do carro se após a colisão o poste aparenta girar a um ângulo máximo $\theta_{máx} = 150°$.



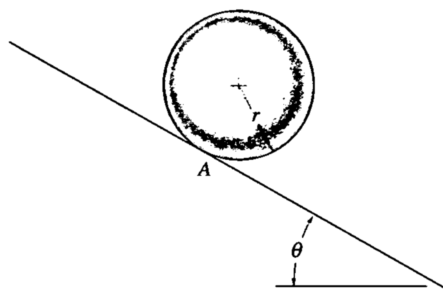

Problema 19.24

19.25. A placa retangular de 10 lb está em repouso sobre uma superfície horizontal lisa. Se ela recebe os impulsos horizontais mostrados na figura, determine sua velocidade angular e a velocidade de seu centro de massa.



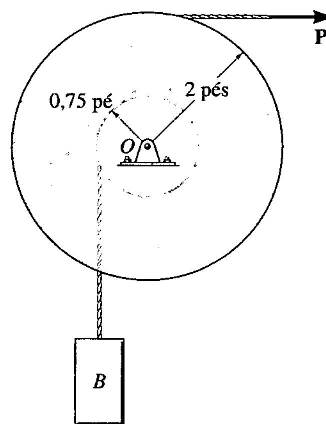

Problema 19.25

19.26. A bola de massa $m$ e raio $r$ rola por um plano inclinado para o qual o coeficiente de atrito estático é $\mu$. Se a bola é solta a partir do repouso, determine o ângulo $\theta$ de inclinação máximo do plano para que a bola role sem escorregar em $A$.



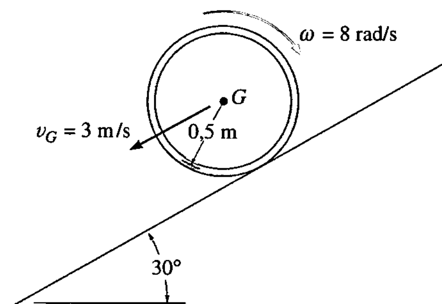

Problema 19.26

19.27. A bobina tem peso de 75 lb e raio de giração $k_O$ = 1,20 pé. Se o bloco $B$ pesa 60 lb e uma força $P$ = 25 lb é aplicada à corda, determine a velocidade do bloco 5 s após o início do movimento. Despreze a massa da corda.



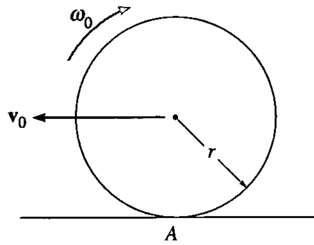

Problema 19.27

*19.28. O aro fino tem massa de 5 kg e é posto sobre um plano inclinado girando com velocidade angular $\omega$ = 8 rad/s, no sentido indicado na figura. Seu centro tem, nessa situação, velocidade $v_G$ = 3 m/s. Se o coeficiente de atrito cinético entre o aro e o plano é $\mu_c$ = 0,6, determine a distância percorrida pelo aro antes de ele parar de escorregar.



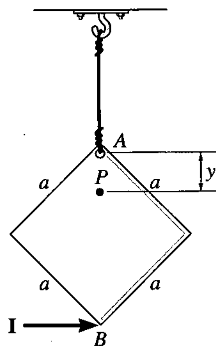

Problema 19.28

19.29. Se a bola de peso $W$ e raio $r$ é atirada com velocidade $\mathbf{v}_0$ sobre uma superfície áspera, determine a velocidade de contra-rotação, $\omega_0$, que deve ser comunicada à bola para que ela pare de girar no mesmo instante em que sua velocidade de avanço se torna zero. Não é necessário saber o valor do coeficiente de atrito em $A$.




Problema 19.29

**19.30.** A placa quadrada tem massa $m$ e está suspensa em seu vértice $A$ por uma corda. Se ela recebe um impulso horizontal **I** no vértice $B$, determine a posição $y$ do ponto $P$ em torno do qual a placa parece girar durante o impacto.

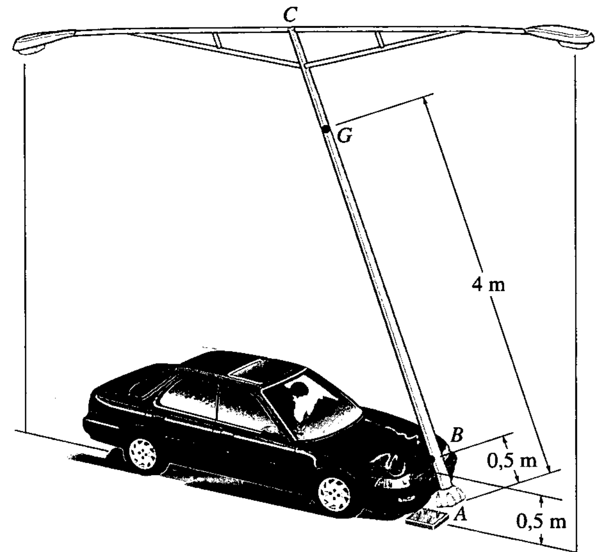



Problema 19.30

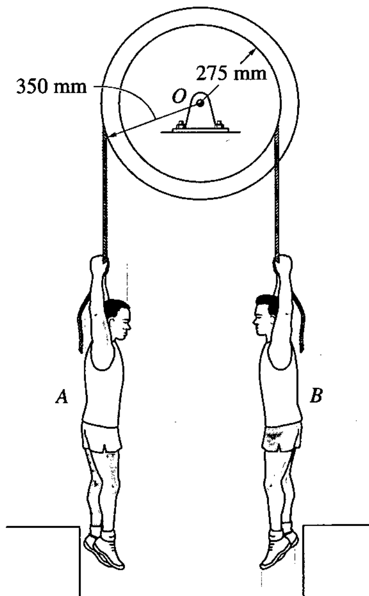
**19.31.** O carro colide com o poste de iluminação, que foi desenvolvido para se partir na sua base com resistência desprezível. Por um vídeo da colisão, observa-se que o poste ganhou velocidade angular de 60 rad/s quando $AC$ estava na vertical. O poste tem massa de 175 kg, centro de massa $G$ e raio de giração $k_G$ = 2,25 m em torno de um eixo que é perpendicular ao plano da estrutura e passa por $G$. Determine o impulso horizontal que o carro aplicou no poste enquanto $AC$ estava essencialmente na vertical.

***19.32.** A polia dupla consiste em duas rodas ligadas de forma a girarem juntas. A polia tem massa de 30 kg e raio de giração $k_O$ = 250 mm. Se os homens $A$ e $B$ se penduram nas cordas ao mesmo tempo, determine suas velocidades 4 s após a partida do repouso. Os homens têm massa de 60 kg e 70 kg, respectivamente. Suponha que durante o movimento eles não se movam relativamente às respectivas cordas. Despreze a massa das cordas.

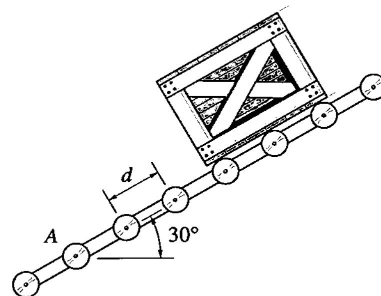
**19.33.** O engradado tem massa $m_c$. Determine a velocidade constante $v_0$ que ele adquire à medida que desce pelo transportador. Os roletes têm cada um raio $r$ e massa $m$ e estão a uma distância $d$ um do outro. Observe que o atrito impõe a cada rolete um movimento de rotação quando o engradado entra em contato com ele.




Problema 19.31




Problema 19.32




Problema 19.33

## 19.3 Conservação da Quantidade de Movimento e do Momento Angular

***Conservação da Quantidade de Movimento.*** Se a soma de todos os impulsos que agem em um sistema de corpos rígidos ligados é zero, a quantidade de movimento do sistema é constante ou se conserva. Conseqüentemente, as primeiras duas das equações 19.15 se reduzem à forma

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{quantidade de movimento}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_1 = \left(\sum \begin{matrix}\text{quantidade de movimento}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_2 \qquad (19.16)$$

Essa equação expressa a *conservação da quantidade de movimento.*

Sem introduzir erros apreciáveis nos cálculos, é possível aplicar a Equação 19.16 em uma dada direção para a qual os impulsos são pequenos ou *não-impulsivos*. Especificamente, forças não impulsivas ocorrem quando pequenas forças agem durante breves intervalos de tempo. Entre os exemplos típicos estão a força de uma mola ligeiramente deformada, o contato inicial com um solo macio e em alguns casos o peso do corpo.

*Conservação do Momento Angular.* O momento angular de um sistema de corpos rígidos ligados conserva-se em relação ao centro de massa $G$ do sistema ou em relação a um ponto fixo $O$, quando a soma de todos os impulsos angulares criados pelas forças externas que agem no sistema é zero ou apreciavelmente pequena (não impulsiva), em relação a esses pontos. A terceira das equações 19.15 torna-se, então,

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{momento angular}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{O1} = \left(\sum \begin{matrix}\text{momento angular}\\ \text{do sistema}\end{matrix}\right)_{O2} \qquad (19.17)$$

A equação anterior expressa a *conservação do momento angular.* No caso de um único corpo rígido, a Equação 19.17 aplicada ao ponto $G$ se torna $(I_G\omega)_1 = (I_G\omega)_2$. Para ilustrar uma aplicação da equação anterior, consideremos um nadador que executa uma cambalhota após saltar de um trampolim. Encolhendo seus braços e pernas junto ao peito, ele *diminui* o momento de inércia de seu corpo e assim *aumenta* a sua velocidade angular ($I_G\omega$ deve ser constante). Se ele estica seus membros imediatamente antes de penetrar na água, o momento de inércia de seu corpo *aumenta* e sua velocidade angular *decresce.* Como o peso de seu corpo cria um impulso durante o intervalo de tempo em que ocorre o movimento, esse exemplo também ilustra como o momento angular de um corpo pode se conservar enquanto a quantidade de movimento *não* se conserva. Esses casos ocorrem toda vez que as forças externas que criam impulso têm suas retas de ação passando pelo centro de massa do corpo ou pelo eixo de rotação fixo.

Se a velocidade ou a velocidade angular de um corpo for conhecida, a conservação da quantidade de movimento ou do momento angular poderá ser usada para determinar a respectiva velocidade final do corpo. Além disso, ao se aplicarem essas equações a um *sistema* de corpos rígidos, os impulsos internos que agem no sistema, que em geral são desconhecidos, são eliminados da análise, pois eles aparecem em pares de impulsos opostos e colineares. Se for necessário determinar uma *força interna impulsiva* que age apenas em um corpo de um sistema de corpos ligados, o corpo deverá ser *isolado* (diagrama de corpo livre) e o princípio do impulso e quantidade de movimento/momento angular deverá ser aplicado *ao corpo.* Após o cálculo do impulso $\int F\,dt$, podemos determinar a *força impulsiva média* $F_{méd}$ se conhecemos o intervalo de tempo $\Delta t$ de ação da força impulsiva: $F_{méd} = (\int F\,dt)/\Delta t$.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A conservação da quantidade de movimento ou do momento angular pode ser aplicada usando-se o seguinte procedimento.

### *Diagrama de Corpo Livre*

- Estabeleça um sistema de referência inercial $x, y$ e construa o diagrama de corpo livre para o corpo ou sistema de corpos durante o intervalo de tempo em que ocorre a colisão. A partir desse diagrama classifique cada uma das forças aplicadas em 'impulsivas' e 'não impulsivas'.
- Por inspeção do diagrama de corpo livre, a *conservação da quantidade de movimento* se aplica numa dada direção quando *não* agem forças externas impulsivas nessa direção; a *conservação do momento angular*, por outro lado, se aplica em relação a um ponto fixo $O$ ou em relação ao centro de massa $G$ do corpo ou sistema de corpos, quando todas as forças externas impulsivas criam impulso angular nulo em relação a $O$ ou $G$.
- Como alternativa, construa diagramas de impulso e quantidade de movimento/momento angular para o corpo ou sistema de corpos. Esses diagramas são particularmente úteis para se visualizarem os termos de 'momento' usados na equação da conservação do momento angular, quando se decidiu que os momentos angulares devem ser calculados em relação a um ponto diferente do centro de massa $G$ do corpo.

### *Conservação da Quantidade de Movimento/Momento Angular*

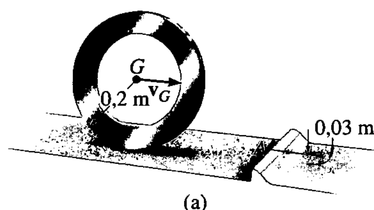
- Aplique a conservação da quantidade de movimento ou do momento angular nas direções apropriadas.

### *Cinemática*

- Se o movimento parece ser complicado, diagramas cinemáticos (velocidade) podem ser úteis na obtenção das equações cinemáticas necessárias.

## EXEMPLO 19.6

A roda de 10 kg mostrada na Figura 19.9*a* tem momento de inércia $I_G$ = 0,156 kg·m$^2$. Suponha que a roda não escorregue nem retorne e determine a velocidade mínima $\mathbf{v}_G$ que ela deve ter para rolar sobre o obstáculo em $A$.



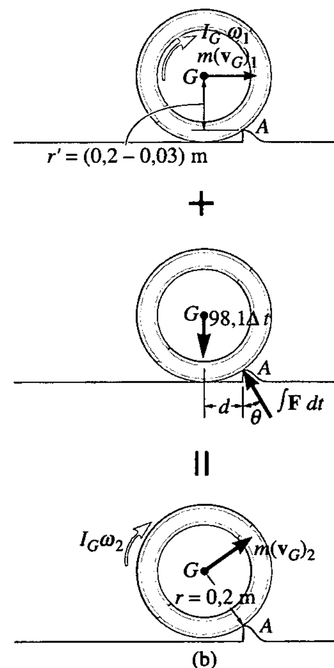




**Figura 19.9**

## SOLUÇÃO

***Diagramas de Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Como não ocorre escorregamento ou retorno, a roda essencialmente gira em torno de $A$ durante o contato. Essa condição é mostrada na Figura 19.9*b*, que indica, respectivamente, a quantidade de movimento/momento angular da roda *imediatamente antes do impacto*, os impulsos dados *durante o impacto* e a quantidade de movimento/momento angular da roda *imediatamente após o impacto*. Somente dois impulsos (forças) agem sobre a roda. Por comparação, a força em $A$ é muito maior do que o peso, e como o tempo de impacto é muito pequeno, o peso pode ser considerado não impulsivo. A força impulsiva $\mathbf{F}$ em $A$ tem intensidade e direção $\theta$ desconhecidas. Para eliminar essa força, observemos que o momento angular em relação a $A$ é essencialmente conservado, pois $(98{,}1\Delta t)d \approx 0$.

***Conservação do Momento Angular.*** Com referência à Figura 19.9*b*,

$$(\circlearrowleft+) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$r'm(v_G)_1 + I_G\omega_1 = rm(v_G)_2 + I_G\omega_2$$

$$(0{,}2\text{ m} - 0{,}03\text{ m})(10\text{ kg})(v_G)_1 + (0{,}156\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(\omega_1) =$$
$$(0{,}2\text{ m})(10\text{ kg})(v_G)_2 + (0{,}156\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(\omega_2)$$

***Cinemática.*** Como não ocorre escorregamento, em geral $\omega = v_G/r = v_G/0.2\text{ m} = 5v_G$. Substituindo esse resultado na equação anterior e simplificando, temos

$$(v_G)_2 = 0{,}892(v_G)_1 \qquad (1)$$

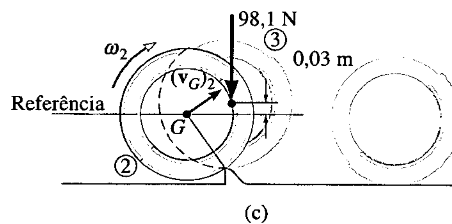
***Conservação da Energia.***[3] Para que haja rolamento sobre o obstáculo, a roda deve passar pela posição 3 mostrada na Figura 19.9*c*. Logo, se $(v_G)_2$ [ou $(v_G)_1$] deve ter um valor mínimo, é necessário que a energia cinética da roda na posição 2 seja igual à energia potencial na posição 3. Tomando a linha de referência pelo centro de massa *G*, como mostra a figura, e aplicando a equação da conservação de energia, temos

$$\{T_2\} + \{V_2\} = \{T_3\} + \{V_3\}$$

$$\{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}(0{,}156\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2^2\} + \{0\} = \{0\} + \{(98{,}1\text{ N})(0{,}03\text{ m})\}$$

Substituindo $\omega_2 = 5(v_G)_2$ e a Equação 1 na equação anterior e resolvendo, obtemos

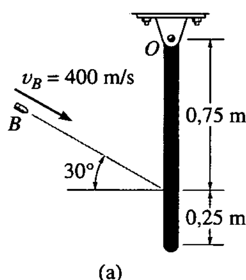
$$(v_G)_1 = 0{,}729\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resposta}$$




(c)

**Figura 19.9**

## EXEMPLO 19.7




(a)

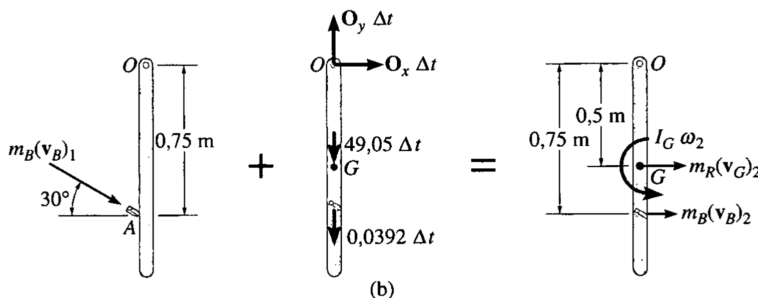
**Figura 19.10**

A barra delgada de 5 kg mostrada na Figura 19.10*a* está presa por um pino em *O* e está inicialmente em repouso. Se uma bala de 4 g é disparada contra a barra com velocidade de 400 m/s, como mostrado na figura, determine a velocidade angular da barra imediatamente após a bala ficar encravada nela.

[3] Esse princípio não se aplica durante o impacto, pois se perde energia durante a colisão; todavia, imediatamente após o impacto (posição 2), ele pode ser utilizado.

## SOLUÇÃO

***Diagramas de Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** O impulso que a bala exerce na barra pode ser eliminado da análise, e a velocidade angular da barra imediatamente após a colisão pode ser determinada considerando-se a bala e a barra um único corpo. Para esclarecer os princípios envolvidos, mostramos na Figura 19.10*b* os diagramas de impulso e quantidade de movimento/momento angular. Os diagramas são mostrados *imediatamente antes* e *imediatamente depois* da colisão. Durante a colisão, a bala e a barra trocam *impulsos internos opostos* (mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos) em $A$. Como mostrado no diagrama do impulso, os impulsos que são externos ao sistema devem-se às reações em $O$ e aos pesos da bala e da barra. Como o tempo de impacto, $\Delta t$, é muito curto, a barra sofre um ligeiro deslocamento, e, portanto, os 'momentos' dos impulsos dos pesos em relação a $O$ são praticamente nulos. Logo, o momento angular se conserva em relação a esse ponto.



(b)

***Conservação do Momento Angular.*** Da Figura 19.10*b*, temos

$$(\circlearrowright+) \qquad \Sigma(H_O)_1 = \Sigma(H_O)_2$$

$$m_B(v_B)_1 \cos 30°(0,75\text{ m}) = m_B(v_B)_2(0,75\text{ m}) + m_R(v_G)_2(0,5\text{ m}) + I_G\omega_2$$

$$(0,004\text{ kg})(400 \cos 30°\text{m/s})(0,75\text{ m}) =$$

$$(0,004\text{ kg})(v_B)_2(0,75\text{ m}) + (5\text{ kg})(v_G)_2(0,5\text{ m}) + [\tfrac{1}{12}(5\text{ kg})(1\text{ m})^2]\omega_2$$

ou

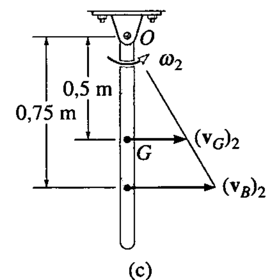
$$1,039 = 0,003(v_B)_2 + 2,50(v_G)_2 + 0,417\omega_2 \qquad (1)$$

***Cinemática.*** Como a barra está ligada por um pino em $O$, temos da Figura 19.10*c*

$$(v_G)_2 = (0,5\text{ m})\omega_2 \qquad (v_B)_2 = (0,75\text{ m})\omega_2$$

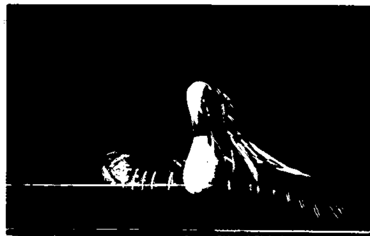
Substituindo esses resultados na Equação 1 e resolvendo obtemos

$$\omega_2 = 0,623\text{ rad/s}\circlearrowright \qquad \textit{Resposta}$$



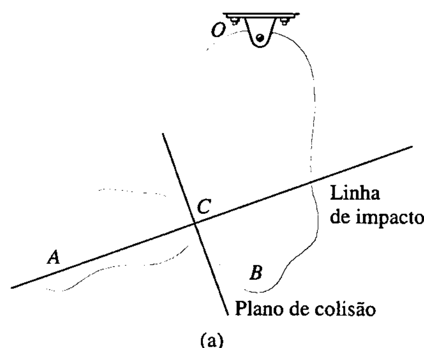
(c)

**Figura 19.10**

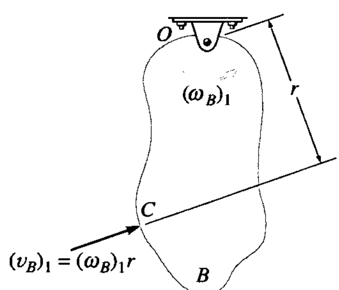


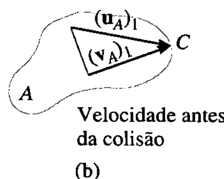
*Exemplo de colisão excêntrica ocorrendo entre uma bola e um pino de boliche.*

## 19.4 COLISÃO EXCÊNTRICA

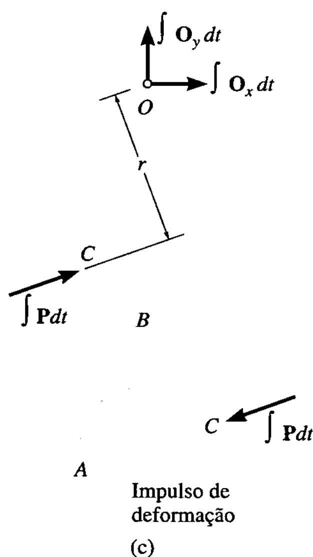


(a)



(b)



(c)

**Figura 19.11**

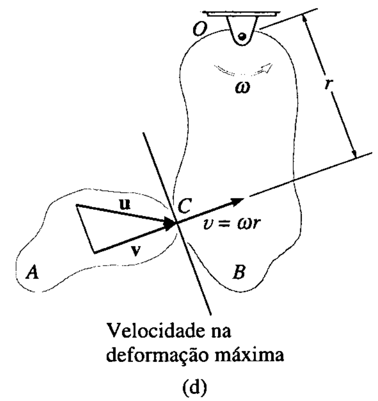
Os conceitos que envolvem colisão central e oblíqua entre pontos materiais foram apresentados na Seção 15.4. Agora discutiremos a colisão entre dois corpos. Ocorre *colisão excêntrica* quando a linha que liga o centro de massa dos dois corpos *não coincide* com a linha de colisão.[4] Esse tipo de colisão ocorre freqüentemente quando um ou ambos os corpos são obrigados a girar em torno de um eixo fixo. Consideremos, por exemplo, a colisão em $C$ entre os corpos $A$ e $B$ mostrados na Figura 19.11*a*. Supõe-se que imediatamente antes da colisão $B$ está girando no sentido anti-horário com velocidade angular $(\boldsymbol{\omega}_B)_1$, e a velocidade do ponto de contato $C$ localizado em $A$ é $(\mathbf{u}_A)_1$. A Figura 19.11*b* mostra os diagramas cinemáticos para ambos os corpos imediatamente antes da colisão. Sendo lisos os corpos em colisão, as *forças impulsivas* que eles exercem mutuamente estão orientadas *ao longo da linha de colisão*. Logo, o componente da velocidade do ponto $C$ no corpo $B$, orientado ao longo da linha de colisão, é $(v_B)_1 = (\omega_B)_1 r$ (Figura 19.11*b*). Analogamente, no corpo $A$, o componente da velocidade $(\mathbf{u}_A)_1$ ao longo da linha de colisão é $(\mathbf{v}_A)_1$. Para que a colisão ocorra, $(v_A)_1 > (v_B)_1$.

Durante a colisão forças impulsivas opostas **P** são aplicadas nos corpos que se *deformam* no ponto de contato. Os impulsos resultantes são mostrados nos diagramas de impulso para ambos os corpos (Figura 19.11*c*). Observemos que a força impulsiva criada no ponto $C$ do corpo em rotação cria reações impulsivas no pino $O$. Nesses diagramas supõe-se que o impacto cria forças que são muito maiores do que os pesos (não impulsivos) dos corpos, que não estão mostrados. Quando a deformação em $C$ é máxima, $C$ em ambos os corpos move-se com uma velocidade comum **v** ao longo da linha de colisão (Figura 19.11*d*). Ocorre, então, um tempo de *restituição* durante o qual os corpos tendem a recuperar suas formas originais. A fase de restituição cria forças impulsivas opostas **R** que agem nos corpos, como se mostra no diagrama de impulso (Figura 19.11*e*). Após a restituição os corpos se separam de forma que o ponto $C$ em $B$ tem velocidade $(\mathbf{v}_B)_2$ e o ponto $C$ em $A$ tem velocidade $(\mathbf{u}_A)_2$ (Figura 19.11*f*), onde $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

Em geral, um problema que envolve a colisão de dois corpos exige a determinação de *duas incógnitas* $(v_A)_2$ e $(v_B)_2$, supondo-se conhecidas as velocidades $(v_A)_1$ e $(v_B)_1$ (ou que possam ser determinadas usando-se cinemática, métodos de energia, equações de movimento etc.). Para resolver esse problema, devemos escrever duas equações. A *primeira equação* envolve em geral a aplicação da *conservação do momento angular dos dois corpos*. No caso dos corpos $A$ e $B$, podemos afirmar que o momento angular se conserva em relação ao ponto $O$, pois os impulsos em $C$ são internos ao sistema e os impulsos em $O$

[4] Quando essas linhas coincidem, ocorre colisão central e o problema pode ser analisado como se discutiu na Seção 15.4.

criam momentos nulos (ou impulsos angulares nulos) em relação ao ponto $O$. Obtemos a *segunda equação* usando a definição do *coeficiente de restituição, e*, que é a razão entre o impulso de restituição e o de deformação. Para estabelecer uma forma útil dessa equação, primeiro devemos aplicar o princípio do impulso e momento angulares em relação ao ponto $O$ aos corpos $B$ e $A$ separadamente. Combinando os resultados, obtemos então a equação necessária. Procedendo-se dessa maneira, o princípio do impulso e momento angulares aplicado ao corpo $B$, do instante imediatamente antes da colisão ao instante de deformação máxima (figuras 19.11*b* a 19.11*d*), se torna

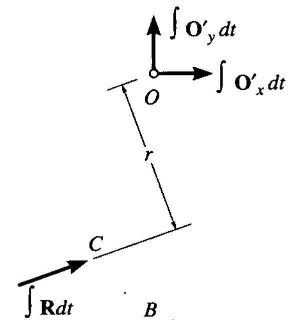


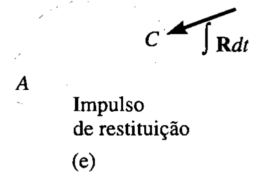

Velocidade na deformação máxima

(d)

$$(\circlearrowright +) \qquad I_O(\omega_B)_1 + r\int P\,dt = I_O\omega \qquad (19.18)$$

onde $I_O$ é o momento de inércia do corpo $B$ em relação ao ponto $O$. Da mesma maneira, aplicando o princípio do impulso e momento angulares, do instante de deformação máxima ao instante imediatamente após a colisão (figuras 19.11*d* a 19.11*f*), temos




Impulso de restituição

(e)

$$(\circlearrowright +) \qquad I_O\omega + r\int R\,dt = I_O(\omega_B)_2 \qquad (19.19)$$

Resolvendo as equações 19.18 e 19.19 para $\int P\,dt$ e $\int R\,dt$, respectivamente, e definindo $e$, obtemos

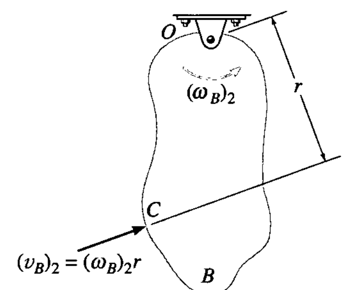
$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{r(\omega_B)_2 - r\omega}{r\omega - r(\omega_B)_1} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

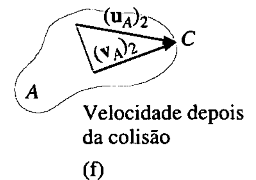
Da mesma maneira, podemos escrever uma equação que relaciona os módulos da velocidade $(v_A)_1$ e $(v_A)_2$ do corpo $A$. O resultado é

$$e = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

Eliminando das equações anteriores a velocidade comum $v$, obtemos o resultado desejado, isto é,

$$(+\nearrow) \qquad \boxed{e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}} \qquad (19.20)$$




Velocidade depois da colisão

(f)

**Figura 19.11**

Essa equação é idêntica à Equação 15.11, que foi deduzida para colisão central entre dois corpos. De acordo com a Equação 19.20, o coeficiente de restituição é igual à razão entre a velocidade relativa de *separação* dos pontos de contato ($C$) *imediatamente após a colisão* e a velocidade relativa com que os pontos *se aproximam* um do outro *imediatamente* antes da colisão.

Na dedução da equação, supusemos que os pontos de contato para ambos os corpos movem-se para cima e para a direita *tanto* antes *quanto* depois da colisão. Se o movimento de qualquer um dos pontos de contato ocorre para baixo e para a esquerda, a velocidade desse ponto é considerada, na Equação 19.20, como negativa.

Como afirmado anteriormente, quando usamos a Equação 19.20 com a conservação do momento angular para os corpos, obtemos um meio bastante útil para se obterem as velocidades dos dois corpos imediatamente após a colisão.





*As colunas de muitas placas de sinalização em estradas são desenvolvidas para que, durante uma colisão, seus suportes se partam e suas juntas desabem facilmente. Isso pode ser mostrado pelas conexões na sua base e quebras na seção média da coluna. A mecânica de colisão excêntrica é empregada no projeto dessas estruturas.*

## EXEMPLO 19.8

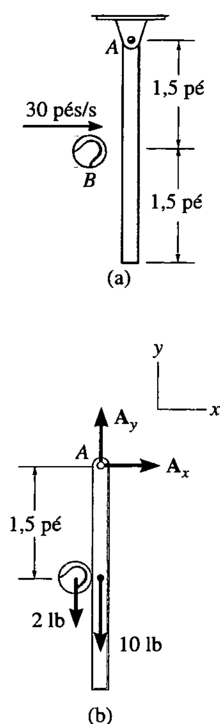



**Figura 19.12**

A barra delgada de 10 lb está suspensa por um pino em $A$ (Figura 19.12*a*). Se uma bola $B$ de 2 lb é arremessada contra a barra, atingindo-a em seu centro com velocidade horizontal de 30 pés/s, determine a velocidade angular da barra imediatamente após o impacto. O coeficiente de restituição é $e = 0{,}4$.

### SOLUÇÃO

***Conservação do Momento Angular.*** Consideremos a bola e a barra como um sistema (Figura 19.12*b*). O momento angular se conserva em relação ao ponto $A$, pois a força impulsiva entre a bola e a barra é *interna*. Além disso, os pesos da bola e da barra são não impulsivos. Observando as direções e sentidos das velocidades dos dois corpos imediatamente depois da colisão, como se mostra no diagrama cinemático (Figura 19.12*c*), pode-se escrever

$$(\circlearrowright+) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$m_B(v_B)_1(1{,}5\text{ pé}) = m_B(v_B)_2(1{,}5\text{ pé}) + m_R(v_G)_2(1{,}5\text{ pé}) + I_G\omega_2$$

$$\left(\frac{2\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(30\text{ pés/s})(1{,}5\text{ pé}) = \left(\frac{2\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(v_B)_2(1{,}5\text{ pé}) +$$

$$\left(\frac{10\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(v_G)_2(1{,}5\text{ pé}) + \left[\frac{1}{12}\left(\frac{10\text{ lb}}{32{,}2\text{ pés/s}^2}\right)(3\text{ pés})^2\right]\omega_2$$

Como $(v_G)_2 = 1{,}5\omega_2$, então

$$2{,}795 = 0{,}09317(v_B)_2 + 0{,}9317\omega_2 \qquad (1)$$

***Coeficiente de restituição.*** Com referência à Figura 19.12*c*, temos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_G)_2 - (v_B)_2}{(v_B)_1 - (v_G)_1} \qquad 0{,}4 = \frac{(1{,}5\text{ pé})\omega_2 - (v_B)_2}{30\text{ pés/s} - 0}$$

$$12{,}0 = 1{,}5\omega_2 - (v_B)_2$$

Resolvendo

$$(v_B)_2 = -6{,}52 \text{ pés/s} = 6{,}52 \text{ pés/s} \leftarrow$$

$$\omega_2 = 3{,}65 \text{ rad/s}\circlearrowleft \qquad \textit{Resposta}$$

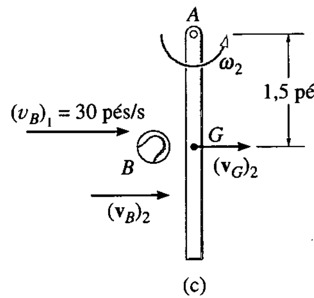
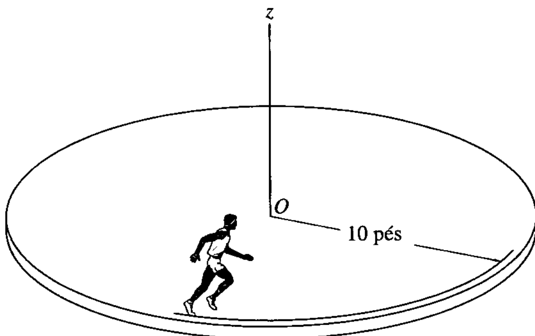



**Figura 19.12**

## PROBLEMAS

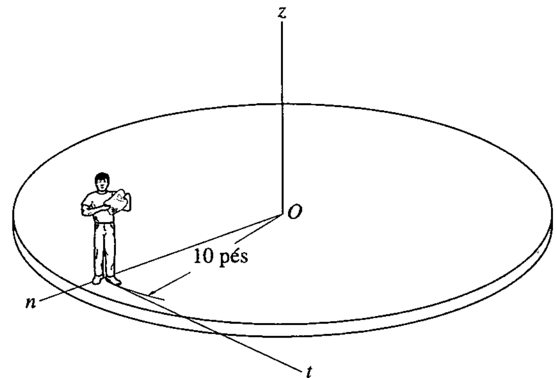
**19.34.** As rodas $A$ e $B$ têm massas $m_A$ e $m_B$ e raios de giração $k_A$ e $k_B$, em relação aos seus eixos verticais centrais, respectivamente. Se elas podem girar livremente no mesmo sentido com velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_A$ e $\boldsymbol{\omega}_B$ em torno do mesmo eixo vertical, determine sua velocidade angular comum depois de terem sido postas em contato e o escorregamento entre elas ter finalizado.

**19.35.** Uma plataforma circular horizontal tem peso de 300 lb e raio de giração $k_z$ = 8 pés em relação ao eixo $z$ passando pelo seu centro $O$. A plataforma pode girar livremente em torno do eixo $z$ e está inicialmente em repouso. Um homem com peso de 150 lb começa a correr ao longo da borda numa trajetória circular de 10 pés de raio. Se ele tem velocidade de 4 pés/s e mantém essa velocidade relativamente à plataforma, determine a velocidade angular dessa plataforma. Despreze os atritos.



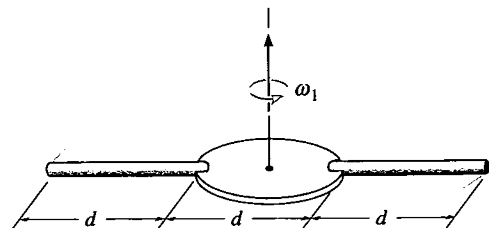

**Problema 19.35**

***19.36.** Uma plataforma circular horizontal tem peso de 300 lb e raio de giração $k_z$ = 8 pés em relação ao eixo $z$ passando pelo seu centro $O$. A plataforma pode girar livremente em torno do eixo $z$ e está inicialmente em repouso. Um homem com peso de 150 lb atira um bloco de 15 lb para fora da plataforma, com uma velocidade horizontal de 5 pés/s, *medida relativamente à plataforma.* Determine a velocidade angular da plataforma se o bloco é atirado (a) tangencialmente à plataforma, ao longo do eixo $+t$ e (b) ao longo da linha radial ou eixo $+n$. Despreze o tamanho do homem.



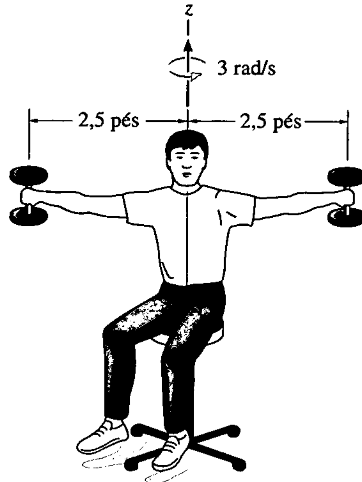

**Problema 19.36**

**19.37.** Cada uma das duas barras delgadas e o disco têm a mesma massa $m$. O comprimento de cada barra é igual ao diâmetro $d$ do disco. Se o conjunto está girando com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_1$ quando as barras estão dirigidas para fora, determine a velocidade angular do conjunto, se por meios internos as barras são levantadas e postas na posição vertical.



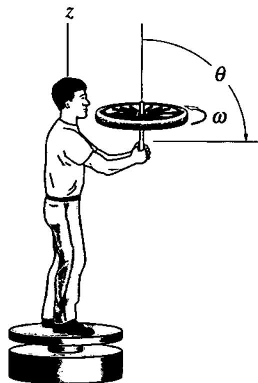

**Problema 19.37**

**19.38.** O homem senta-se num banco giratório mantendo em suas mãos dois pesos de 5 lb e os braços estendidos. Se ele está girando a 3 rad/s nessa posição, determine sua velocidade angular quando os pesos são trazidos para próximo do eixo de rotação, a uma distância de 0,3 pé. Suponha que o homem pesa 160 lb e tem raio de giração $k_z = 0{,}66$ pé relativamente ao eixo $z$. Despreze a massa dos braços e as dimensões dos pesos.



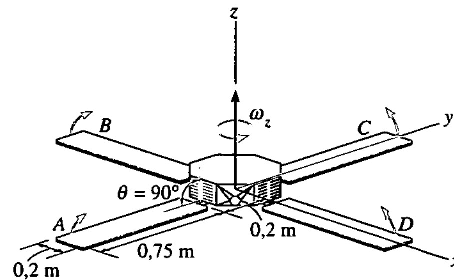

**Problema 19.38**

**19.39.** Um homem tem um momento de inércia $I_z$ em relação ao eixo $z$. O homem está inicialmente em pé e em repouso numa plataforma que pode girar livremente. Se ele segura uma roda que está girando com velocidade $\boldsymbol{\omega}$ e tem momento de inércia $I$ em relação ao seu eixo de rotação, determine sua velocidade angular se (a) ele segura a roda na posição vertical, como mostrado na figura, (b) gira a roda para fora, com $\theta = 90°$ e (c) gira a roda para baixo, com $\theta = 180°$.



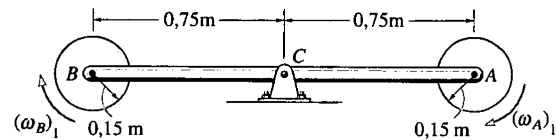

**Problema 19.39**

***19.40.** O satélite artificial tem uma massa de 125 kg e um momento de inércia $I_z = 0{,}940$ kg·m$^2$, excluindo-se os quatro painéis solares $A$, $B$, $C$ e $D$. Cada painel solar tem uma massa de 20 kg e pode ser considerado como uma placa fina. Se o satélite está girando inicialmente em torno do eixo $z$ a uma taxa constante $\omega_z = 0{,}5$ rad/s quando $\theta = 90°$, determine a taxa de rotação se todos os painéis são levantados e alcançam a posição vertical, $\theta = 0°$, no mesmo instante.



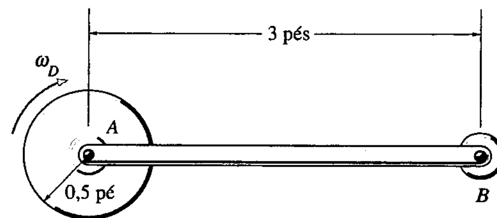

**Problema 19.40**

**19.41.** A barra $ACB$ de 2 kg suporta em suas extremidades dois discos de 4 kg. Se a ambos os discos se transmite uma velocidade angular no sentido horário $(\omega_A)_1 = (\omega_B)_1 = 5$ rad/s, enquanto a barra é mantida estacionária e, então, solta, determine a velocidade angular da barra após os discos terem parado de girar relativamente à roda, devido à resistência de atrito nos pinos A e $B$. O movimento se dá no plano *horizontal*. Despreze o atrito no pino $C$.



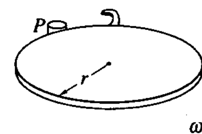

**Problema 19.41**

**19.42.** A barra de 5 lb suporta o disco de 3 lb em sua extremidade. Se ao disco se comunica uma velocidade angular $\omega_D = 8$ rad/s enquanto a barra é mantida estacionária e, então, solta, determine a velocidade angular da barra após o disco parar de girar relativamente à barra, devido ao atrito no eixo $A$. O movimento se dá no *plano horizontal*. Despreze o atrito no eixo fixo $B$.




**Problema 19.42**

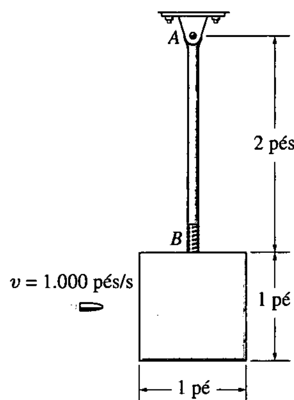
**19.43.** Um disco fino de massa $m$ tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_r$ enquanto gira sobre uma superfície lisa. Determine sua velocidade angular imediatamente após o gancho na sua borda atingir o pino $P$ e o disco começar a girar em torno de $P$ sem retroceder.




**Problema 19.43**

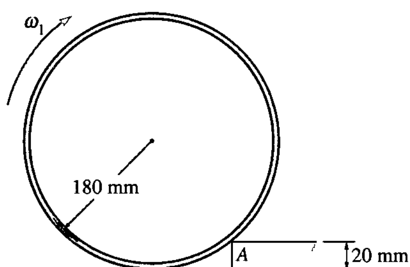
***19.44.** O pêndulo consiste numa barra delgada $AB$ de 5 lb e um bloco de madeira de 10 lb. Um projétil de 0,2 lb é dis-

parado em direção ao centro do bloco com velocidade de 1.000 pés/s. Se o pêndulo está inicialmente em repouso e o projétil se encrava no bloco, determine a velocidade do conjunto imediatamente após o impacto.



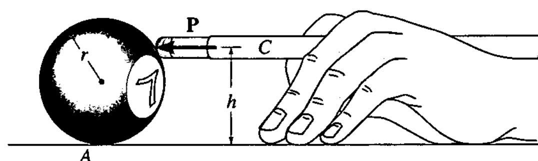

**Problema 19.44**

**19.45.** Um anel fino de 15 kg atinge o degrau de 20 mm de altura. Determine a velocidade angular máxima $\omega_1$ que o anel pode ter para que ele não retroceda após a colisão em $A$.




**Problema 19.45**

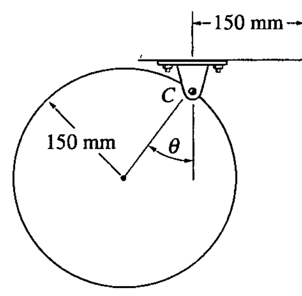
**19.46.** Determine a que altura $h$ a bola de bilhar de massa $m$ deve ser atingida para que não se desenvolva força de atrito entre ela e a mesa em $A$. Suponha que o taco $C$ exerça somente uma força horizontal **P** na bola.



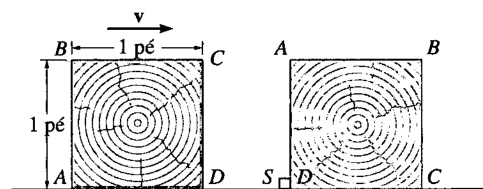

**Problema 19.46**

**19.47.** O disco tem massa de 15 kg. Se ele é solto a partir do repouso quando $\theta$ = 30°, determine o ângulo máximo $\theta$ de retorno depois que ele colide com a parede. O coeficiente de restituição entre o disco e a parede é $e$ = 0,6. Quando $\theta$ = 0°, o disco fica suspenso, mal tocando a parede. Despreze o atrito no pino $C$.

***19.48.** O bloco de 10 lb está escorregando numa superfície lisa quando seu vértice $D$ colide com um bloquinho fixo $S$. Determine o valor mínimo da velocidade $v$ que o bloco deve ter para que ele gire sobre $S$ e pouse na posição mostrada na figura. Despreze o tamanho de $S$. *Dica:* considere o peso do bloco como não impulsivo durante o impacto.

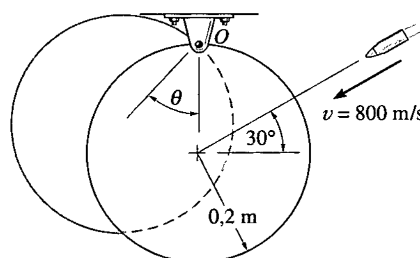



**Problema 19.47**



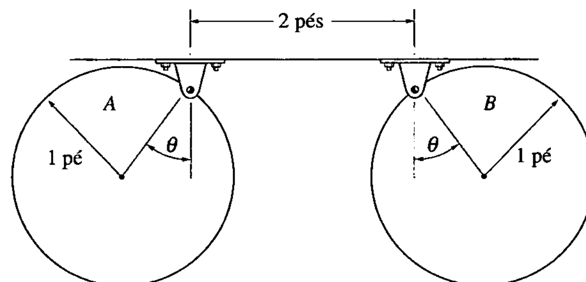

**Problema 19.48**

**19.49.** Uma bala de 7 g com velocidade de 800 m/s é disparada contra a borda do disco de 5 kg, como se mostra na figura. Determine a velocidade angular do disco imediatamente depois que a bala se encrava nele. Calcule também o ângulo máximo $\theta$ atingido pelo disco. O disco está inicialmente em repouso.




**Problema 19.49**

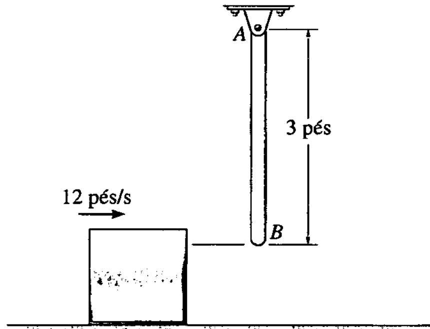
**19.50.** Os dois discos, cada um com peso de 10 lb, são soltos a partir do repouso em $\theta$ = 30°. Determine o valor máximo de $\theta$ atingido por eles, após a colisão. Como sugere a figura, para $\theta$ = 0°, os discos mal se tocam. O coeficiente de restituição é $e$ = 0,75.




**Problema 19.50**

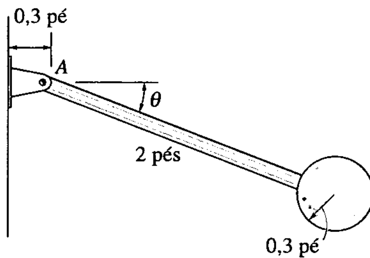
**19.51.** A barra $AB$ de 4 lb está em repouso numa posição vertical. Um bloco de 2 lb, escorregando numa superfície horizontal lisa com uma velocidade de 12 pés/s, atinge a barra

em sua extremidade $B$. Determine a velocidade do bloco imediatamente depois da colisão. O coeficiente de restituição entre o bloco e a barra em $B$ é $e = 0{,}8$.



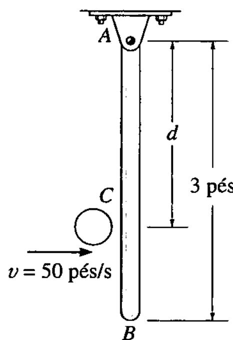

**Problema 19.51**

*19.52. O pêndulo é formado por uma bola sólida de 10 lb e uma barra de 4 lb. Se o pêndulo é solto a partir do repouso quando $\theta_1 = 0°$, determine o ângulo máximo $\theta_2$ atingido por ele após a colisão. Considere $e = 0{,}6$.



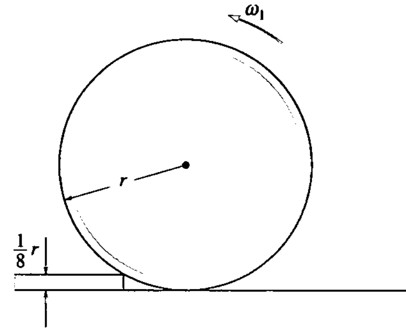

**Problema 19.52**

19.53. A barra delgada $AB$ está inicialmente em repouso, suspensa na posição vertical. Uma bola de 1 lb é arremessada contra a barra, com velocidade $v = 50$ pés/s, atingindo-a em $C$. Determine a velocidade angular da barra imediatamente após o impacto. Considere $e = 0{,}7$ e $d = 2$ pés.



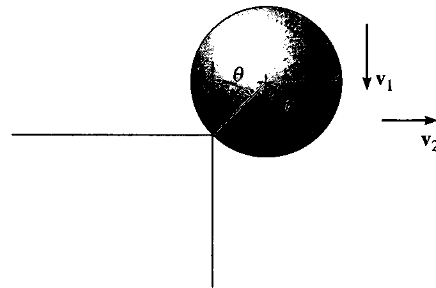

**Problema 19.53**

19.54. O disco tem massa $m$ e raio $r$. Se ele atinge o degrau áspero de altura $\frac{1}{8}r$, como mostra a figura, determine a velocidade angular máxima $\omega_1$ que o disco pode ter para que ele não pule de volta ao atingir o degrau.



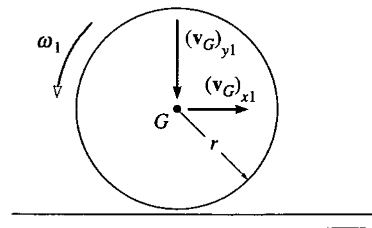

**Problema 19.54**

19.55. A bola sólida de massa $m$ é derrubada com velocidade $\mathbf{v}_1$ sobre o vértice de um degrau áspero. Se ela salta horizontalmente do degrau com velocidade $\mathbf{v}_2$, determine o ângulo $\theta$ para o qual ocorre o contato. Suponha que não haja escorregamento quando a bola atinge o degrau. O coeficiente de restituição é $e$.




**Problema 19.55**

*19.56. Uma bola sólida com massa $m$ é arremessada no solo de tal forma que no instante do contato ela tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_1$ e componentes de velocidade $(\mathbf{v}_G)_{x1}$ e $(\mathbf{v}_G)_{y1}$, como se mostra na figura. Se o solo é suficientemente áspero para que não ocorra escorregamento, determine os componentes da velocidade de seu centro de massa imediatamente após o impacto. O coeficiente de restituição é $e$.




**Problema 19.56**

## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Quantidade de Movimento e Momento Angular.*** A quantidade de movimento de um corpo rígido pode ser relacionada com a velocidade do centro de massa. O resultado é $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$. Somando-se os momentos das quantidades de movimento de todos os pontos materiais do corpo rígido, em relação a um eixo passando pelo centro de massa $G$, pode-se mostrar que o momento angular do corpo em relação a $G$ é $\mathbf{H}_G = I_G\boldsymbol{\omega}$. Se o momento angular tiver de ser determinado em relação a um eixo que não passe pelo centro de massa $G$, então o momento angular será determinado pela soma de $\mathbf{H}_G$ com o momento do vetor $\mathbf{L}_G$, em relação a esse eixo.

  ***Translação.*** Se o corpo está em translação, então $\omega = 0$ e, portanto,

$$L = mv_G \qquad H_G = 0$$

  ***Rotação em torno de um Eixo Fixo.*** Nesse caso,

$$L = mv_G \qquad H_G = I_G\omega$$

  Como $v_G = \omega r$, então, usando-se o teorema dos eixos paralelos, o momento angular em relação ao eixo de rotação se torna

$$H_O = I_O\omega$$

  ***Movimento Plano Geral.*** A quantidade de movimento e o momento angular em relação a $G$ para esse caso são

$$L = mv_G \qquad H_G = I_G\omega$$

- ***Princípios do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Os princípios do impulso e da quantidade de movimento/momento angular para um corpo rígido são

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$

$$I_G\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_G\,dt = I_G\omega_2$$

  Antes de se aplicarem essas equações, é importante estabelecer um sistema de coordenadas inercial $x, y, z$. O diagrama de corpo livre para o corpo também deve ser construído para se levar em conta todas as forças e torques de binário que produzem impulsos no corpo.

- ***Conservação da Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Sendo nula, em uma dada direção, a soma dos impulsos agentes no sistema de corpos rígidos ligados, a quantidade de movimento para o sistema se conserva na direção considerada. A conservação do momento angular ocorre se os impulsos passam por um eixo ou são paralelos a ele. O momento angular também se conserva se as forças externas são pequenas e, portanto, podem ser consideradas não impulsivas.

  Um diagrama de corpo livre deve acompanhar toda aplicação para se classificar as forças como impulsivas e não impulsivas e determinar um eixo em relação ao qual o momento angular pode conservar-se.

- ***Colisão Excêntrica.*** Ocorre colisão excêntrica se a linha de colisão não coincide com a linha que liga os centros de massa dos corpos. Se o movimento dos corpos imediatamente após a colisão deve ser determinado, então é necessário considerar a conservação da quantidade de movimento/momento angular para o sistema e usar a equação do coeficiente de restituição.

# REVISÃO 2

## CINEMÁTICA E DINÂMICA DE UM CORPO RÍGIDO EM MOVIMENTO PLANO

Tendo apresentado nos capítulos 16 a 19 os vários tópicos sobre a cinemática e a dinâmica de corpos rígidos em movimento plano, faremos agora um resumo dos princípios e forneceremos uma oportunidade para aplicá-los na solução de vários tipos de problemas.

***Cinemática.*** Na cinemática interessa-nos estudar a geometria do movimento, sem preocupações com as forças que causam o movimento. Antes de resolver um problema de cinemática no plano, é necessário *primeiro classificar o movimento* como translação retilínea ou curvilínea, rotação em torno de um eixo fixo ou movimento plano geral. Em particular, problemas que envolvem movimento plano geral podem ser resolvidos tanto relativamente a um eixo fixo (análise do movimento absoluto) quanto usando referenciais em translação ou em rotação (análise do movimento relativo). A escolha depende em geral do tipo de vínculos da geometria. Em todos os casos, a aplicação das equações necessárias pode ser aclarada construindo-se um diagrama cinemático. Lembremos que a *velocidade* de um ponto é sempre tangente à sua trajetória, e a *aceleração* de um ponto pode ter componentes nas direções $n$–$t$ quando a trajetória é *curva*.

***Translação.*** Quando o corpo se move em translação retilínea ou curvilínea, todos os pontos no corpo têm o *mesmo movimento*:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

onde $A$ e $B$ são dois pontos quaisquer do corpo rígido.

### *Rotação em torno de um Eixo Fixo*

*Movimento Angular*

Aceleração Angular Variável. Conhecida uma relação matemática entre *quaisquer* duas das *quatro* variáveis $\theta$, $\omega$, $\alpha$ e $t$, então uma *terceira* variável pode ser determinada resolvendo-se uma das seguintes equações que relacionam todas as três variáveis:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

Aceleração Angular Constante. As seguintes equações são aplicadas quando *se tem absoluta certeza* de que a aceleração angular é constante.

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2 \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

*Movimento de um Ponto P*

Uma vez determinados $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$, o movimento circular de um ponto $P$ pode ser especificado usando-se as seguintes equações escalares ou vetoriais:

$$v = \omega r \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r \qquad \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

*Movimento Plano Geral – Análise do Movimento Relativo.* Lembremos que, quando os *eixos em translação* são fixados com origem no 'ponto de base' $A$, o *movimento relativo* do ponto $B$ em relação a $A$ é um *movimento circular de B em torno de A.* As seguintes equações são aplicadas aos pontos $A$ e $B$ do *mesmo* corpo rígido.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Usam-se com freqüência *eixos em rotação e em translação* para se analisar o movimento de corpos que estão ligados por cursores e blocos deslizantes.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

***Dinâmica.*** Para analisarmos as forças que causam o movimento devemos usar os princípios da dinâmica. Ao se aplicarem as equações necessárias, é importante estabelecer primeiro o sistema de coordenadas inercial e definir os sentidos positivos dos eixos. Os *sentidos* devem ser os *mesmos* daqueles escolhidos quando se escrevem quaisquer equações da cinemática, pois é necessário encontrar uma *solução simultânea* das equações.

*Equações de Movimento.* Essas equações são usadas para determinar movimentos acelerados ou forças que provocam o movimento. Se usadas para determinar posição, velocidade ou tempo, então a cinemática deverá ser considerada parte da solução. Antes de aplicar as equações de movimento, *sempre construa um diagrama de corpo livre* para identificar todas as forças que agem no corpo. Estabeleça também os sentidos da aceleração do centro de massa e da aceleração angular do corpo. (Um diagrama dinâmico também pode ser desenhado para representar $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ graficamente. Esse diagrama é particularmente útil para decompor $m\mathbf{a}_G$ em componentes e identificar os termos no somatório $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.)

As três equações de movimento são:

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$

$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

$$\Sigma M_G = I_G\alpha \qquad \text{ou} \qquad \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

Em particular, se o corpo *gira em torno de um eixo fixo*, os momentos podem ser somados em relação ao ponto $O$ do eixo, caso em que

$$\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O = I_O\alpha$$

*Trabalho e Energia. Usa-se a equação do trabalho e energia para resolver problemas que envolvem força, velocidade e deslocamento.* Antes de aplicar essa equação, *sempre trace um diagrama de corpo livre* para o corpo para identificar as forças que realizam trabalho. Lembre-se de que a energia cinética do corpo é devida ao movimento de translação com a velocidade do centro de massa, $\mathbf{v}_G$, *e* ao movimento de rotação do corpo com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

onde

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2$$

$$U_F = \int F\cos\theta\, ds \text{ (força variável)}$$

$$U_{F_c} = F_c\cos\theta(s_2 - s_1) \text{ (força constante)}$$

$$U_W = -W\,\Delta y \qquad \text{(peso)}$$

$$U_s = -(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) \text{ (mola)}$$

$$U_M = M\theta \qquad \text{(momento de binário constante)}$$

Se as forças que agem no corpo são *conservativas*, então aplique a *equação da conservação da energia*. Essa equação é de uso mais fácil do que a da equação do trabalho e energia, pois é aplicada somente a *dois pontos* da trajetória e *não* exige o cálculo do trabalho de força que tem seu ponto de aplicação movendo-se ao longo da trajetória.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

onde

$$V_g = Wy \text{ (energia potencial gravitacional)}$$

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \text{ (energia potencial elástica)}$$

*Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular. Os princípios do impulso e quantidade de movimento/momento angular são utilizados na solução de problemas que envolvem força, velocidade e tempo.* Antes de aplicar as equações, *construa um diagrama de corpo livre* para identificar todas as forças que causam impulsos no corpo. Estabeleça os sentidos da velocidade do centro de massa e da velocidade angular do corpo imediatamente antes e imediatamente após a aplicação dos impulsos. (Como procedimento alternativo, os diagramas de impulso e quantidade de movimento e/ou momento angular podem acompanhar a solução para se levar em conta graficamente os termos nas equações. Esses diagramas são particularmente vantajosos quando se calculam impulsos e momentos angulares em relação a pontos que não sejam o centro de massa do corpo.)

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$

$$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\, dt = (\mathbf{H}_G)_2$$

ou

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

*Conservação da Quantidade de Movimento/Momento Angular.* Se forças não impulsivas agem sobre o corpo em uma dada direção ou se os movimentos de

vários corpos estão envolvidos no problema, considere a aplicação da conservação da quantidade de movimento ou do momento angular para a solução. A investigação do diagrama de corpo livre (ou o diagrama de impulso) ajudará na determinação das direções para as quais as forças impulsivas são nulas ou os eixos em relação aos quais as forças impulsivas produzem momento angular nulo. Para esses casos,

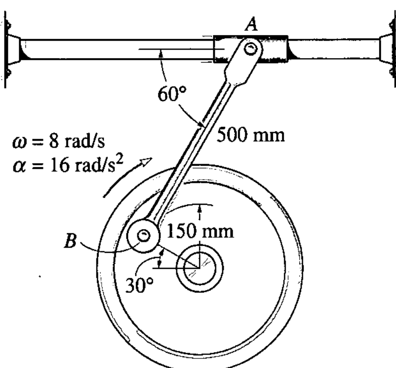
$$m(\mathbf{v}_G)_1 = m(\mathbf{v}_G)_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

Os problemas a seguir envolvem a aplicação de todos os conceitos que acabamos de discutir. Eles estão apresentados em *ordem aleatória* de modo que se pode obter prática ao se identificarem os vários tipos de problemas e ao se desenvolverem as habilidades necessárias para as suas soluções.

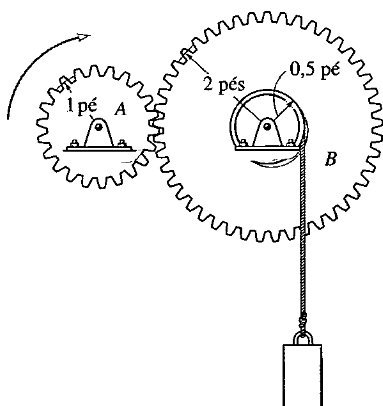
## Problemas de Revisão

**R2.1.** Num dado instante, a roda está girando como se indica na figura. Determine a aceleração do colar em $A$ nesse instante.



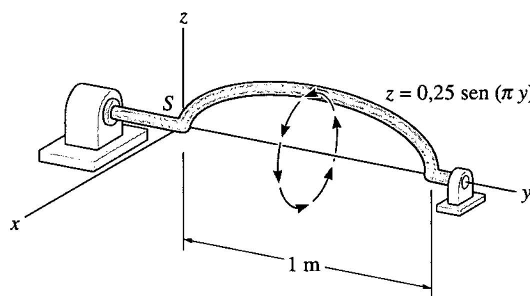

**Problema R2.1**

**R2.2.** A engrenagem $A$ tem velocidade angular inicial de 60 rad/s e desaceleração constante de 1 rad/s$^2$. Determine a velocidade e a desaceleração do bloco que está sendo erguido pela polia fixada na engrenagem $B$ quando $t = 3$ s.



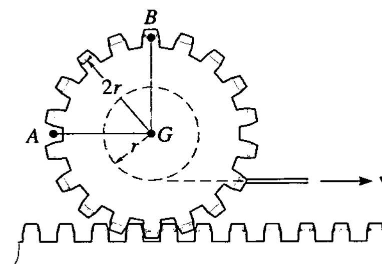

**Problema R2.2**

**R2.3.** A barra dobrada na forma de uma curva senoidal tem de girar em torno do eixo $S$ (na direção $y$) por meio de um motor. A barra parte do repouso na posição mostrada na figura e um motor a faz girar, por um breve intervalo de tempo, com aceleração $\alpha = (1{,}5e^t)$ rad/s$^2$, onde $t$ é dado em segundos. Determine os módulos da velocidade e do deslocamento angulares da barra para $t = 3$ s. Localize o ponto da barra que possui as máximas velocidade e aceleração e calcule os módulos dessas grandezas para $t = 3$ s. A curva que define a barra é $z = 0{,}25\ \text{sen}(\pi y)$, onde o argumento da função seno é dado em radianos e $y$, em metros.



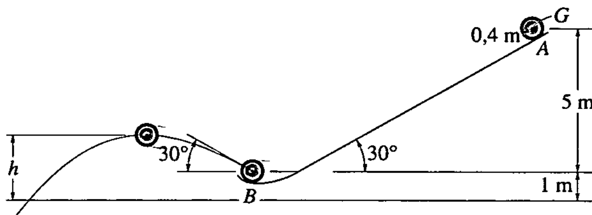

**Problema R2.3**

***R2.4.** Uma corda está enrolada na bobina interna de uma engrenagem. Se a corda é puxada com velocidade constante $v$, determine a velocidade e a aceleração dos pontos $A$ e $B$. A engrenagem rola numa cremalheira fixa.



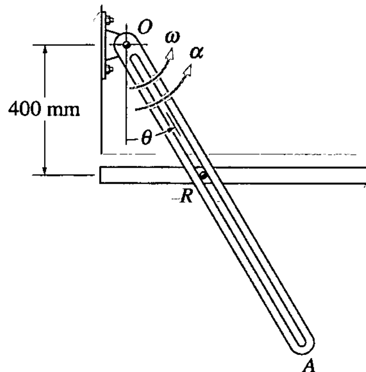

**Problema R2.4**

**R2.5.** Abandona-se a partir do repouso em $A$ uma roda de automóvel, com 7 kg, que rola sem escorregar na superfície inclinada. Após atingir o ponto $B$ da superfície, a roda segue em vôo livre. Determine a altura máxima $h$ atingida pela roda. O raio de giração da roda em relação ao seu centro de massa é $k_G = 0{,}3$ m.



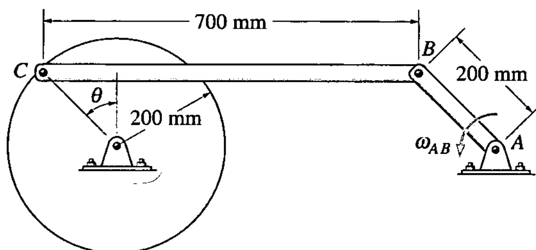

Problema R2.5

**R2.6.** A barra de ligação $OA$, presa por um pino em $O$, gira por causa da ação da barra $R$, que desliza ao longo da ranhura horizontal. Se $R$ parte do repouso quando $\theta = 0°$ e tem aceleração constante $a_R = 60$ mm/s$^2$ para a direita, determine a velocidade e a aceleração angulares de $OA$ para $t = 2$ s.



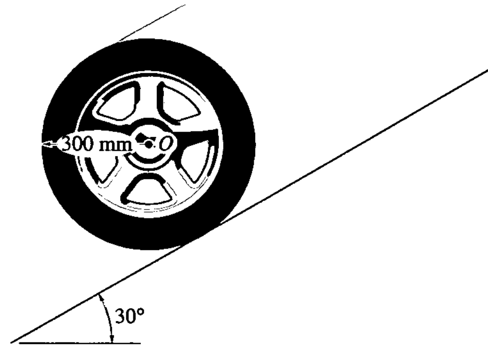

Problema R2.6

**R2.7.** A barra de ligação uniforme $BC$ tem massa de 3 kg e está ligada por pinos em ambas as extremidades. Determine as forças verticais que os pinos exercem em $B$ e $C$ no instante em que (a) $\theta = 0°$ e (b) $\theta = 90°$. A manivela $AB$ gira com velocidade angular constante $\omega_{AB} = 5$ rad/s.



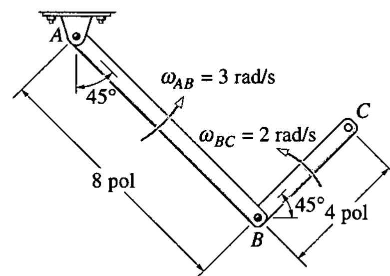

Problema R2.7

***R2.8.** A roda tem massa de 9 kg e raio de giração $k_O = 225$ mm. Se ela é solta a partir do repouso e rola plano abaixo sem escorregar, determine a velocidade de seu centro $O$ quando $t = 3$ s.



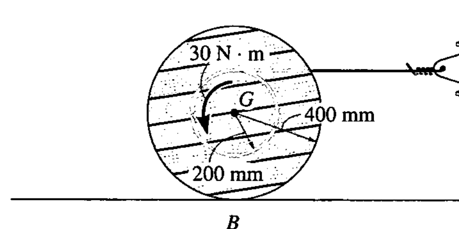

**Problema R2.8**

**R2.9.** O pêndulo duplo é formado por duas barras. A barra $AB$ tem velocidade angular constante de 3 rad/s e a barra $BC$, velocidade angular constante de 2 rad/s. Ambas as velocidades angulares têm sentido anti-horário. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $C$ quando o pêndulo está na situação mostrada na figura.



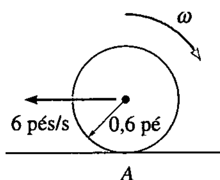

**Problema R2.9**

**R2.10.** A bobina e o fio enrolado no seu interior têm massa de 20 kg e raio de giração central $k_G = 250$ mm. Se o coeficiente de atrito cinético no contato com o piso é $\mu_B = 0{,}1$, determine a aceleração angular da bobina quando se aplica um torque de binário de 30 N · m.



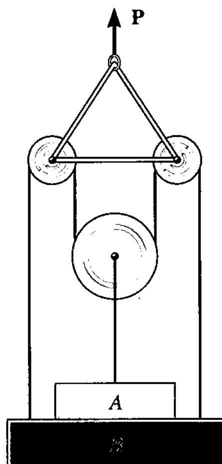

**Problema R2.10**

**R2.11.** Atira-se a bola de 15 lb sobre uma *superfície áspera* de modo que seu centro tem velocidade de 6 pés/s paralela à superfície. Determine a velocidade de 'contra-rotação' $\omega$ que deve ser dada à bola para que ela pare de escorregar no mesmo instante em que sua velocidade para a frente se anula. Não é necessário saber o valor do coeficiente de atrito cinético em $A$.



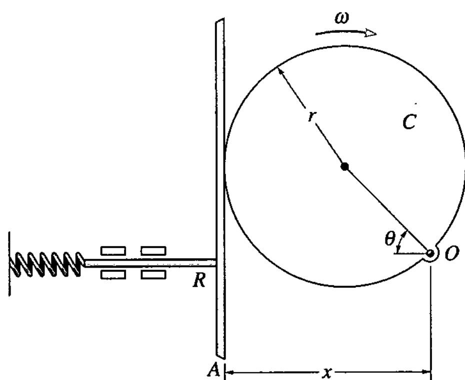

Problema R2.11

*R2.12. Os blocos $A$ e $B$ pesam 50 lb e 10 lb, respectivamente. Se $P$ = 100 lb, determine a força normal exercida pelo bloco $A$ sobre o bloco $B$. Despreze o atrito e o peso das polias, da corda e da estrutura triangular.



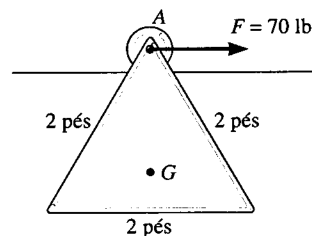

Problema R2.12

R2.13. Determine a velocidade e a aceleração da barra $R$ para qualquer ângulo $\theta$ da came $C$ que gira com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. O pino de ligação em $O$ não causa interferência no movimento de $A$ sobre $C$.



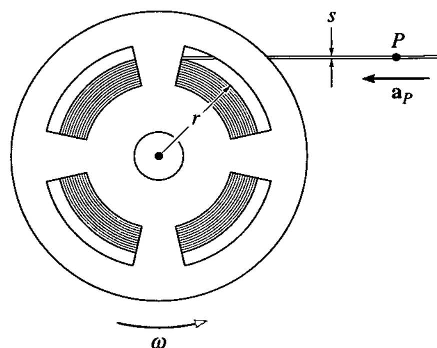

Problema R2.13

R2.14. A placa uniforme de 40 lb é suportada por um rolete em $A$. Se uma força horizontal $F$ = 70 lb é aplicada repentinamente ao rolete, determine a aceleração de seu centro no instante da aplicação da força. A placa tem momento de inércia $I_G$ = 0,414 slug · pés$^2$ em relação ao seu centro de massa. Despreze o peso do rolete.



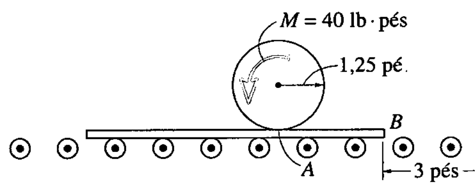

Problema R2.14

R2.15. Uma fita de espessura $s$ está enrolada num disco que gira a uma velocidade constante $\boldsymbol{\omega}$. Supondo que a porção desenrolada da fita permaneça horizontal, determine a aceleração do ponto $P$ da fita quando o raio é $r$. *Dica:* como $v_p = \omega r$, considere a derivada dessa relação e observe que $dr/dt = \omega(s/2\pi)$.



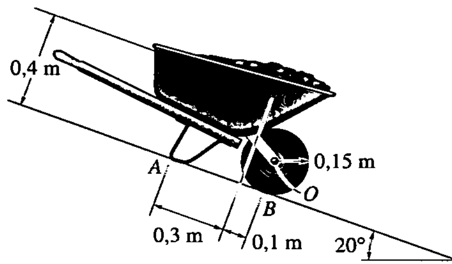

Problema R2.15

*R2.16. O cilindro de 15 lb está inicialmente em repouso sobre uma placa de 5 lb. Se um momento de binário $M$ = 40 lb · pés é aplicado ao cilindro, determine a sua aceleração angular e o tempo necessário para a extremidade $B$ da placa deslocar-se de 3 pés e atingir a parede. Suponha que o cilindro não escorregue sobre a placa e despreze a massa dos roletes.



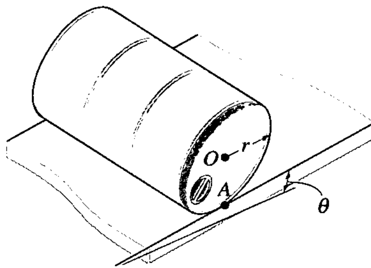

Problema R2.16

R2.17. O carrinho de mão e seu conteúdo têm massa de 40 kg e centro de massa em $G$, excluindo-se a roda. A roda tem massa de 2 kg e raio de giração $k_O$ = 0,120 m. Se o carrinho é abandonado a partir do repouso da posição mostrada na figura, determine sua velocidade após um deslocamento de 4 m plano abaixo. O coeficiente de atrito cinético entre o plano e $A$ é $\mu_A$ = 0,3. A roda rola sem escorregar em $B$.




Problema R2.17

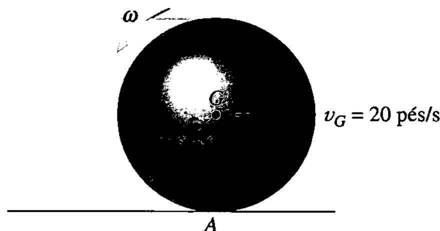
**R2.18.** O tambor de massa $m$, raio $r$ e raio de giração $k_O$ rola ao longo do plano inclinado para o qual o coeficiente de atrito estático é $\mu$. Se o tambor é abandonado a partir do repouso, determine o valor máximo do ângulo $\theta$ para o plano de modo que o tambor role sem escorregar.




Problema R2.18

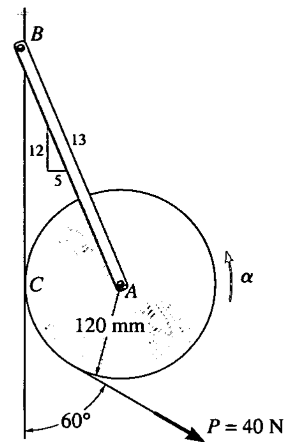
**R2.19.** A bola maciça com 20 lb é arremessada sobre o solo com uma contra-rotação $\omega = 15$ rad/s, enquanto seu centro tem velocidade inicial horizontal $v_G = 20$ pés/s. Se o coeficiente de atrito cinético entre o solo e a bola é $\mu_A = 0{,}3$, determine a distância percorrida pela bola até que ela pare de girar.

***R2.20.** Determine a velocidade de contra-rotação $\omega$ que se deve dar à bola de 20 lb para que, comunicando ao seu centro uma velocidade horizontal inicial $v_G = 20$ pés/s, ela pare de girar e transladar no mesmo instante. O coeficiente de atrito cinético é $\mu_A = 0{,}3$.



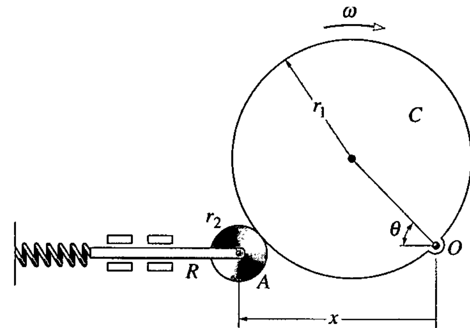

Problemas R2.19/20

**R2.21.** Um rolo de papel, inicialmente em repouso, é ligado por pinos em suas extremidades ao suporte $AB$. O rolo apóia-se contra uma parede para a qual o coeficiente de atrito cinético em $C$ é $\mu_C = 0{,}3$. Se uma força de 40 N é aplicada uniformemente à extremidade da folha, determine a aceleração angular inicial do rolo e a tensão no suporte conforme o papel se desenrola. Considere o rolo como um cilindro.



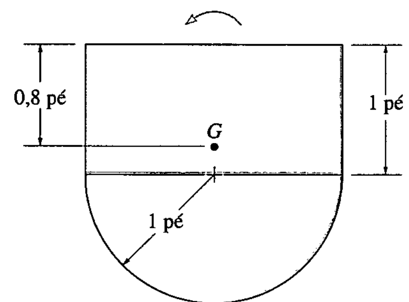

Problema R2.21

**R2.22.** Calcule a velocidade da barra $R$ para qualquer ângulo da came $C$ que gira com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. O pino de ligação em $O$ não causa interferência no movimento de $A$ sobre $C$.



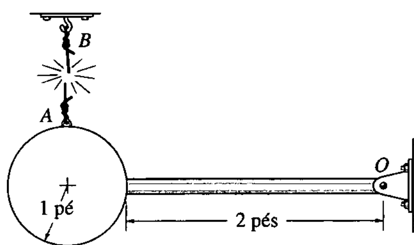

Problema R2.22

**R22.23.** A peça pesa 10 lb e tem raio de giração $k_G = 0{,}6$ pé em relação ao seu centro de massa $G$. A energia cinética do corpo é de 31 pés·lb quando este está na posição mostrada na figura. Se a peça rola no sentido anti-horário sobre a superfície e não escorrega, determine sua quantidade de movimento nessa situação.



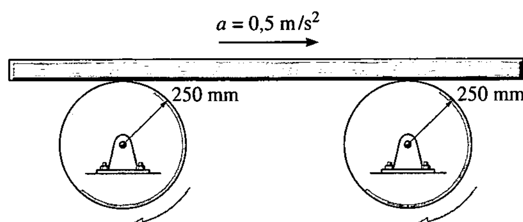

Problema R2.23

***R2.24.** O pêndulo é formado por uma esfera de 30 lb e uma barra delgada de 10 lb. Calcule a reação no pino $O$ imediatamente após a corda se romper.



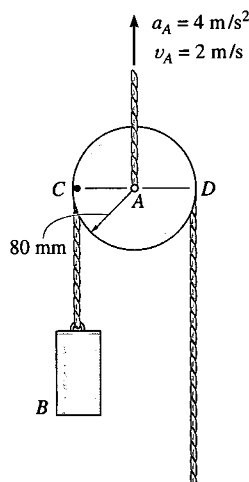

Problema R2.24

**R2.25.** A tábua apóia-se sobre dois tambores. Na situação mostrada na figura, a aceleração da tábua é de 0,5 m/s$^2$ para a direita, e os pontos nas bordas dos tambores têm aceleração de 3 m/s$^2$. Supondo que a tábua rola sem escorregar sobre os tambores, determine sua velocidade.




Problema R2.25

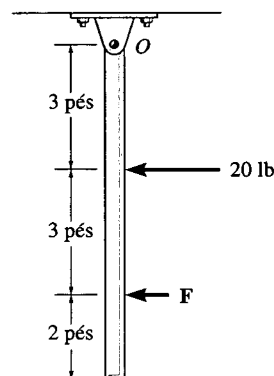
**R2.26.** O centro da polia está sendo erguido verticalmente com aceleração de 4 m/s$^2$ no instante em que sua velocidade é de 2 m/s. Se o cabo não escorrega na superfície da polia, determine as acelerações do cilindro $B$ e do ponto $C$ na polia.



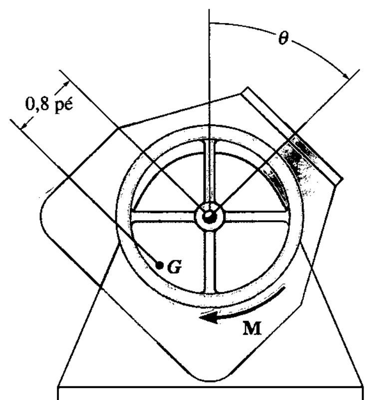

Problema R2.26

**R2.27.** Na situação mostrada na figura, agem duas forças na barra delgada de 30 lb. Determine a intensidade da força **F** e a aceleração angular inicial da barra para que a reação horizontal que o *pino em O exerce na barra* seja de 5 lb, dirigida para a direita.

***R2.28.** A parte móvel da betoneira tem peso de 70 lb e raio de giração $k_G = 1{,}3$ em relação ao seu centro de gravidade. Se um torque constante $M = 60$ lb·pés é aplicado à roda de descarregamento, determine a velocidade angular da parte móvel no instante em que ela está na posição $\theta = 90°$, sendo que ela partiu do repouso na posição $\theta = 0°$.



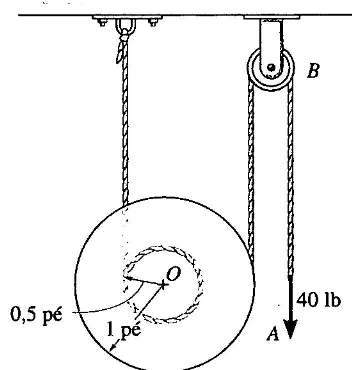

Problema R2.27




Problema R2.28

**R2.29.** A bobina tem peso de 30 lb e raio de giração $k_O = 0{,}65$ pé. Se uma força de 40 lb é aplicada à corda em $A$, determine a velocidade angular da bobina, no instante $t = 3$ s, a partir do repouso. Despreze a massa da polia e da corda.

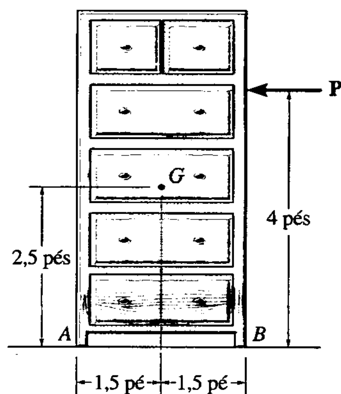
**R2.30.** Resolva o Problema R2.29 supondo que, em vez da aplicação da força de 40 lb, prende-se na corda um bloco de 40 lb.




Problemas R2.29/30

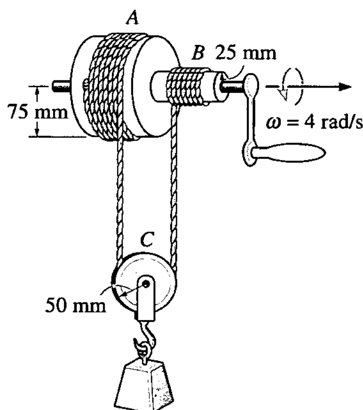
**R2.31.** A cômoda de 80 lb é empurrada ao longo do piso. Se o coeficiente de atrito estático em $A$ e $B$ é $\mu_e = 0{,}3$ e o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}2$, determine a menor força horizontal $P$ necessária para causar movimento. Se a

força for aumentada ligeiramente, determine a aceleração da cômoda. Quais são as reações normais em $A$ e $B$ quando se inicia o movimento?




Problema R2.31

***R2.32.** Quando a manivela do molinete gira, a corda em $A$ se desenrola, enquanto em $B$ ela se enrola. Determine a velocidade com a qual o bloco desce se a velocidade angular da manivela é $\omega = 4$ rad/s. Qual é a velocidade angular da polia em $C$? As partes da corda em ambos os lados da polia são paralelas e verticais. A corda não escorrega na polia.

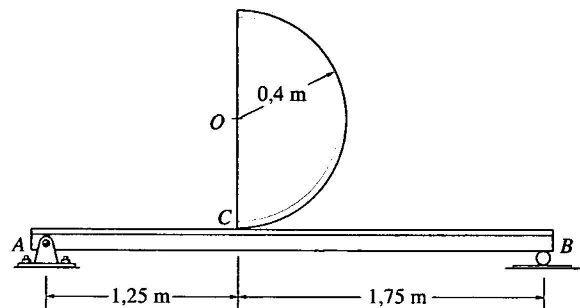



Problema R2.32

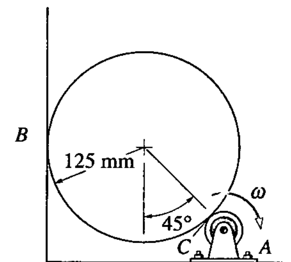
**R2.33.** O disco semicircular tem massa de 50 kg e é abandonado a partir do repouso na posição mostrada na figura. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o disco e a viga são $\mu_e = 0{,}5$ e $\mu_c = 0{,}3$, respectivamente. Determine as reações iniciais no pino $A$ e no rolete $B$. Despreze a massa da viga.

**R2.34.** O disco semicircular tem massa de 50 kg e é abandonado a partir do repouso na posição mostrada na figura. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o disco e a viga são $\mu_e = 0{,}2$ e $\mu_c = 0{,}1$, respectivamente. Determine as reações iniciais no pino $A$ e no rolete $B$. Despreze a massa da viga.

**R2.35.** O cilindro de 5 kg, inicialmente em repouso, é posto em contato com a parede $B$ e o rotor em $A$. Se o rotor mantém sempre uma velocidade angular $\omega = 6$ rad/s no sentido horário, determine a aceleração angular inicial do cilindro. O coeficiente de atrito cinético nas superfícies de contato $B$ e $C$ é $\mu_c = 0{,}2$.



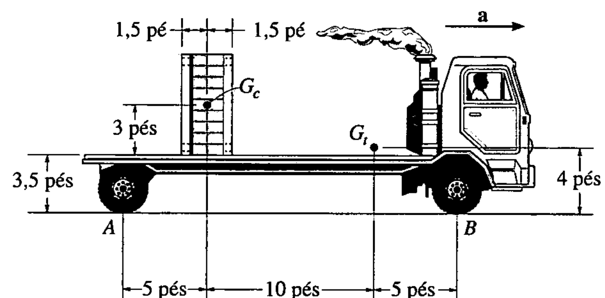

Problemas R2.33/34




Problema R2.35

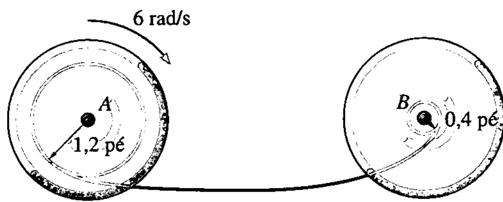
***R2.36.** O caminhão transporta o engradado de 800 lb que possui centro de gravidade em $G_c$. Determine a aceleração máxima que o caminhão pode ter para que a caixa não escorregue ou tombe. O coeficiente de atrito estático entre o engradado e o caminhão é $\mu_e = 0{,}6$.

**R2.37.** O caminhão, que tem peso de 8.000 lb e centro de gravidade em $G_t$, transporta um engradado de 800 lb, cujo centro de gravidade é $G_c$. Determine a reação normal em *cada uma* das quatro rodas se o caminhão tem aceleração $a = 0{,}5$ pé/s$^2$. Qual é a força de atrito que age no engradado; e em *cada* roda traseira? Suponha tração apenas nas rodas traseiras. As rodas dianteiras rolam livremente. Despreze a massa das rodas e considere que o engradado não escorrega nem tomba.



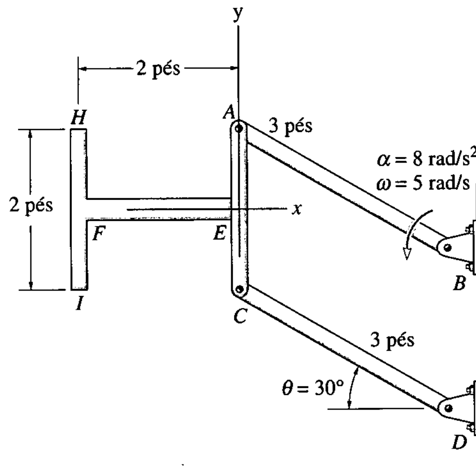

Problemas R2.36/37

**R2.38.** A bobina $B$ está em repouso e a bobina $A$ gira a 6 rad/s. Determine a velocidade angular de cada bobina imediatamente após o fio ser esticado. As bobinas $A$ e $B$ têm pesos e raios de giração $W_A = 30$ lb, $k_A = 0{,}8$ pé e $W_B = 15$ lb, $k_B = 0{,}6$ pé, respectivamente.




Problema R2.38

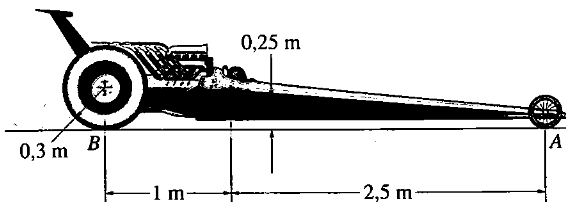
**R2.39.** As duas barras de 3 lb $EF$ e $HI$ formam um 'T' que está soldado na barra $AC$ em $E$. Determine a força interna axial $E_x$, a força de cisalhamento $E_y$ e o momento $ME$ que a barra $AC$ exerce em $FE$ em $E$, se no instante em que $\theta = 30°$ a barra de ligação $AB$ tem velocidade angular $\omega = 5$ rad/s e aceleração angular $\alpha = 8$ rad/s$^2$, como mostrado na figura.




Problema R2.39

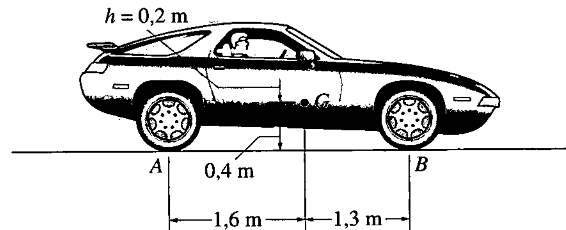
***R2.40.** O veículo de competição tem massa de 1.500 kg e centro de massa em $G$. Se o coeficiente de atrito cinético entre as rodas traseiras e o pavimento é $\mu_c = 0,6$, determine se é possível ao piloto elevar as rodas dianteiras, $A$, enquanto as traseiras estão escorregando. Se for possível, que aceleração será necessária? Despreze a massa das rodas e suponha que as rodas dianteiras podem rolar livremente.

**R2.41.** O veículo de competição tem massa de 1.500 kg e centro de massa em $G$. Se não há escorregamento, determine a força de atrito $F_B$ que deve ser aplicada a *cada* roda traseira para produzir uma aceleração $a = 6$ m/s$^2$. Quais são as reações normais de cada roda sobre o pavimento? Despreze a massa das rodas e suponha que as rodas dianteiras podem rolar livremente.



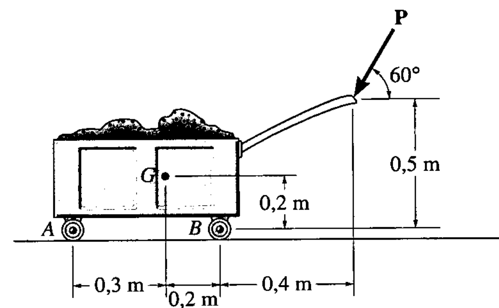

Problemas R2.40/41

**R2.42.** O centro de massa do carro de 1,6 t mostrado na figura foi elevado a $h = 0,2$ m. Isso foi realizado elevando-se as molas no eixo traseiro. Se o coeficiente de atrito cinético entre as rodas traseiras e o solo é $\mu_c = 0,3$, mostre que o carro pode acelerar mais do que podia antes da modificação ($h = 0$). Despreze a massa das rodas e do piloto e suponha que as rodas dianteiras em $B$ podem rolar livremente, enquanto as traseiras escorregam.



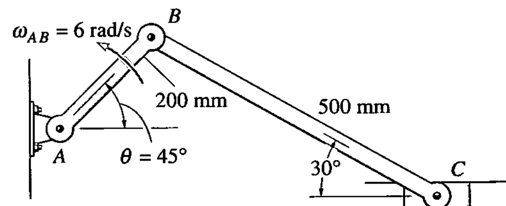

Problema R2.42

**R2.43.** O carrinho tem massa de 400 kg e centro de massa em $G$. Determine as reações normais em *cada* roda em $A$ e $B$, se uma força $P = 50$ N é aplicada ao puxador. Despreze as massas das rodas e a resistência de rolamento.



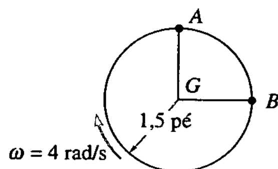

Problema R2.43

***R2.44.** Determine a velocidade do bloco deslizante $C$, se a barra $AB$ tem velocidade angular $\omega_{AB} = 6$ rad/s, na situação mostrada na figura.



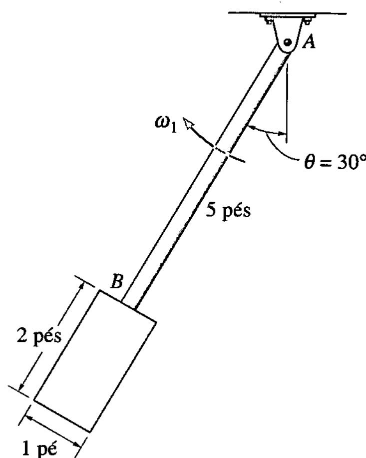

Problema R2.44

**R2.45.** O disco em queda livre está girando com velocidade angular constante $\omega = 4$ rad/s, enquanto seu centro tem aceleração de 32,2 pés/s$^2$. Determine a aceleração dos pontos $A$ e $B$ na borda do disco, na situação mostrada na figura.



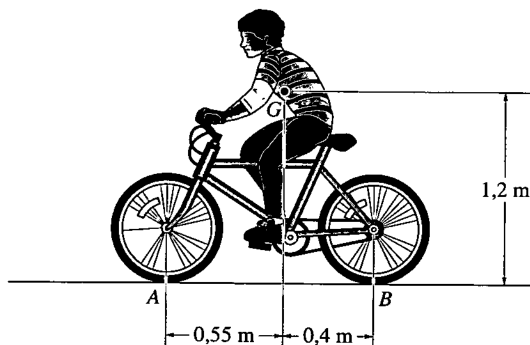

Problema R2.45

**R2.46.** O cilindro de 80 lb está preso a uma barra delgada de 10 lb presa por um pino em $A$. No instante em que $\theta = 30°$, o pêndulo tem velocidade angular $\omega_1 = 1$ rad/s, como mostrado na figura. Determine o valor máximo do ângulo $\theta$ atingido pelo pêndulo em seu movimento oscilatório.



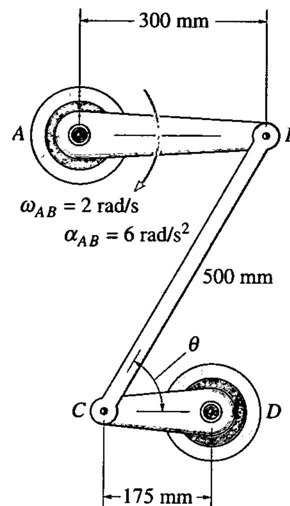

Problema R2.46

**R2.47.** A bicicleta e o ciclista têm massa de 80 kg e centro de massa localizado em $G$. Se o coeficiente de atrito cinético na roda traseira é $\mu_B = 0{,}8$, determine as reações normais nas rodas $A$ e $B$ e a desaceleração do ciclista, quando a roda traseira se trava pela freagem. Determine a reação normal na roda traseira quando a bicicleta se move com velocidade constante e sem a aplicação dos freios. Despreze a massa das rodas.




Problema R2.47

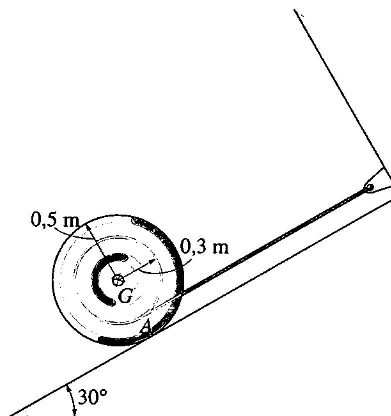
***R2.48.** Na situação mostrada na figura, a barra $AB$ tem velocidade angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s e aceleração angular $\alpha_{AB} = 6$ rad/s$^2$. Determine a aceleração do pino $C$ e a aceleração angular da barra de ligação $CB$, considerando $\theta = 60°$.




Problema R2.48

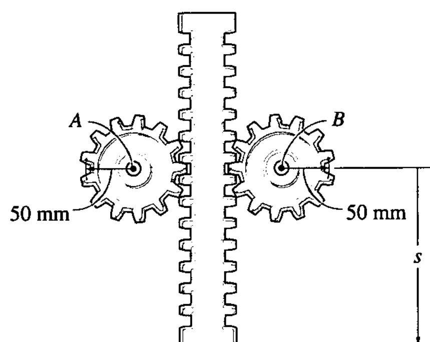
**R2.49.** A bobina tem massa de 60 kg e raio de giração $k_G = 0{,}3$ m. Se a bobina é solta a partir do repouso, determine quanto ela desce pelo plano liso antes de atingir uma velocidade angular de 6 rad/s. Despreze o atrito e a massa da corda que está enrolada no cilindro central.

**R2.50.** Resolva o Problema R2.49 considerando o plano áspero, com coeficiente de atrito cinético em $A$ igual a 0,2.



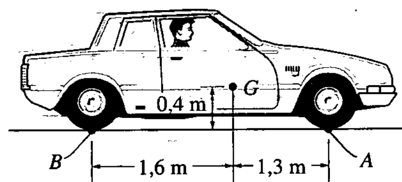

Problemas R2.49/50

**R2.51.** A cremalheira tem massa de 6 kg e cada engrenagem tem 4 kg e raio de giração $k = 30$ mm relativamente ao seu centro. Se a cremalheira está descendo inicialmente a 2 m/s, quando $s = 0$, determine a velocidade da cremalheira quando $s = 600$ mm. As engrenagens podem girar livremente em torno de seus centros, $A$ e $B$.




Problema R2.51

*R2.52. O carro tem massa de 1,5 t e centro de massa em $G$. Determine a aceleração máxima que o veículo pode ter se a tração é (a) traseira, (b) dianteira. Despreze a massa das rodas e suponha que as rodas que não tracionam possam rolar livremente. Suponha também que ocorra escorregamento das rodas de tração. O coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}3$.




Problema R2.52



# 20 Cinemática do Movimento Tridimensional de um Corpo Rígido



*O movimento tridimensional desses robôs industriais usados na fabricação de automóveis tem de ser especificado com exatidão.*

## Objetivos do Capítulo

- Analisar a cinemática de um corpo rígido submetido a uma rotação em torno de um ponto fixo e a um movimento plano geral.
- Fornecer uma análise do movimento relativo de um corpo rígido usando eixos em translação e rotação.

## 20.1 Rotação em torno de um Ponto Fixo

Quando um corpo rígido gira em torno de um ponto fixo, a distância $r$ desse ponto fixo a um ponto $P$ do corpo é a *mesma* para *qualquer posição* do corpo. Assim, a trajetória para qualquer ponto do corpo rígido ocorre em a uma *superfície esférica* de raio $r$ e centro no ponto fixo. Como o movimento ao longo da trajetória ocorre somente por meio de uma série de rotações realizadas durante um intervalo de tempo finito, procuraremos nos familiarizar primeiro com algumas propriedades de deslocamentos rotacionais.



*A lança pode girar para cima e para baixo; além disso, por estar articulada num ponto do eixo vertical em torno do qual ela gira, seu movimento se faz em torno de um ponto fixo.*

***Teorema de Euler.*** De acordo com o teorema de Euler, duas rotações em torno de diferentes eixos passando por um ponto são equivalentes a uma única rotação em torno de um eixo passando pelo mesmo ponto. Se forem aplicadas mais do que duas rotações, então elas poderão ser combinadas duas a duas, de forma que cada par poderá ser reduzido a uma única rotação.

***Rotações Finitas.*** Se as rotações usadas no teorema de Euler são finitas, torna-se importante que se mantenha a *ordem* segundo a qual elas são aplicadas. Isso ocorre porque rotações finitas *não* obedecem à lei da adição vetorial e, portanto, não podem ser classificadas como quantidades vetoriais. Para mostrar esse fato, consideremos as duas rotações finitas $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$ aplicadas ao bloco na Figura 20.1*a*. Cada rotação tem módulo de 90° e direção e sentido definidos pela regra da mão direita, como indicado pela seta. A orientação resultante do bloco é mostrada à direita. Quando essas duas rotações são aplicadas na ordem $\boldsymbol{\theta}_2$ +

$\boldsymbol{\theta}_1$, como se mostra na Figura 20.1*b*, a posição resultante do bloco não é a mesma daquela na Figura 20.1*a*. Conseqüentemente, *rotações finitas* não obedecem à lei da comutatividade na adição ($\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 \neq \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$) e, portanto, *não podem ser classificadas como vetores.* Se rotações menores, mas ainda finitas, fossem consideradas para ilustrar esse ponto — por exemplo, 10° em vez de 90° —, a orientação *resultante* do bloco, após cada combinação de rotações, também seria diferente; contudo, nesse caso, a diferença seria pequena.

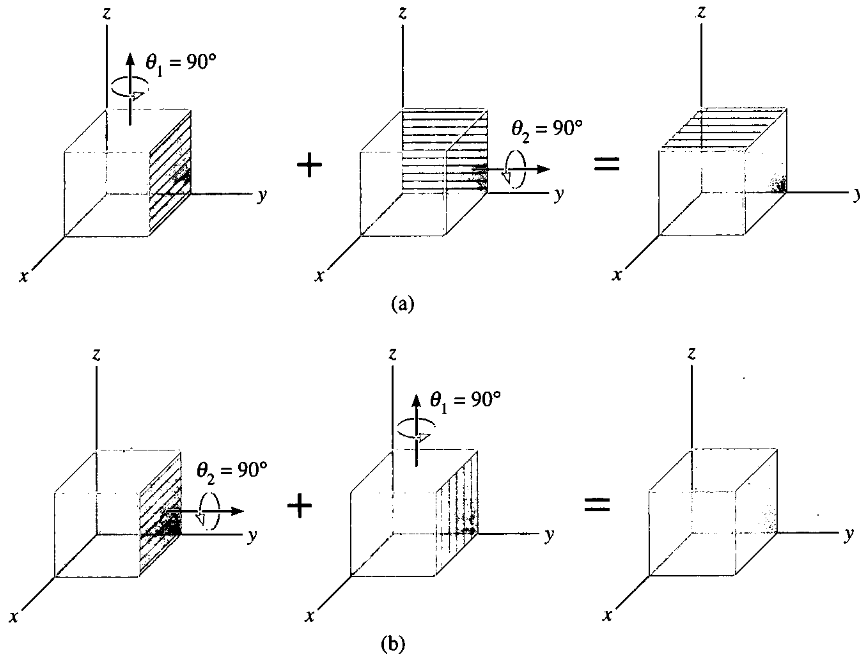



**Figura 20.1**

***Rotações Infinitesimais.*** Ao se definirem os movimentos angulares de um corpo submetido a um movimento tridimensional, somente rotações *infinitesimais* serão consideradas. *Tais rotações podem ser classificadas como vetores, pois elas podem ser somadas vetorialmente em qualquer ordem.* Para mostrar isso, consideremos o corpo rígido como uma esfera que pode girar em torno de seu ponto central $O$ mantido fixo (Figura 20.2*a*). Se impomos ao corpo duas rotações infinitesimais $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$, vemos que o ponto $P$ se move ao longo da trajetória $d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r}$, terminando em $P'$. Se as rotações tivessem ocorrido na ordem inversa, $d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$, então os deslocamentos de $P$ teriam sido $d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r}$. Como a multiplicação vetorial obedece à lei distributiva, por comparação, $(d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2) \times \mathbf{r} = (d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1) \times \mathbf{r}$. As rotações infinitesimais $d\boldsymbol{\theta}$ são vetores, pois essas quantidades têm módulo, direção e sentido para os quais a ordem da adição (vetorial) não é importante; isto é, $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2 = d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$. Além disso, como mostrado na Figura 20.2*a*, as duas rotações 'componentes' $d\boldsymbol{\theta}_1$ e $d\boldsymbol{\theta}_2$ equivalem a uma única rotação $d\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$ como assegurado pelo teorema de Euler.

***Velocidade Angular.*** Se o corpo sofre uma rotação $d\boldsymbol{\theta}$ em torno de um ponto fixo, a velocidade angular do corpo é definida pela derivada temporal

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}} \tag{20.1}$$

A linha que especifica a direção de $\boldsymbol{\omega}$, que é colinear com $d\boldsymbol{\theta}$, é denominada *eixo instantâneo de rotação* (Figura 20.2*b*). Em geral, esse eixo muda de direção de instante para instante. Como $d\boldsymbol{\theta}$ é um vetor, $\boldsymbol{\omega}$ também o é, portanto obedece

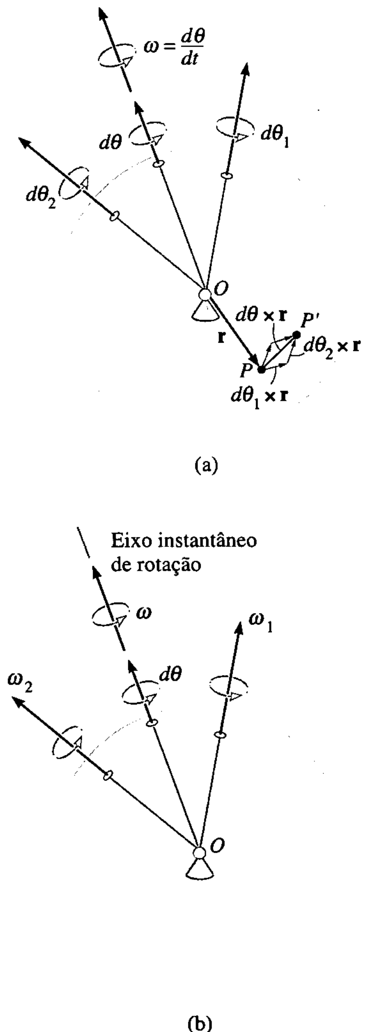



**Figura 20.2**

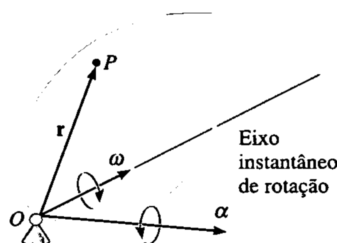



Figura 20.3

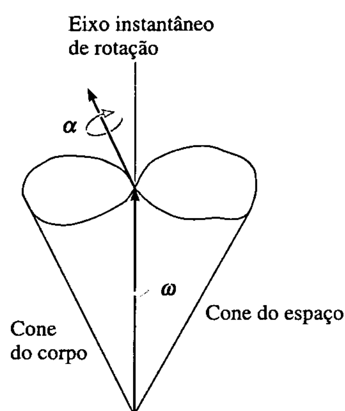



Figura 20.4

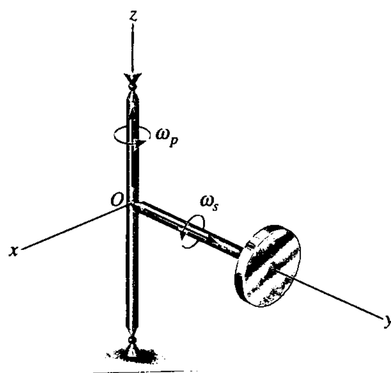



Figura 20.5

à adição vetorial. Segue da adição vetorial que se o corpo está sujeito a dois componentes de movimento angular, $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_2$, a velocidade angular resultante é $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

***Aceleração Angular.*** A aceleração angular do corpo é determinada pela derivada temporal da velocidade angular

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}} \quad (20.2)$$

Para um movimento em torno de um ponto fixo, $\boldsymbol{\alpha}$ deve levar em conta a variação de módulo, direção e sentido de $\boldsymbol{\omega}$, de modo que, em geral, $\boldsymbol{\alpha}$ não tem a direção do eixo instantâneo de rotação (Figura 20.3).

À medida que a direção do eixo instantâneo de rotação muda no espaço, o lugar geométrico dos pontos desse eixo gera um cone fixo, denominado *cone do espaço*. Se a mudança do eixo é vista em relação ao corpo em rotação, o lugar geométrico dos pontos do eixo gera um cone denominado *cone do corpo* (Figura 20.4). Em cada instante, esses dois cones se tangenciam ao longo do eixo instantâneo de rotação, e, durante o movimento, o cone do corpo aparenta rolar na superfície interna ou externa do cone (fixo) do espaço. Considerando as bases dos cones os lugares geométricos da extremidade do vetor $\boldsymbol{\omega}$, a aceleração $\boldsymbol{\alpha}$ deve ser tangente a essas trajetórias em cada instante, pois $\boldsymbol{\alpha}$ é a taxa de variação de $\boldsymbol{\omega}$ (Figura 20.4).

***Velocidade.*** Uma vez especificado $\boldsymbol{\omega}$, a velocidade de qualquer ponto $P$ do corpo que gira em torno de um ponto fixo pode ser determinada usando-se os mesmos métodos para um corpo que gira em torno de um eixo fixo (Seção 16.3). Logo, pelo produto vetorial,

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \quad (20.3)$$

Nessa equação, $r$ define a posição de $P$ medida a partir do ponto fixo $O$ (Figura 20.3).

***Aceleração.*** Se $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ são conhecidos num dado instante, a aceleração de qualquer ponto $P$ do corpo pode ser obtida por derivação da Equação 20.3, o que nos fornece

$$\boxed{\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})} \quad (20.4)$$

A forma dessa equação é a mesma daquela obtida na Seção 16.3, que define a aceleração de um ponto localizado num corpo submetido a uma rotação em torno de um eixo fixo.

## *20.2 Derivada Temporal de um Vetor Medido tanto num Sistema Fixo quanto num Sistema em Translação-Rotação

Em muitos tipos de problemas que envolvem o movimento de um corpo em torno de um ponto fixo, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é especificada em termos de seus componentes de movimento angular. Por exemplo, o disco na Figura 20.5 gira em torno do eixo horizontal $y$, com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_s$, enquanto esse eixo gira em torno do eixo $z$ (movimento de precessão), com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_P$. Logo, sua velocidade angular resultante é $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$. Se a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ desse corpo deve ser determinada, é mais fácil, algumas vezes, calcular a derivada temporal de $\boldsymbol{\omega}$, usando-se um sistema de coordenadas que tem *rotação* definida por um ou mais componentes

de $\boldsymbol{\omega}$.[1] Por essa razão e pelo uso que faremos futuramente deduziremos uma equação que relaciona a derivada de qualquer vetor **A** definida num sistema em translação e rotação com sua derivada temporal definida num sistema fixo.

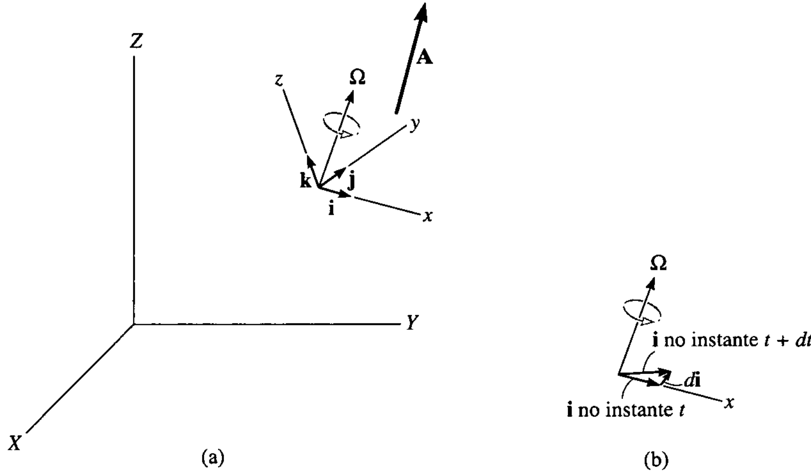



**Figura 20.6**

Consideremos que os eixos $x$, $y$, $z$ do sistema em movimento têm uma velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ medida num sistema fixo $X$, $Y$, $Z$ (Figura 20.6*a*). Na discussão a seguir, será conveniente expressar o vetor **A** em termos de seus componentes **i**, **j**, **k**, que definem as direções dos eixos móveis. Logo,

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

Em geral, a derivada temporal de **A** deve levar em conta a mudança do módulo, direção e sentido do vetor. Entretanto, se essa derivada é tomada *em relação ao sistema de referência em movimento*, somente uma variação nas coordenadas de **A** deve ser levada em conta, pois os vetores unitários **i**, **j** e **k** são constantes nesse sistema de referência. Logo,

$$(\dot{\mathbf{A}})_{xyz} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} \tag{20.5}$$

Quando se toma a derivada temporal de **A** *em relação ao sistema de referência fixo*, as *direções* de **i**, **j** e **k** mudam somente devido à rotação $\boldsymbol{\Omega}$ dos eixos e não devido à sua translação. Então, em geral,

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} + A_x\dot{\mathbf{i}} + A_y\dot{\mathbf{j}} + A_z\dot{\mathbf{k}}$$

Consideremos agora as derivadas temporais dos vetores unitários. Por exemplo, $\dot{\mathbf{i}} = d\mathbf{i}/dt$ representa somente mudança, em relação ao tempo, da direção de **i**, pois esse vetor tem um módulo constante igual a 1 unidade. Como mostra a Figura 20.6*b*, a variação, $d\mathbf{i}$, é *tangente à trajetória* descrita pela extremidade de **i**, à medida que o vetor se move em virtude da rotação $\boldsymbol{\Omega}$. Levando em conta o módulo e a direção de $d\mathbf{i}$, podemos expressar a derivada temporal de **i** em termos do produto vetorial, $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i}$. Em geral,

$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}$$

[1] No caso de um disco em rotação (Figura 20.5), os eixos $x$, $y$, $z$ podem ter velocidade $\boldsymbol{\omega}_P$.

Essas formulações também foram desenvolvidas na Seção 16.8, onde consideramos o movimento plano dos eixos. Substituindo os resultados na equação anterior e usando a Equação 20.5, temos

$$\boxed{\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}} \qquad (20.6)$$

Esse resultado é bastante importante, e será usado na Seção 20.4 e no Capítulo 21. Ele estabelece que a derivada temporal de qualquer vetor **A** observado do referencial fixo $X$, $Y$, $Z$ é igual à taxa temporal de mudança do vetor **A** observado do referencial em translação-rotação $x$, $y$, $z$ (Equação 29.5), mais $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$, a mudança de **A** provocada pela rotação do sistema $x$, $y$, $z$. Como resultado, a Equação 20.6 deverá ser usada sempre que $\boldsymbol{\Omega}$ produzir uma mudança na direção de **A**, vista do referencial $X$, $Y$, $Z$. Se essa mudança não ocorrer, isto é, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, então $\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz}$, e a taxa de variação de **A** observada em ambos os sistemas de referência será a *mesma*.

## EXEMPLO 20.1

O disco mostrado na Figura 20.7*a* está girando em torno de seu eixo horizontal com uma velocidade angular constante $\omega_s = 3$ rad/s, enquanto a plataforma horizontal sobre a qual o disco está montado está girando em torno do eixo vertical a uma taxa constante $\omega_p = 1$ rad/s. Determine a aceleração angular do disco e a velocidade e a aceleração de seu ponto $A$, na posição mostrada na figura.

### SOLUÇÃO

O ponto $O$ representa um ponto de rotação fixo para o disco, se considerarmos uma extensão hipotética do disco até esse ponto. Para obter a velocidade e a aceleração do ponto $A$, é necessário determinar a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ resultantes para o disco, pois esses vetores são usados nas equações 20.3 e 20.4.

***Velocidade Angular.*** A velocidade angular, que é medida de $X$, $Y$, $Z$, é simplesmente a soma vetorial dos dois movimentos componentes. Assim,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$$

À primeira vista, pode não parecer que o disco esteja realmente girando com essa velocidade angular, pois em geral é mais difícil imaginar o resultante de movimentos angulares do que o de movimentos lineares. Para compreender melhor o movimento angular, substitua o disco por um cone (cone do corpo), que rola sobre o cone do espaço que é estacionário (Figura 20.7*b*). A linha de contato dos cones é o eixo instantâneo de rotação. Esse eixo define a direção da velocidade angular resultante $\boldsymbol{\omega}$, que tem componentes $\boldsymbol{\omega}_s$ e $\boldsymbol{\omega}_P$.

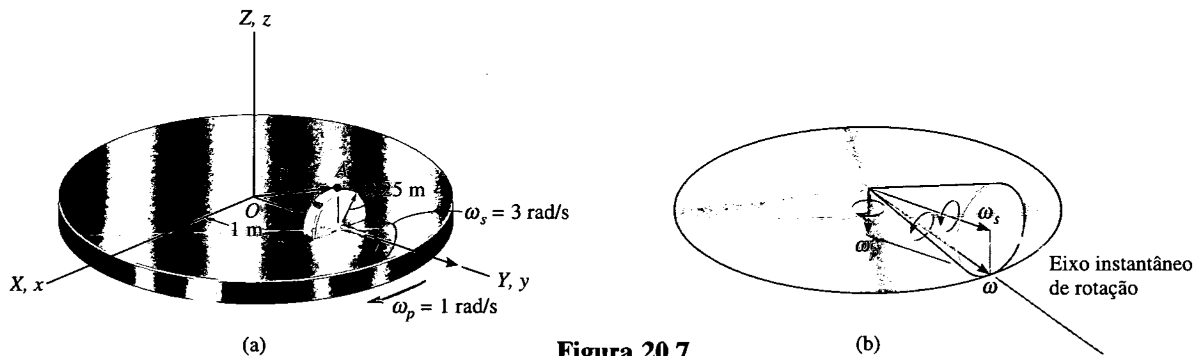



Figura 20.7

*Aceleração Angular.* Como o módulo de $\boldsymbol{\omega}$ é constante, somente uma mudança de sua direção, vista do referencial fixo, cria a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ do disco. Uma forma de obter $\boldsymbol{\alpha}$ é calcular a derivada temporal de *cada um dos componentes* de $\boldsymbol{\omega}$ usando a Equação 20.6. Consideremos a situação mostrada na Figura 20.7*a*, em que, num dado instante, o sistema $X$, $Y$, $Z$ e um outro $x$, $y$, $z$ em rotação estão coincidindo. Se ao sistema $x, y, z$ atribui-se uma velocidade angular $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_P = \{-1\mathbf{k}\}$ rad/s, então $\boldsymbol{\omega}_s$ estará sempre dirigido ao longo do eixo $y$ (não $Y$), e a taxa temporal de variação de $\boldsymbol{\omega}_s$ *vista do sistema* $x$, $y$, $z$ *é nula*, isto é, $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} = \mathbf{0}$ (o módulo e a direção de $\boldsymbol{\omega}_s$ são constantes). Logo, pela Equação 20.6,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0} + (-1\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j}) = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

Pela mesma escolha da rotação de eixos, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$, ou, mesmo com $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, a derivada temporal $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} = \mathbf{0}$, pois $\boldsymbol{\omega}_p$ tem módulo e direção constantes. Logo,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

A aceleração angular do disco é, portanto,

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

*Velocidade e Aceleração.* Como $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ foram determinados, a velocidade e a aceleração do ponto $A$ podem ser calculadas por meio das equações 20.3 e 20.4. Observando que $\mathbf{r}_A = \{1\mathbf{j} + 0{,}25\mathbf{k}\}$ m (Figura 20.7*a*), temos

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A = (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0{,}25\mathbf{k}) = \{1{,}75\mathbf{i}\} \text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \\ &= (3\mathbf{i}) \times (1\mathbf{j} + 0{,}25\mathbf{k}) + (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times [(3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0{,}25\mathbf{k})] \\ &= \{-2{,}50\mathbf{j} - 2{,}25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}\end{aligned}$$

## EXEMPLO 20.2

No instante em que $\theta = 60°$, o pião na Figura 20.8 apresenta três componentes de movimento angular orientados como se mostra na figura e com os seguintes módulos:

*rotação*: $\omega_s = 10$ rad/s, aumentando a uma taxa de 6 rad/s$^2$
*nutação*: $\omega_n = 3$ rad/s, aumentando a uma taxa de 2 rad/s$^2$
*precessão*: $\omega_p = 5$ rad/s, aumentando a uma taxa de 4 rad/s$^2$

Determine a velocidade e a aceleração angulares do pião.

## SOLUÇÃO

*Velocidade Angular.* O pião está girando em torno do ponto fixo $O$. Se os referenciais fixo e em rotação coincidem no instante considerado, então a velocidade angular pode ser expressa em termos de componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ apropriados para o sistema $x$, $y$, $z$; isto é,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= -\omega_n\mathbf{i} + \omega_s \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + (\omega_p + \omega_s\cos\theta)\mathbf{k} \\ &= -3\mathbf{i} + 10 \operatorname{sen} 60°\mathbf{j} + (5 + 10\cos 60°)\mathbf{k} \\ &= \{-3\mathbf{i} + 8{,}66\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\} \text{ rad/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}\end{aligned}$$

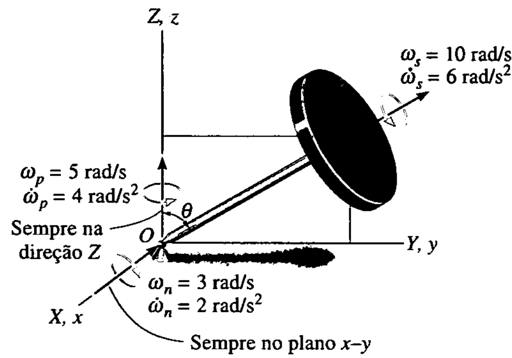



**Figura 20.8**

***Aceleração Angular.*** Como na solução do Exemplo 20.1, a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ será determinada investigando-se separadamente a taxa temporal de variação de *cada componente da velocidade angular*, observada do referencial fixo $X, Y, Z$. Escolheremos uma rotação $\boldsymbol{\Omega}$ para o referencial $x, y, z$ de modo que o componente de $\boldsymbol{\omega}$ que está sendo considerado tenha *direção constante* quando observado de $x, y, z$.

Um exame cuidadoso do movimento do pião revela que $\boldsymbol{\omega}_s$ tem *direção constante* relativamente a $x, y, z$ se esses eixos giram com $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p$. Assim:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}}_s &= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + (\boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p) \times \boldsymbol{\omega}_s \\ &= (6 \text{ sen } 60°\mathbf{j}+6 \cos 60°\mathbf{k})+(-3\mathbf{i}+5\mathbf{k})\times(10 \text{ sen } 60°\mathbf{j}+10 \cos 60°\mathbf{k}) \\ &= \{-43{,}30\mathbf{i} + 20{,}20\mathbf{j} - 22{,}98\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

Como $\boldsymbol{\omega}_n$ está *sempre* no plano fixo $X$–$Y$, sua direção será constante se o movimento for visto do sistema $x, y, z$ girando com $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$ (não $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$). Assim:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_n)_{xyz}+\boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_n = -2\mathbf{i}+(5\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i}) = \{-2\mathbf{i}-15\mathbf{j}\} \text{ rad/s}^2$$

Finalmente, o componente $\boldsymbol{\omega}_p$ está sempre orientado ao longo do eixo $Z$, de modo que não é necessário pensar em $x, y, z$ girando, isto é, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Expressando os dados em termos dos componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, temos, portanto,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \mathbf{0} \times \boldsymbol{\omega}_p = \{4\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$

Logo, a aceleração angular do pião é

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{-45{,}3\mathbf{i} + 5{,}20\mathbf{j} - 19{,}0\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2 \quad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## 20.3 MOVIMENTO GERAL

A Figura 20.9 mostra um corpo rígido submetido a um movimento geral em três dimensões para o qual a velocidade angular é $\boldsymbol{\omega}$ e a aceleração angular é $\boldsymbol{\alpha}$. Se o movimento do ponto $A$ é conhecido, com velocidade $\mathbf{v}_A$ e aceleração $\mathbf{a}_A$, o movimento de qualquer outro ponto $B$ pode ser determinado por meio de uma análise de movimento relativo. Nesta seção, usaremos um *sistema de coordenadas em translação* para definir o movimento relativo. Na seção seguinte, consideraremos um referencial em rotação e translação.

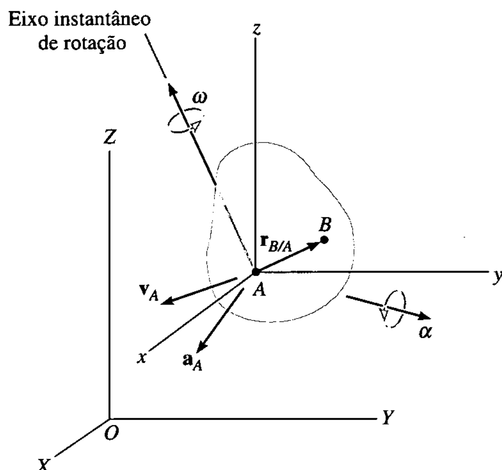



**Figura 20.9**

Se a origem do sistema $x, y, z$ em translação ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$) localiza-se no 'ponto de base' $A$, então, em qualquer instante, o movimento do corpo pode ser considerado uma translação instantânea, com velocidade $\mathbf{v}_A$ e aceleração $\mathbf{a}_A$, somada com uma rotação em torno de um eixo instantâneo passando pelo ponto de base $A$. Como o corpo é rígido, o movimento do ponto $B$ medido por um observador localizado em $A$ é o mesmo que *o movimento do corpo em relação a um ponto fixo*. Esse movimento relativo ocorre em torno do eixo instantâneo de rotação e é definido por $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ (Equação 2.3), e $\mathbf{a}_{B/A} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ (Equação 20.4). Para eixos em translação os movimentos relativos estão relacionados com os movimentos absolutos por $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ e $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ (equações 16.15 e 16.17), de modo que a velocidade e a aceleração absolutas do ponto $B$ podem ser determinadas pelas equações

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}} \qquad (20.7)$$

e

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})} \qquad (20.8)$$

Essas equações são idênticas àquelas que descrevem o movimento plano geral de um corpo rígido (equações 16.16 e 16.18). Entretanto, há uma dificuldade na aplicação ao movimento tridimensional, pois $\boldsymbol{\alpha}$ mede variações *tanto* em módulo *quanto* em direção de $\boldsymbol{\omega}$. (Lembremos que, para o movimento plano geral, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\omega}$ são sempre paralelos ou perpendiculares ao plano do movimento e, portanto, $\boldsymbol{\alpha}$ mede somente mudanças do módulo de $\boldsymbol{\omega}$.) Em alguns problemas, os vínculos ou ligações de um corpo exigirão que sejam definidas as direções dos movimentos angulares ou das trajetórias dos pontos do corpo. Como será mostrado no exemplo a seguir, essa informação é útil para a obtenção de alguns termos das equações anteriores.

## EXEMPLO 20.3

Uma das extremidades da barra rígida $CD$ mostrada na Figura 20.10$a$ desliza ao longo do elemento horizontal $AB$, enquanto a outra desliza ao longo do elemento vertical $EF$. Se o cursor em $C$ se move para $B$ com uma velocidade de 3 m/s, determine a velocidade do cursor em $D$ e a velocidade angular da

barra na situação mostrada na figura. A barra está ligada aos cursores por meio de juntas esféricas.

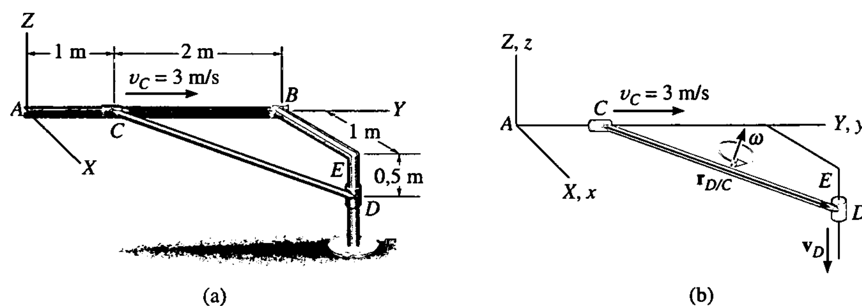



**Figura 20.10**

## SOLUÇÃO

A barra *CD* tem movimento geral. Por quê? A velocidade do ponto *D* na barra relaciona-se com a velocidade do ponto *C* pela equação

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{D/C}$$

Tomando o sistema de referência fixo coincidente com o sistema em translação, na situação considerada (Figura 20.10*b*), temos

$$\mathbf{v}_D = -v_D\mathbf{k} \qquad \mathbf{v}_C = \{3\mathbf{j}\}\text{ m/s}$$

$$\mathbf{r}_{D/C} = \{1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0{,}5\mathbf{k}\}\text{ m} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$

Substituindo essas quantidades na equação anterior, obtemos

$$-v_D\mathbf{k} = 3\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 2 & -0{,}5 \end{vmatrix}$$

Expandindo o determinante e igualando os respectivos componentes **i**, **j**, **k**, temos

$$-0{,}5\omega_y - 2\omega_z = 0 \qquad (1)$$

$$0{,}5\omega_x + 1\omega_z + 3 = 0 \qquad (2)$$

$$2\omega_x - 1\omega_y + v_D = 0 \qquad (3)$$

Essas equações contêm quatro incógnitas.[2] Uma quarta equação poderá ser escrita se especificarmos a direção de $\boldsymbol{\omega}$. Em particular, qualquer componente de $\boldsymbol{\omega}$ na direção do eixo da barra não tem efeito sobre os cursores. Isso ocorre porque a barra *pode girar livremente* em torno de seu eixo. Assim, se a velocidade $\boldsymbol{\omega}$ for tomada perpendicularmente ao eixo da barra, então ela deverá apresentar um valor que satisfaça essas equações. Garante-se a perpendicularidade ao impor que o produto escalar de $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{r}_{D/C}$ seja nulo (veja a Equação C.14 do Apêndice C). Logo:

[2] Embora haja quatro incógnitas no sistema de três equações, é possível determinar o módulo de $\mathbf{v}_D$. Por exemplo, resolva as equações 1 e 2 para $\omega_x$ e $\omega_y$ em termos de $\omega_z$ e substitua o resultado na Equação 3. Observe que $\omega_z$ *será cancelado*, permitindo uma solução para $v_D$.

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{D/C} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0{,}5\mathbf{k}) = 0$$

$$1\omega_x + 2\omega_y - 0{,}5\omega_z = 0 \qquad (4)$$

Resolvendo o sistema de equações 1 a 4 obtemos

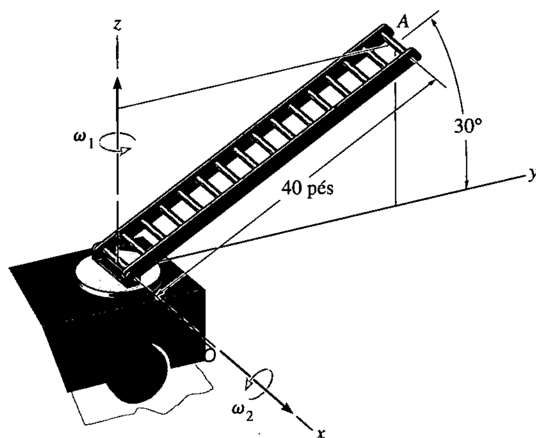
$$\omega_x = -4{,}86 \text{ rad/s} \quad \omega_y = 2{,}29 \text{ rad/s} \quad \omega_z = -0{,}571 \text{ rad/s}$$ ***Resposta***

$$v_D = 12{,}0 \text{ m/s} \downarrow$$ ***Resposta***

# PROBLEMAS

**20.1.** A escada do caminhão de bombeiros gira em torno do eixo $z$ com uma velocidade angular $\omega_1 = 0{,}15$ rad/s e está aumentando a 0,8 rad/s$^2$. No mesmo instante, ela está girando para cima a uma taxa constante $\omega_2 = 0{,}6$ rad/s. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $A$, localizado no topo da escada, nesse instante.

**20.2.** A escada do caminhão de bombeiros gira em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_1 = 0{,}15$ rad/s, e está aumentando a 0,2 rad/s$^2$. No mesmo instante, ela gira para cima a uma taxa $\omega_2 = 0{,}6$ rad/s, que está aumentando a 0,4 rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $A$ localizado no topo da escada, nesse instante.

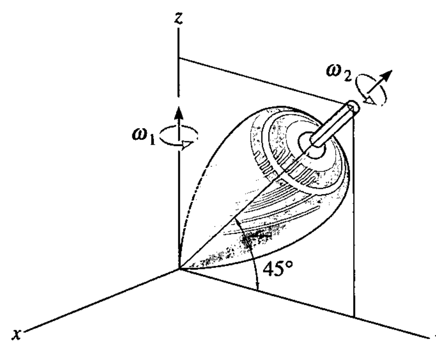


**Problemas 20.1/2**

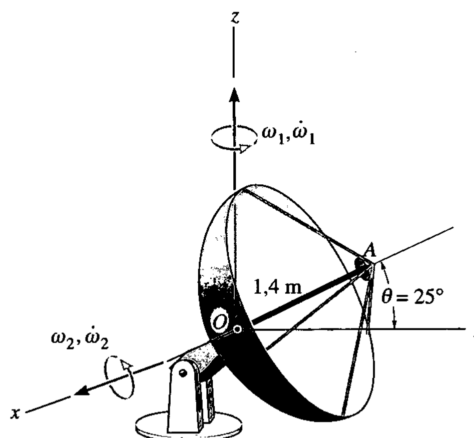
**20.3.** Num dado instante, o pião está girando em torno do eixo $z$ (veja a figura) com velocidade angular $\omega_1 = 0{,}6$ rad/s, enquanto gira em torno de seu eixo com velocidade angular $\omega_2 = 8$ rad/s. Determine a velocidade e a aceleração angulares do pião, nesse instante. Expresse o resultado na forma de vetores cartesianos.

***20.4.** Num dado instante, a antena do radar tem movimento angular definido por $\omega_1 = 6$ rad/s e $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$ em torno do eixo $z$. Nesse mesmo instante, $\theta = 25°$ e o movimento angular em torno do eixo $x$ é definido por $\omega_2 = 2$ rad/s e $\dot{\omega}_2 = 1{,}5$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração de $A$ nesse instante.

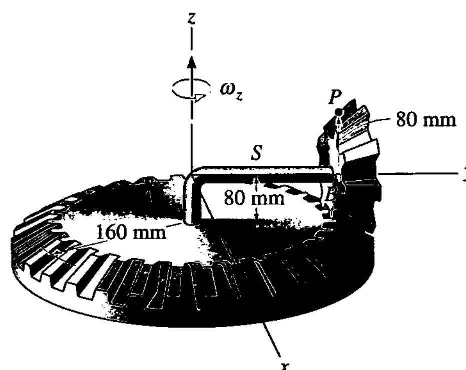
**20.5.** A engrenagem $A$ é fixa, enquanto a engrenagem $B$ pode girar livremente em torno do eixo $S$. Se o eixo está girando em torno do eixo $z$ com velocidade $\omega_z = 5$ rad/s e está aumentando a 2 rad/s$^2$, determine a velocidade e a aceleração do ponto $C$, na situação mostrada na figura. A base da engrenagem $B$ está contida num plano vertical.



**Problema 20.3**

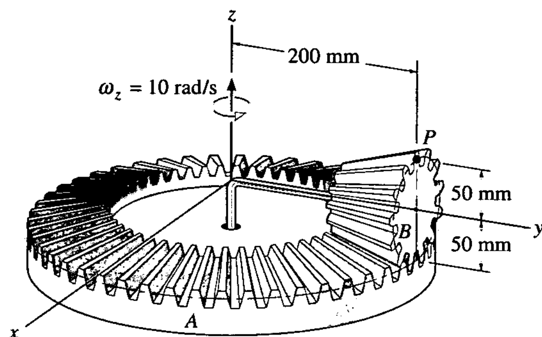


**Problema 20.4**



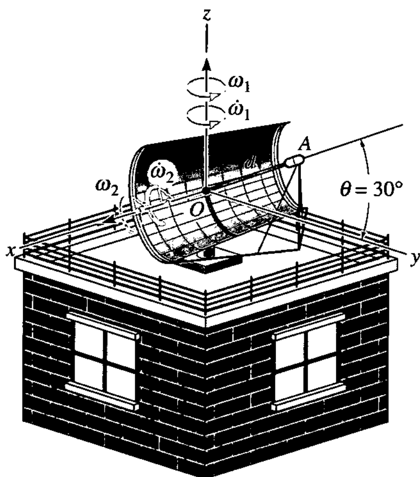
**Problema 20.5**

**20.6.** A engrenagem $B$ está ligada ao eixo girante, e a engrenagem $A$ é fixa. Se o eixo está girando a uma taxa constante $\omega_z = 10$ rad/s, em relação ao eixo $z$, determine os módulos da velocidade e da aceleração angulares da engrenagem $B$. Determine também os módulos da velocidade e da aceleração do ponto $P$.




**Problema 20.6**

**20.7.** Num dado instante, a antena tem movimento angular definido por $\omega_1 = 3$ rad/s e $\dot{\omega}_1 = 2$ rad/s$^2$, em torno do eixo $z$. Nesse mesmo instante, $\theta = 30°$ e o movimento angular em torno do eixo $x$ é definido por $\omega_2 = 1{,}5$ rad/s e $\dot{\omega}_2 = 4$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração de $A$ nesse instante. A distância de $A$ a $O$ é $d = 3$ pés.

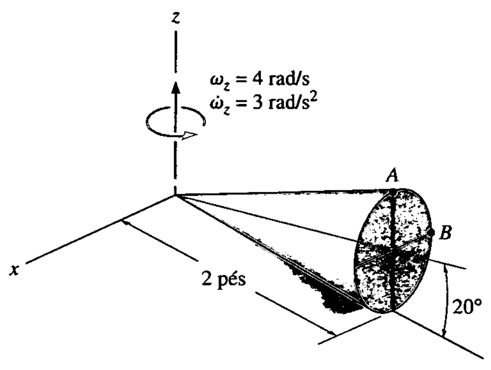



**Problema 20.7**

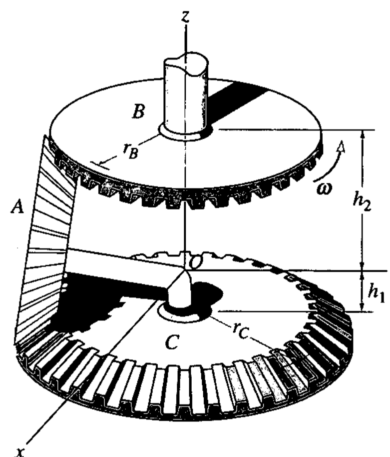
***20.8.** O cone rola sem escorregar, de modo que, num dado instante, $\omega_z = 4$ rad/s e $\dot{\omega}_z = 3$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $A$.

**20.9.** O cone rola sem escorregar, de modo que, num dado instante, $\omega_z = 4$ rad/s e $\dot{\omega}_z = 3$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $B$.

**20.10.** A engrenagem superior $B$ gira a uma taxa constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine a velocidade angular da engrenagem $A$, que pode girar livremente em torno do eixo e rola sobre a engrenagem inferior fixa $C$.

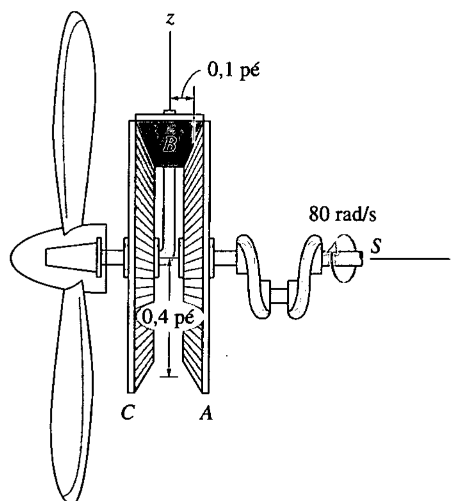



**Problemas 20.8/9**




**Problema 20.10**

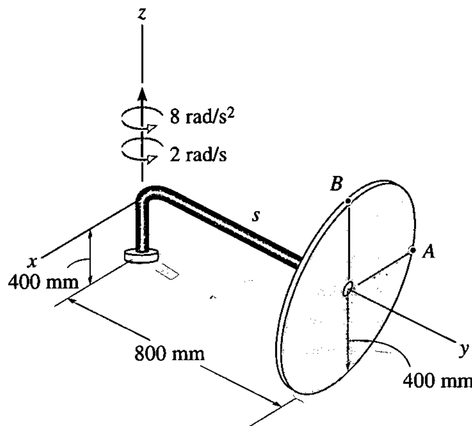
**20.11.** A engrenagem $A$ está fixa na manivela $S$, $C$ é fixa e $B$ pode girar livremente. A manivela gira a 80 rad/s em torno de seu eixo. Determine os módulos da velocidade angular da hélice e da aceleração angular da engrenagem $B$.




**Problema 20.11**

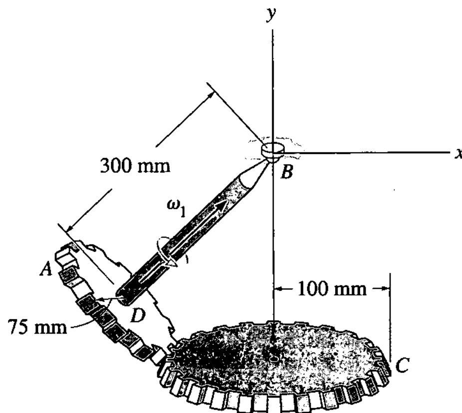
***20.12.** O disco $B$ pode girar livremente no eixo $S$. Se o eixo está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_z$

= 2 rad/s que aumenta a 8 rad/s², determine a velocidade e a aceleração do ponto $A$, na situação mostrada na figura.




Problema 20.12

**20.13.** O eixo $BD$ está ligado a uma junta esférica em $B$ e preso na outra extremidade a uma engrenagem $A$. A engrenagem está engranzada com uma outra fixa $C$. Se o eixo e a engrenagem inclinada $A$ estão *girando* com velocidade angular constante $\omega_1 = 8$ rad/s, como indicado na figura, determine a velocidade e a aceleração angulares da engrenagem $A$.

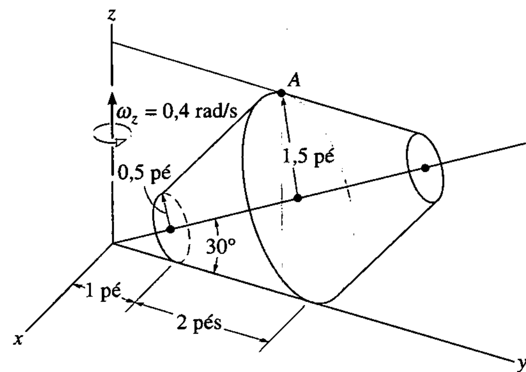



Problema 20.13

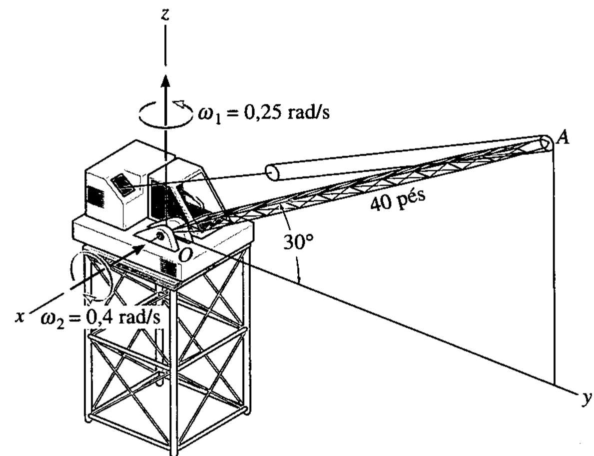
**20.14.** A peça cônica apoiada no plano horizontal gira em torno do eixo $z$ a uma taxa constante $\omega_z = 0,4$ rad/s, sem escorregar. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $A$.

**20.15.** Num dado instante (veja a figura), o guindaste está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_1 = 0,25$ rad/s, que aumenta a 0,6 rad/s². A lança $OA$ está girando para baixo com velocidade angular $\omega_2 = 0,4$ rad/s, que aumenta a 0,8 rad/s². Determine a velocidade da lança nesse instante.

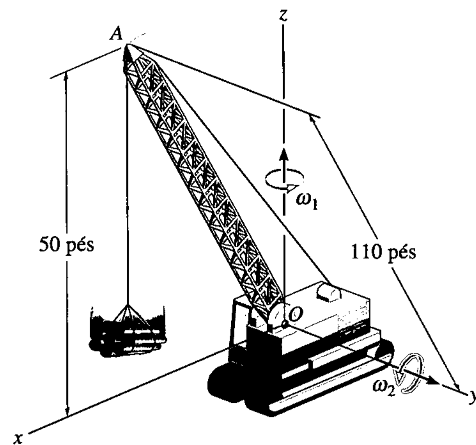
***20.16.** A lança $OA$ do guindaste de construção está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular constante $\omega_1 = 0,15$ rad/s, enquanto gira para baixo com velocidade angular constante $\omega_2 = 0,2$ rad/s. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $A$ localizado na ponta da lança, na situação mostrada na figura.




Problema 20.14



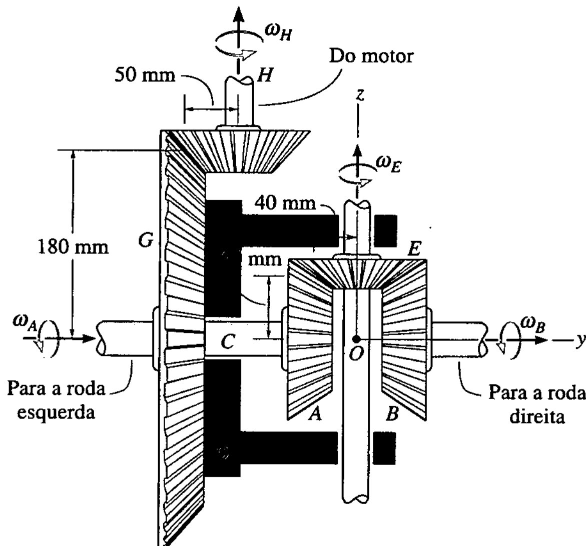

Problema 20.15




Problema 20.16

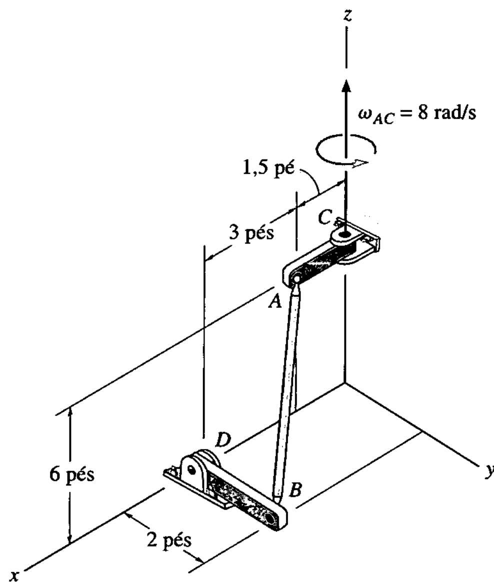
**20.17.** O diferencial de um automóvel permite que as duas rodas traseiras girem com velocidades diferentes, quando o veículo se desloca numa curva. Para essa operação, os eixos traseiros são presos às rodas em uma extremidade e às engrenagens cônicas $A$ e $B$ na outra. A estrutura $D$ do diferencial é colocada sobre o eixo esquerdo, mas pode girar

em torno de $C$ independentemente do eixo. A estrutura suporta o pinhão $E$ num eixo e está engranzada com as engrenagens $A$ e $B$. Finalmente, uma engrenagem $G$ é *fixada* na estrutura do diferencial de modo que esta última gira com a engrenagem $G$ acionada pelo pinhão $H$. A estrutura do diferencial e a engrenagem $G$ podem girar livremente em torno do eixo da roda esquerda. Se o pinhão motor está girando a $\omega_H = 100$ rad/s e o pinhão $E$ está girando em torno de seu eixo a uma velocidade angular $\omega_E = 30$ rad/s, determine a velocidade, $\omega_A$ e $\omega_B$, de cada eixo.




**Problema 20.17**

**20.18.** A barra $AB$ está ligada aos outros elementos por meio de juntas esféricas. Se $AC$ está girando com velocidade angular constante de 8 rad/s em torno do pino em $C$, determine a velocidade angular de $BD$ na situação mostrada na figura.

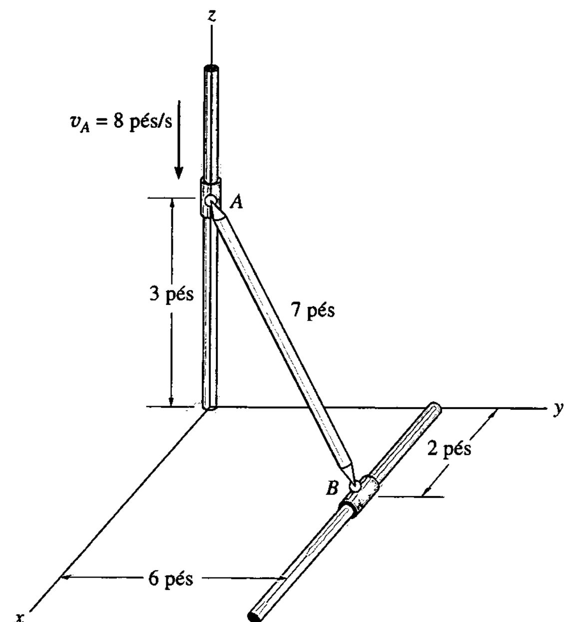



**Problemas 20.18/19**

**20.19.** A barra $AB$ está ligada aos outros elementos por meio de juntas esféricas. Se $AC$ está girando em torno do pino em $C$ com velocidade angular de 8 rad/s e tem aceleração angular de 6 rad/s$^2$, determine a velocidade e a aceleração angulares de $BD$ na situação mostrada na figura.

***20.20.** Se a barra está ligada por meio de juntas esféricas aos cursores lisos $A$ e $B$, determine a velocidade de $B$ na situação mostrada na figura se $A$ está se movendo para baixo com velocidade constante $v_A = 8$ pés/s. Determine também a velocidade angular da barra, considerando a velocidade angular perpendicular à barra.

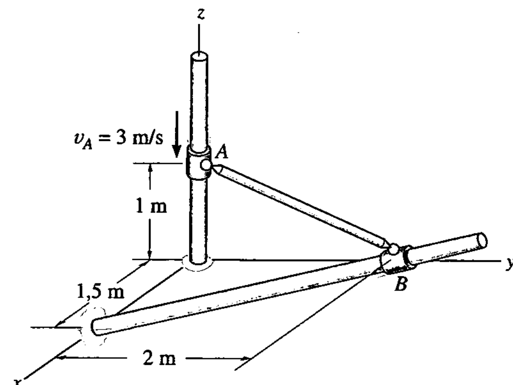
**20.21.** Se o colar em $A$ está se movendo para baixo com aceleração $\mathbf{a}_A = \{-5\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$ no instante em que sua velocidade é $v_A = 8$ pés/s, determine a aceleração do cursor $B$, nesse instante.




**Problemas 20.20/21**

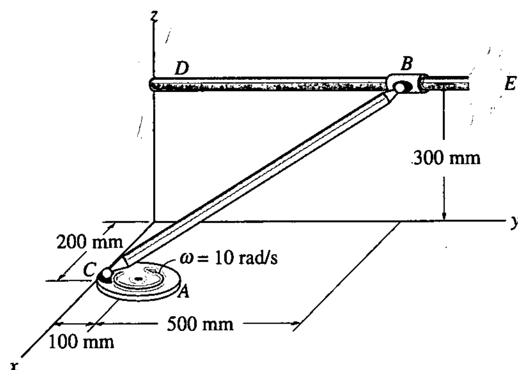
**20.22.** A barra $AB$ está ligada a colares por meio de juntas esféricas. Se o colar $A$ tem velocidade $v_A = 3$ m/s, determine a velocidade do colar $B$, na situação mostrada na figura.

**20.23.** Se o colar em $A$ tem aceleração $\mathbf{a}_A = \{-2\mathbf{k}\}$ m/s$^2$ no instante em que sua velocidade é $v_A = 3$ m/s, determine o módulo da aceleração do colar em $B$ nesse instante.



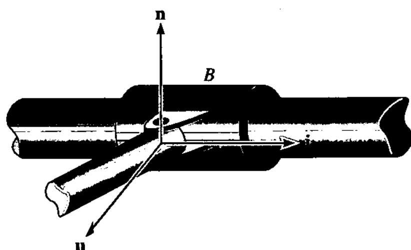

**Problemas 20.22/23**

**20.24.** A barra $AB$ está presa a colares por meio de juntas esféricas. Se o colar $A$ tem velocidade $v_A = 5$ pés/s, determine a velocidade angular da barra e a velocidade do colar $B$ na situação mostrada na figura. Suponha que a velocidade angular seja perpendicular à barra.



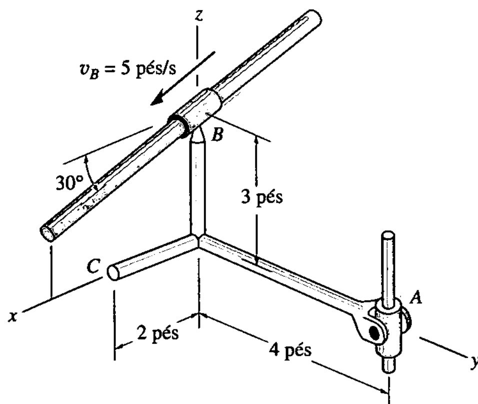

**Problema 20.24**

**20.25.** Resolva o Problema 20.24 supondo que a ligação em $B$ é feita por um pino, em vez de uma junta esférica, como se mostra na figura. *Dica:* o vínculo permite rotação da barra tanto em relação ao eixo da barra $DE$ (direção $\mathbf{j}$) quanto em relação ao eixo do pino (direção $\mathbf{n}$). Como não há componente rotacional na direção de $\mathbf{u}$, isto é, perpendicular a $\mathbf{n}$ e $\mathbf{j}$, onde $\mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}$, uma equação adicional para a solução do problema pode ser determinada por $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0$. O vetor $\mathbf{n}$ tem a mesma direção de $\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{D/C}$.




**Problema 20.25**

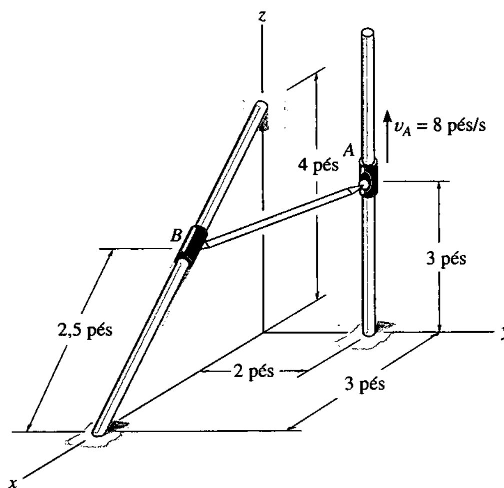
**20.26.** O conjunto de barras é preso por uma junta esférica em $B$ e por uma manilha em $A$. Se o colar em $B$ se move no plano $x$–$z$ com velocidade $v_B = 5$ pés/s, determine a velocidade dos pontos $A$ e $C$ do conjunto, na situação mostrada na figura. *Dica:* veja o Problema 20.25.




**Problema 20.26**

**20.27.** As extremidades da barra $AB$ estão presas por meio de juntas esféricas. Se o cursor $A$ se move para cima com velocidade de 8 pés/s, determine a velocidade angular da barra e a velocidade escalar de $B$, na situação mostrada na figura. Suponha que a velocidade angular seja perpendicular a $AB$.

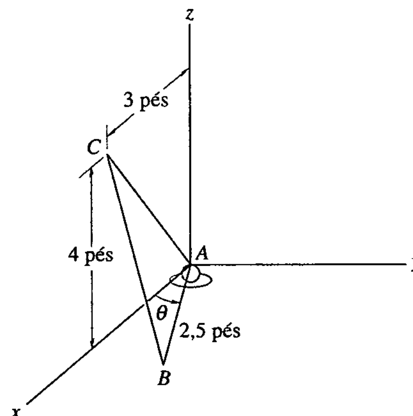
***20.28.** As extremidades da barra $AB$ estão presas por meio de juntas esféricas. Se o cursor $A$ se move para cima com aceleração $a_A = 4$ pés/s$^2$, determine a aceleração de $AB$ e o módulo de aceleração de $B$. Suponha que a aceleração angular de $AB$ seja perpendicular à barra.




**Problemas 20.27/28**

**20.29.** A placa triangular $ABC$ é presa em $A$ por uma junta esférica e se apóia no plano $x$–$y$ em $C$. O lado $AB$ está contido no plano $x$–$y$. No instante em que $\theta = 60°$, $\dot{\theta} = 2$ rad/s e as coordenadas do ponto $C$ estão na figura. Determine a velocidade angular da placa e a velocidade do ponto $C$ nesse instante.

**20.30.** A placa triangular $ABC$ é presa em $A$ por uma junta esférica e se apóia no plano $x$–$y$ em $C$. O lado $AB$ está contido no plano $x$–$y$. No instante em que $\theta = 60°$, $\dot{\theta} = 2$ rad/s, $\ddot{\theta} = 3$ rad/s$^2$, e as coordenadas do ponto $C$ estão na figura. Determine a aceleração angular da placa e a velocidade do ponto $C$ nesse instante.




**Problemas 20.29/30**

# *20.4 ANÁLISE DO MOVIMENTO RELATIVO USANDO EIXOS EM TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO

O modo mais geral de se analisar o movimento tridimensional de um corpo rígido exige o uso de um sistema de eixos $x$, $y$, $z$ que translada e gira relativamente a um segundo sistema $X$, $Y$, $Z$. Essa análise fornece também um meio para a determinação dos movimentos de dois pontos $A$ e $B$ localizados em elementos separados em um mecanismo, assim como para a determinação do movimento de um ponto material relativamente a outro ponto, quando um ou ambos estão se deslocando em *trajetórias circulares*.

Como se mostra na Figura 20.11, a localização dos pontos $A$ e $B$ é especificada relativamente a um referencial $X$, $Y$, $Z$ pelos vetores de posição $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$. O ponto de base $A$ representa a origem do sistema $x$, $y$, $z$, que tem movimento de translação e rotação em relação ao sistema $X$, $Y$, $Z$. Num dado instante, a velocidade e a aceleração do ponto $A$ são $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{a}_A$, respectivamente, e a velocidade e a aceleração angulares do sistema $x, y, z$ são $\mathbf{\Omega}$ e $\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$, respectivamente. Todos esses vetores são medidos em relação ao sistema $X$, $Y$, $Z$, embora eles possam ser expressos na forma de componentes cartesianos em qualquer um dos sistemas de eixos.

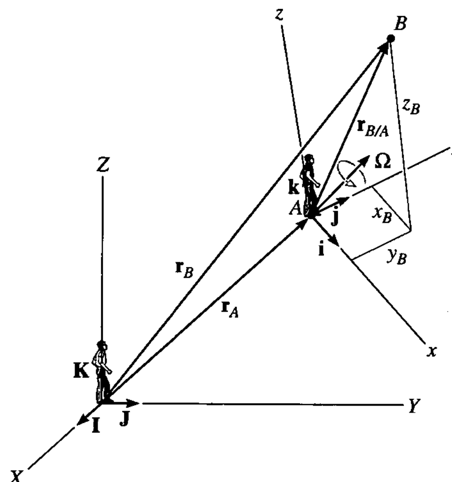



**Figura 20.11**

***Posição.*** Se a posição de '$B$ em relação a $A$' é especificada pelo vetor de posição relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ (Figura 20.11), então, por adição vetorial,

$$\boxed{\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}} \tag{20.9}$$

onde

$\mathbf{r}_B$ = posição de $B$

$\mathbf{r}_A$ = posição da origem $A$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = vetor de posição de '$B$ em relação a $A$'

***Velocidade.*** A velocidade do ponto $B$ medida no referencial $X$, $Y$, $Z$ é obtida tomando-se a derivada temporal da Equação 20.9, o que resulta em

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A}$$

Os primeiros dois termos representam $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_A$. O último termo é calculado com a aplicação da Equação 20.6, uma vez que $\mathbf{r}_{B/A}$ é medido entre dois pontos no referencial girante. Logo:

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/A} = (\dot{\mathbf{r}}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (20.10)$$

Nessa equação, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ é a velocidade de $B$ em relação a $A$, medida no referencial $x$, $y$, $z$. Logo:

$$\boxed{\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}} \qquad (20.11)$$

onde

$\mathbf{v}_B$ = velocidade de $B$
$\mathbf{v}_A$ = velocidade da origem $A$ do sistema $x, y, z$
$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidade de '$B$ em relação a $A$', medida por um observador fixo no sistema em rotação $x, y, z$
$\mathbf{\Omega}$ = velocidade angular do sistema de referência $x, y, z$
$\mathbf{r}_{B/A}$ = vetor de posição de '$B$ em relação a $A$'

***Aceleração.*** A aceleração do ponto $B$ medida de $X$, $Y$, $Z$ é determinada ao se calcular a derivada temporal da Equação 20.11, do que resulta

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{B/A} + \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

As derivadas temporais definidas no primeiro e segundo termos representam $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_B$, respectivamente. O quarto termo é calculado usando-se a Equação 20.10 e o último termo é calculado aplicando-se a Equação 20.6, o que gera

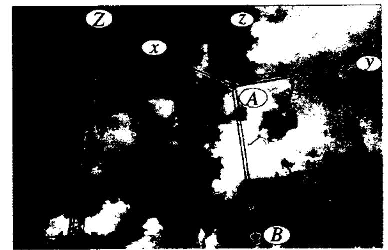
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{v}}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$
$$= (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Nessa equação $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ é a aceleração de $B$ em relação a $A$ medida no referencial $x$, $y$, $z$. Substituindo esse resultado e a Equação 20.10 na equação acima, obtemos, após a simplificação,

$$\boxed{\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}} \qquad (20.12)$$

onde

$\mathbf{a}_B$ = aceleração de $B$
$\mathbf{a}_A$ = aceleração da origem $A$ do sistema $x, y, z$
$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleração e velocidade de '$B$ em relação a $A$', medida por um observador fixo no referencial girante $x, y, z$
$\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}$ = aceleração e velocidade angulares do referencial $x, y, z$
$\mathbf{r}_{B/A}$ = vetor de posição de '$B$ em relação a $A$'



*Devido à rotação da lança em torno do eixo Z, ao movimento da talha A ao longo da lança e à extensão e oscilação do cabo AB, o movimento da caçamba de concreto é bem complexo. Pode-se estabelecer sobre a talha um sistema de coordenadas x, y, z em translação–rotação e aplicar uma análise de movimento relativo para se estudar esse movimento.*

As equações 20.11 e 20.12 são idênticas àquelas usadas na Seção 16.8 para a análise do movimento plano relativo.[3] Naquele caso, todavia, a aplicação é simplificada, pois $\mathbf{\Omega}$ e $\dot{\mathbf{\Omega}}$ têm *direção constante*, que é sempre perpendicular ao

[3] Consulte a Seção 16.8 para uma interpretação dos termos.

plano do movimento. Para o caso tridimensional, $\dot{\mathbf{\Omega}}$ deve ser calculada usando-se a Equação 20.6, pois $\dot{\mathbf{\Omega}}$ depende da variação *tanto* da direção *quanto* do módulo de $\mathbf{\Omega}$.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

O movimento tridimensional de pontos materiais ou de corpos rígidos pode ser analisado com as equações 20.11 e 20.12 utilizando-se o seguinte procedimento.

### *Eixos Coordenados*

- Escolha a localização e a orientação dos eixos coordenados $X, Y, Z$ e $x, y, z$. Muitas soluções são facilmente obtidas se no instante considerado:

  (1) as origens *coincidem*

  (2) os eixos são colineares

  (3) os eixos são paralelos

- Se vários componentes da velocidade estão envolvidos num problema, os cálculos são reduzidos se os eixos $x, y, z$ são selecionados de modo que somente um componente da velocidade angular é observado nesse sistema $(\mathbf{\Omega}_{xyz})$ e o referencial gira com $\mathbf{\Omega}$ definido pelos outros componentes da velocidade angular.

### *Equações Cinemáticas*

- Depois de se definir a origem $A$ do referencial móvel e se especificar o ponto $B$ em movimento, as equações 20.11 e 20.12 devem ser escritas em forma simbólica como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Se $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{\Omega}$ aparentam *mudar de direção* quando observados do referencial $X, Y, Z$, use um conjunto de eixos de referência $x', y', z'$ com $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$ e a Equação 20.6 para determinar $\dot{\mathbf{\Omega}}$ e o movimento $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{a}_A$ da origem $A$ do referencial móvel $x, y, z$.

- Se $(\mathbf{r}_{B/A})_{xyz}$ e $\mathbf{\Omega}_{xyz}$ parecem *mudar de direção* quando observados de $x, y, z$, use um conjunto de eixos de referência $x', y', z'$ com $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}_{xyz}$ e a Equação 20.6 para determinar $\dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz}$ e o movimento relativo $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.

- Obtidas as formas finais de $\dot{\mathbf{\Omega}}$, $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $\dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, os dados numéricos podem ser substituídos e os termos cinemáticos, calculados. Os componentes de todos esses vetores podem ser escolhidos ao longo dos eixos $X, Y, Z$ ou ao longo de $x, y, z$. A escolha é arbitrária, contanto que se utilize um conjunto consistente de vetores unitários.

## EXEMPLO 20.4

Um motor e uma barra $AB$ têm os movimentos angulares mostrados na Figura 20.12. Um colar $C$ na barra localiza-se a 0,25 m de $A$ e se move para baixo ao longo da barra com velocidade de 3 m/s e aceleração de 2 m/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração de $C$ no instante considerado.

### SOLUÇÃO

***Eixos Coordenados.*** Vamos escolher a origem do sistema fixo $X, Y, Z$ no centro da plataforma e a origem do referencial móvel $x, y, z$ no ponto $A$ (Figura 20.12). Como o colar tem dois componentes de movimento angular, $\boldsymbol{\omega}_p$ e $\boldsymbol{\omega}_M$, ele será visto como tendo velocidade angular $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M$ em $x, y, z$. Os eixos $x, y, z$ serão presos na plataforma, de modo que $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$.

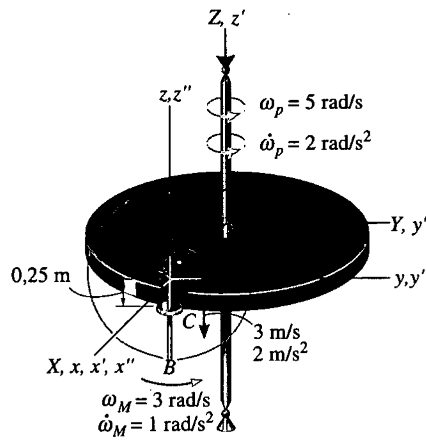



**Figura 20.12**

***Equações Cinemáticas.*** As equações 20.11 e 20.12, aplicadas aos pontos $C$ e $A$, se tornam

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$

***Movimento de A.***

O vetor de posição $\mathbf{r}_A$ muda de direção relativamente a $X$, $Y$, $Z$.

Para encontrarmos as derivadas temporais de $\mathbf{r}_A$, usaremos o conjunto de eixos $x'$, $y'$, $z'$ coincidente com o $X$, $Y$, $Z$, que gira com velocidade angular $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$. Assim:

$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{5\mathbf{k}\}$ rad/s ($\mathbf{\Omega}$ não muda de direção relativamente a $XYZ$.)

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{2\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$

$$\mathbf{r}_A = \{2\mathbf{i}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_A = \mathbf{0} + 5\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} = \{10\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A = [(\ddot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{r}}_A$$

$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 2\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k} \times 10\mathbf{j} = \{-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

***Movimento de C em Relação a A.***

O vetor $(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$ muda de direção relativamente a $x, y, z$. Para encontrarmos as derivadas temporais de $(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$, usaremos um conjunto de eixos $x''$, $y''$, $z''$ que gire com a velocidade angular

$\mathbf{\Omega}'' = \mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M$. Logo,

$\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M = \{3\mathbf{i}\}$ rad/s ($\mathbf{\Omega}_{xyz}$ não muda de direção relativamente a $x$, $y$, $z$.)

$$\dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_M = \{1\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

$$(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz} = \{-0{,}25\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$(\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$$

$$= -3\mathbf{k} + [3\mathbf{i} \times (-0{,}25\mathbf{k})] = \{0{,}75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$

$$(\mathbf{a}_{C/A})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz}]$$

$$+ \dot{\boldsymbol{\omega}}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$$

$$= [-2\mathbf{k} + 3\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})] + (1\mathbf{i}) \times (-0{,}25\mathbf{k}) + (3\mathbf{i}) \times (0{,}75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$

$$= \{18{,}25\mathbf{j} + 0{,}25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

***Movimento de C.***

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$

$$= 10\mathbf{j} + [5\mathbf{k} \times (-0{,}25\mathbf{k})] + (0{,}75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$

$$= \{10{,}8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$ ***Resposta***

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$

$$= (-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + [2\mathbf{k} \times (-0{,}25\mathbf{k})] + 5\mathbf{k} \times [5\mathbf{k} \times (-0{,}25\mathbf{k})]$$

$$+ 2[5\mathbf{k} \times (0{,}75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})] + (18{,}25\mathbf{j} + 0{,}25\mathbf{k})$$

$$= \{-57{,}5\mathbf{i} + 22{,}2\mathbf{j} + 0{,}25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 20.5

O pêndulo mostrado na Figura 20.13 consiste em duas barras. A barra $AB$ é presa por um pino em $A$ e oscila somente no plano $Y$–$Z$, enquanto um mancal em $B$ permite que a barra $BD$ gire em torno da barra $AB$. Num dado instante, as barras têm os movimentos angulares mostrados na figura. O colar $C$, localizado a 0,2 m de $B$, tem velocidade de 3 m/s e aceleração de 2 m/s$^2$ ao longo da barra. Determine a velocidade e a aceleração do colar nesse instante.

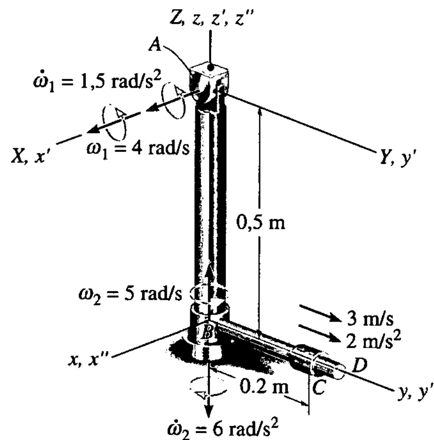



**Figura 20.13**

## SOLUÇÃO I

***Eixos Coordenados.*** A origem do referencial fixo $X$, $Y$, $Z$ será tomada em $A$. O movimento do colar é observado convenientemente de $B$, assim a origem do sistema $x$, $y$, $z$ se localiza nesse ponto. Escolhamos $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2$.

*Equações Cinemáticas.*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$

*Movimento de B.* Para encontrarmos as derivadas temporais de $\mathbf{r}_B$, consideremos o sistema $x', y', z'$ girando com $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$. Então,

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 = \{4\mathbf{i}\} \text{ rad/s} \qquad \dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \{1{,}5\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

$$\mathbf{r}_B = \{-0{,}5\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B = \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0{,}5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B$$

$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1{,}5\mathbf{i} \times (-0{,}5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0{,}75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimento de C Relativamente a B.*

Para obtermos as derivadas temporais de $(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz}$, consideremos o sistema $x'', y'', z''$ girando com $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2$. Então,

$$\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2 = \{5\mathbf{k}\} \text{ rad/s} \qquad \dot{\mathbf{\Omega}}_{xyx} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \{-6\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$

$$(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} = \{0{,}2\mathbf{j}\} \text{ m}$$

$$(\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{C/B})_{xyz}$$

$$= 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 0{,}2\mathbf{j} = \{-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$(\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''}]$$

$$+ \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz}$$

$$= (2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 3\mathbf{j}) + (-6\mathbf{k} \times 0{,}2\mathbf{j}) + [5\mathbf{k} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})]$$

$$= \{-28{,}8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimento de C.*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{i} \times 0{,}2\mathbf{j} + (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0{,}8\mathbf{k}\} \text{ m/s} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$

$$= (0{,}75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + (1{,}5\mathbf{i} \times 0{,}2\mathbf{j}) + [4\mathbf{i} \times (4\mathbf{i} \times 0{,}2\mathbf{j})]$$

$$+ 2[4\mathbf{i} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] + (-28{,}8\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$

$$= \{-28{,}8\mathbf{i} - 5{,}45\mathbf{j} + 32{,}3\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## SOLUÇÃO II

*Eixos Coordenados.* Consideremos o sistema $x, y, z$ girando com

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$$

Logo, $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

*Movimento de B.*

Dos vínculos do problema, $\boldsymbol{\omega}_1$ não muda de direção relativamente a $X$, $Y$, $Z$; todavia, a direção de $\boldsymbol{\omega}_2$ muda devido a $\boldsymbol{\omega}_1$. Assim, para obter $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ consideremos os eixos $x'$, $y'$, $z'$ coincidentes com os eixos $X$, $Y$, $Z$ em $A$, de forma que $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\omega}_1$. Então, derivando seus componentes,

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_1)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1] + [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2]$$

$$= [1{,}5\mathbf{i}+\mathbf{0}] + [-6\mathbf{k}+4\mathbf{i} \times 5\mathbf{k}] = \{1{,}5\mathbf{i}-20\mathbf{j}-6\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$

O vetor $\boldsymbol{\omega}_1$ também muda a direção de $\mathbf{r}_B$, de modo que as derivadas temporais de $\mathbf{r}_B$ podem ser calculadas usando os eixos $x'$, $y'$, $z'$ já definidos. Logo,

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B$$

$$= \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0{,}5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B$$

$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1{,}5\mathbf{i} \times (-0{,}5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0{,}75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimento de C relativamente a B.*

$$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} = \{0{,}2\mathbf{j}\} \text{ m}$$

$$(\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = \{3\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$(\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimento de C.*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$

$$= 2\mathbf{j} + [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times (0{,}2\mathbf{j})] + 3\mathbf{j}$$

$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0{,}8\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$ ***Resposta***

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$

$$= (0{,}75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + [(1{,}5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (0{,}2\mathbf{j})]$$

$$+ (4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 0{,}2\mathbf{j}] + 2[(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 3\mathbf{j}] + 2\mathbf{j}$$

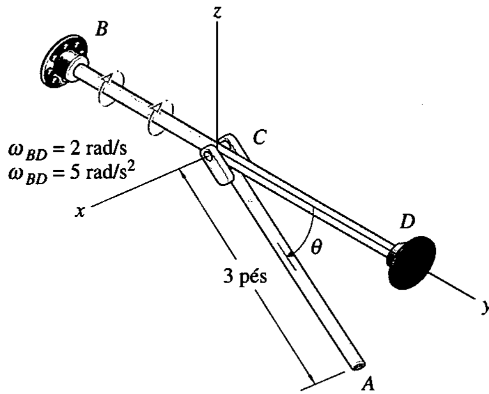
$$= \{-28{,}8\mathbf{i} - 5{,}45\mathbf{j} + 32{,}3\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$ ***Resposta***

## PROBLEMAS

**20.31.** Resolva o Exemplo 20.5 considerando que os eixos $x, y, z$ têm translação curvilínea, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, caso em que o cursor parece ter velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ e movimento radial.

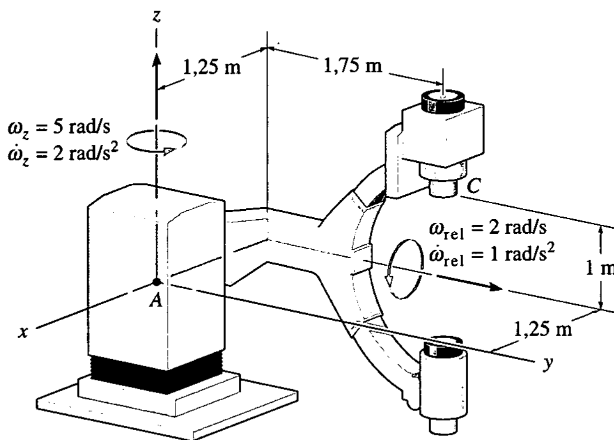
***20.32.** Resolva o Exemplo 20.5 fixando os eixos $x, y, z$ na barra $BD$ de forma que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Nesse caso, o cursor parece apenas se movimentar radialmente para fora ao longo de $BD$, logo $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

**20-33.** Num dado instante, a barra $BD$ está girando em torno do eixo $y$ com velocidade angular $\omega_{BD} = 2$ rad/s e aceleração angular $\dot{\omega}_{BD} = 5$ rad/s$^2$. Além disso, o elemento $AC$, que forma um ângulo $\theta = 60°$ com o eixo $y$, está girando para baixo de forma que $\dot{\theta} = 2$ rad/s e $\ddot{\theta} = 8$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $A$ do elemento $AC$ nesse instante.




**Problema 20.33**

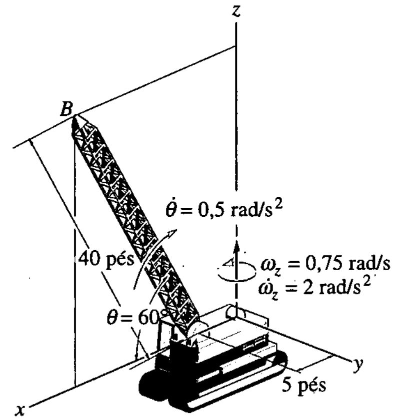
**20.34.** Na situação mostrada na figura, o suporte da câmara de raio X está girando em torno do eixo vertical com $\omega_z = 5$ rad/s e $\dot{\omega}_z = 2$ rad/s$^2$. Relativamente ao suporte, o braço está girando com $\omega_{rel} = 2$ rad/s e $\dot{\omega}_{rel} = 1$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração do centro da câmara $C$.




**Problema 20.34**

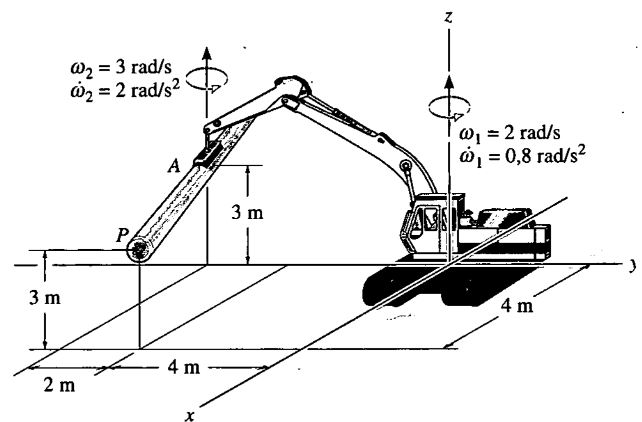
**20.35.** A lança $AB$ do guindaste está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_z = 0,75$ rad/s, que está aumentando a $\dot{\omega}_z = 2$ rad/s$^2$. No mesmo instante, $\theta = 60°$ e a lança está girando para cima a uma taxa constante $\dot{\theta} = 0,5$ rad/s. Determine a velocidade e a aceleração da ponta $B$ da lança nesse instante.

***20.36.** A lança do guindaste $AB$ está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_z = 0,75$ rad/s, que aumenta a $\dot{\omega}_z = 2$ rad/s$^2$. No mesmo instante, $\theta = 60°$ e a lança está girando para cima a uma taxa $\dot{\theta} = 0,5$ rad/s, que aumenta a $\ddot{\theta} = 0,75$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração da ponta $B$ da lança nesse instante.



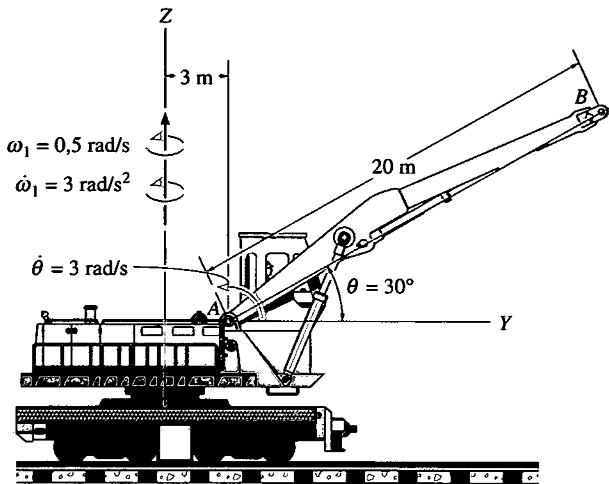

**Problemas 20.35/36**

**20.37.** Num dado instante, a lança está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_1 = 2$ rad/s e aceleração angular $\dot{\omega}_1 = 0,8$ rad/s$^2$. Nesse mesmo instante, o suporte giratório está girando com $\omega_2 = 3$ rad/s e $\dot{\omega}_2 = 2$ rad/s$^2$, ambas as taxas medidas relativamente à lança. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $P$ do tubo nesse instante.




**Problema 20.37**

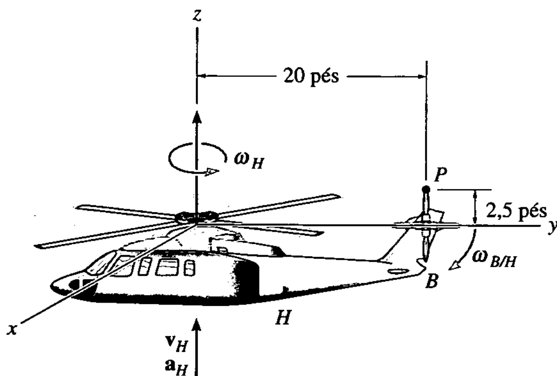
**20.38.** A lança $AB$ do guindaste está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_1 = 0,5$ rad/s, que aumenta a uma taxa $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. No mesmo instante, $\theta = 30°$ e a lança está girando para cima a uma taxa constante $\dot{\theta} = 3$ rad/s Determine a velocidade e a aceleração da extremidade $B$ da lança.




**Problemas 20.38/39**

**20.39.** Num dado instante, o guindaste sobre trilhos está se deslocando para a direita a 2 m/s com aceleração de 1,5 m/s$^2$, enquanto a lança gira em torno do eixo $Z$ com velocidade angular $\omega_1 = 0{,}5$ rad/s e aceleração $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. Nesse mesmo instante, $\theta = 30°$ e a lança está girando para cima a uma taxa constante $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração da extremidade $B$ da lança.

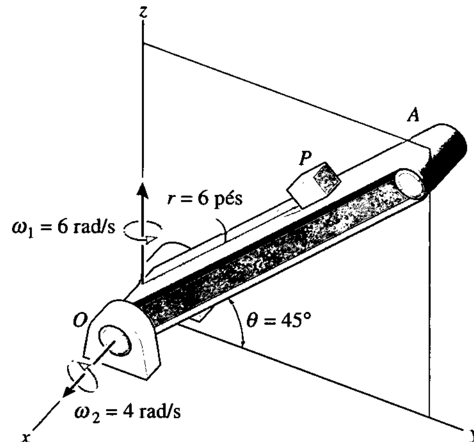
***20.40.** Num dado instante, o helicóptero está subindo com velocidade $v_H = 4$ pés/s e aceleração $a_H = 2$ pés/s$^2$. Nesse mesmo instante, a estrutura $H$, *não* a hélice horizontal, está girando em torno de um eixo vertical com velocidade angular constante $\omega_H = 0{,}9$ rad/s. Se a hélice $B$ na cauda está girando com uma velocidade angular constante $\omega_{B/H} = 180$ rad/s, medida relativamente a $H$, determine a velocidade e a aceleração do ponto $P$, localizado na ponta da lâmina, no instante em que a lâmina está na posição vertical.




**Problema 20.40**

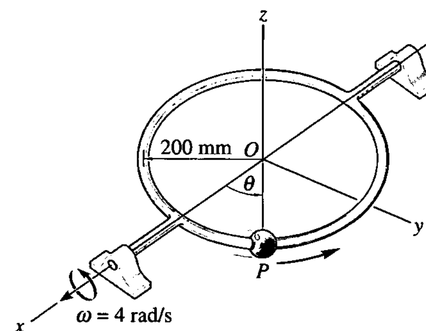
**20.41.** Num dado instante, o braço transportador $OA$ está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s, ao mesmo tempo que gira para cima a uma taxa constante $\omega_2 = 4$ rad/s. Se o transportador está operando a uma taxa constante $\dot{r} = 5$ pés/s, determine a velocidade e a aceleração do pacote $P$, nesse instante. Despreze o tamanho do pacote.

**20.42.** Num dado instante, o braço transportador $OA$ está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s, ao mesmo tempo que gira para cima a uma taxa constante $\omega_2 = 4$ rad/s. Se o transportador está operando a uma taxa $\dot{r} = 5$ pés/s, que aumenta a $\ddot{r} = 8$ pés/s$^2$, determine a velocidade e a aceleração do pacote $P$ nesse instante. Despreze o tamanho do pacote.



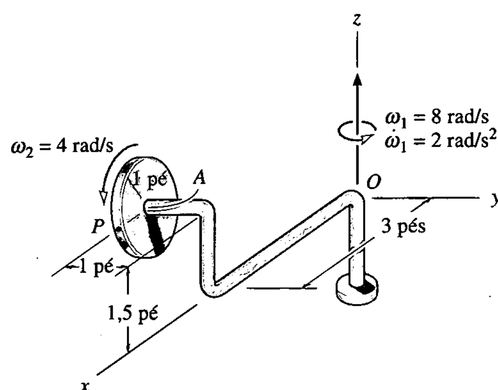

**Problemas 20.41/42**

**20.43.** A conta $P$ desliza pelo anel circular com velocidade angular constante $\dot{\theta} = 6$ rad/s, enquanto o anel gira em torno do eixo $x$ a uma taxa constante $\omega = 4$ rad/s. Se na situação mostrada na figura o anel está no plano $x$–$y$ e o ângulo $\theta = 45°$, determine a velocidade e a aceleração da conta.

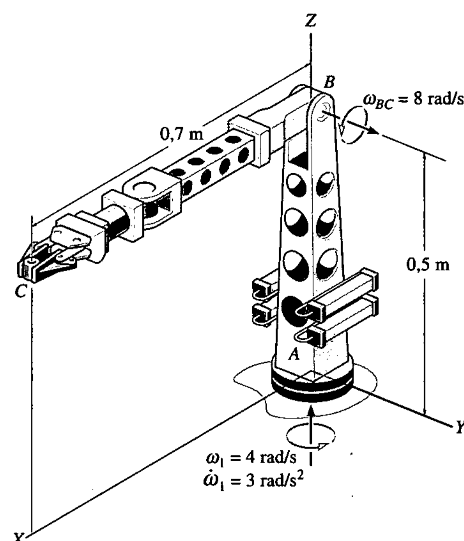



**Problema 20.43**

***20.44.** Num dado instante, a barra está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_1 = 8$ rad/s e aceleração angular $\dot{\omega}_1 = 2$ rad/s$^2$. Nesse mesmo instante, o disco está girando a uma taxa constante $\omega_2 = 4$ rad/s, medida *em relação* à barra. Determine a velocidade e a aceleração do ponto $P$ do disco nesse instante.




Problema 20.44

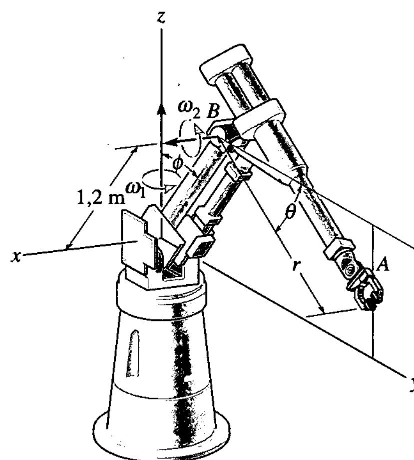



Problemas 20.45/46

**20.45.** Num dado instante, a base do braço de um robô gira em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_1 = 4$ rad/s, que aumenta a uma taxa $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. Além disso, o braço $BC$ gira a uma taxa constante $\omega_{BC} = 8$ rad/s. Determine a velocidade e a aceleração da peça $C$ na garra do robô nesse instante.

**20.46.** Num dado instante, a base do braço de um robô gira em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_1 = 4$ rad/s, que está aumentando a uma taxa $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. Além disso, o braço $BC$ gira a uma taxa $\omega_{BC} = 8$ rad/s, que está aumentando a uma taxa $\dot{\omega}_{BC} = 2$ rad/s$^2$. Determine a velocidade e a aceleração da peça $C$ na garra do robô nesse instante.

**20.47.** Num dado instante, o manipulador industrial está girando em torno do eixo $z$ com velocidade angular $\omega_1 = 5$ rad/s e em torno da junta $B$ com $\omega_2 = 2$ rad/s. Determine a velocidade e a aceleração da garra $A$ nesse instante. Considere $\phi = 30°$, $\theta = 45°$ e $r = 1,6$ m.




Problema 20.47

## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Rotação em torno de um Ponto Fixo.*** Quando um corpo gira em torno de um ponto fixo $O$, seus pontos seguem trajetórias em superfícies esféricas. Rotações infinitesimais são quantidades vetoriais, enquanto rotações finitas não o são.

  Como a aceleração angular é a taxa temporal de mudança da velocidade angular, devemos levar em conta mudanças de $\boldsymbol{\omega}$ em módulo, direção e sentido. A velocidade angular é especificada com freqüência em termos de seus componentes de movimento, de modo que alguns desses componentes permanecerão constantes em relação ao sistema $x$, $y$, $z$ em movimento de rotação. Quando isso acontece, a derivada temporal em relação ao sistema fixo pode ser determinada pela Equação 20.6; isto é,

$$\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}$$

  Uma vez conhecidas a velocidade e a aceleração angulares, $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$, a velocidade e a aceleração do ponto $P$ podem ser determinadas por

## REVISÃO DO CAPÍTULO (CONTINUAÇÃO)

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

- ***Movimento Geral.*** Se o corpo tem movimento geral, então o movimento de um ponto $B$ desse corpo pode ser relacionado com o movimento de outro ponto $A$ usando-se uma análise de movimento relativo, juntamente com um sistema de eixos em translação com origem em $A$. As relações são

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

- ***Análise do Movimento Relativo Usando-se Eixos em Translação e Rotação.*** Os movimentos de dois pontos $A$ e $B$ de um corpo, de uma série de corpos ligados ou localizados em duas trajetórias diferentes, podem ser relacionados usando-se uma análise de movimento relativo com eixos em translação e rotação com origem em $A$. As relações são

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

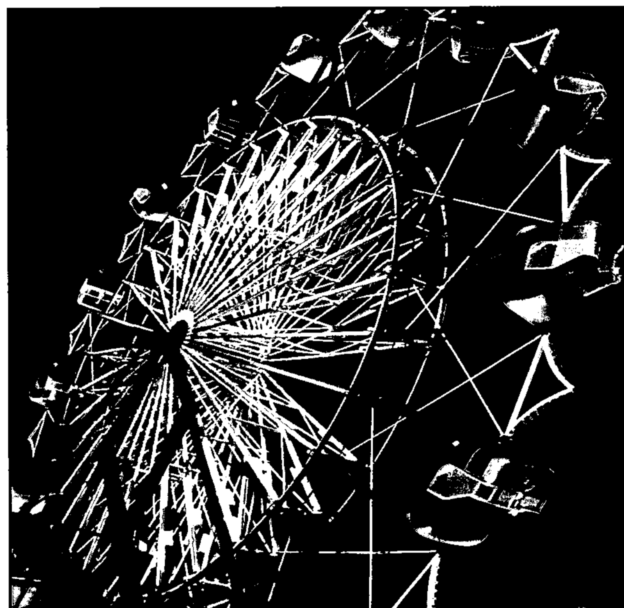
Ao se aplicarem essas equações, é importante ter em mente mudanças de módulo e direção de $\mathbf{r}_A$, $(\mathbf{r}_{B/A})_{xyz}$, $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ quando se tomarem suas derivadas temporais para se encontrarem $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ e $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, e $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz}$. Para efetuar corretamente os cálculos, deve-se usar a Equação 20.6.



# DINÂMICA DO MOVIMENTO TRIDIMENSIONAL DE UM CORPO RÍGIDO

## OBJETIVOS DO CAPÍTULO

- Introduzir os métodos para a determinação dos momentos de inércia e dos produtos de inércia de um corpo, em relação a vários eixos.
- Mostrar como se aplicam os princípios do trabalho e energia e da quantidade de movimento/momento angular a um corpo rígido em movimento tridimensional.
- Desenvolver e aplicar as equações de movimento em três dimensões.
- Estudar o movimento de um giroscópio e o movimento livre de torques.



*O projeto de brinquedos de parques de diversão exige análise de forças que depende de seu movimento tridimensional.*

## *21.1 MOMENTOS E PRODUTOS DE INÉRCIA

Quando estudamos a dinâmica do movimento plano de um corpo, foi necessário introduzir o momento de inércia $I_G$, calculado em relação ao eixo que é perpendicular ao plano do movimento e passa pelo centro de massa $G$ do corpo. Para a análise da dinâmica do movimento tridimensional será necessário algumas vezes calcular seis quantidades inerciais. Esses termos, chamados de momentos e produtos de inércia, descrevem de um modo particular a distribuição de massa de um corpo relativamente a um dado sistema de coordenadas que tem uma orientação e uma origem especificadas.

***Momento de Inércia.*** Consideremos o corpo rígido mostrado na Figura 21.1. O *momento de inércia* para um elemento de massa $dm$ do corpo rígido em relação a qualquer um dos eixos coordenados é definido como o produto da massa $dm$ pelo quadrado da distância do elemento ao eixo. Por exemplo, como podemos notar na figura, $r_x = \sqrt{y^2 + z^2}$, de modo que o momento de inércia de $dm$ em relação ao eixo $x$ é

$$dI_{xx} = r_x^2\, dm = (y^2 + z^2)\, dm$$

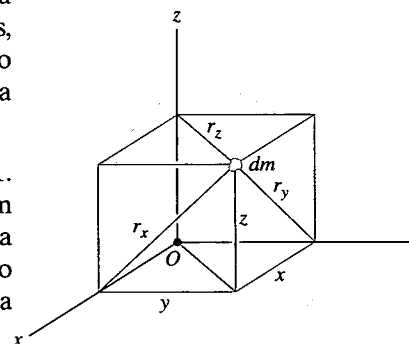



**Figura 21.1**

O momento de inércia $I_{xx}$ para o corpo é determinado pela integração da expressão anterior sobre toda a massa do corpo. Logo, para cada um dos eixos, podemos escrever

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xx} &= \int_m r_x^2\,dm = \int_m (y^2 + z^2)\,dm \\ I_{yy} &= \int_m r_y^2\,dm = \int_m (x^2 + z^2)\,dm \\ I_{zz} &= \int_m r_z^2\,dm = \int_m (x^2 + y^2)\,dm \end{aligned}} \qquad (21.1)$$

A partir das equações anteriores, observe que o momento de inércia *é sempre uma quantidade positiva,* pois é uma soma do produto de massas $dm$, que são sempre positivas, e distâncias ao quadrado.

***Produto de Inércia.*** O *produto de inércia* para um elemento de massa $dm$ é definido, em relação a um conjunto de *dois planos ortogonais*, como o produto da massa $dm$ pelas distâncias do elemento aos planos. Por exemplo, a distância de $dm$ ao plano $y$–$z$ é $x$ e a sua distância ao plano $x$–$z$ é $y$ (Figura 21.1). O produto de inércia $dI_{xy}$ para o elemento de massa $dm$ é portanto

$$dI_{xy} = xy\,dm$$

Observemos também que $dI_{yx} = dI_{xy}$. Integrando sobre toda a massa do corpo, o produto de inércia desse corpo para cada combinação de planos pode ser expresso como

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \int_m xy\,dm \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int_m yz\,dm \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int_m xz\,dm \end{aligned}} \qquad (21.2)$$

Diferentemente do momento de inércia, que é sempre positivo, o produto de inércia pode ser positivo, negativo ou nulo. O resultado depende dos sinais das duas coordenadas envolvidas, que variam independentemente uma da outra. Em particular, se um dos planos ou ambos são *planos de simetria* para a massa, o *produto de inércia* em relação a esses planos é *nulo*. Nesses casos, elementos de massa ocorrerão aos *pares* localizados em cada lado do plano de simetria. Em um lado do plano o produto de inércia para o elemento será positivo, enquanto no outro lado o produto de inércia para o elemento correspondente será negativo e, conseqüentemente, a soma será nula. Podemos ver exemplos dessa situação na Figura 21.2. No primeiro caso (Figura 21.2*a*), o plano $y$–$z$ é um plano de simetria, portanto $I_{xy} = I_{xy} = 0$. O cálculo de $I_{yz}$ resultará em um *valor positivo*, pois todos os elementos de massa são localizados usando-se somente coordenadas $y$ e $z$ positivas. Para o cilindro, com eixos coordenados localizados como se mostra na Figura 21.1*b*, tanto o plano $x$–$z$ quanto o $y$–$z$ são planos de simetria. Nesse caso, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.

***Teoremas dos Eixos Paralelos e dos Planos Paralelos.*** As técnicas de integração que são usadas para determinar o momento de inércia de um corpo foram descritas na Seção 17.1. Também se discutiram métodos para a determinação do momento de inércia de um corpo composto, isto é, um corpo que

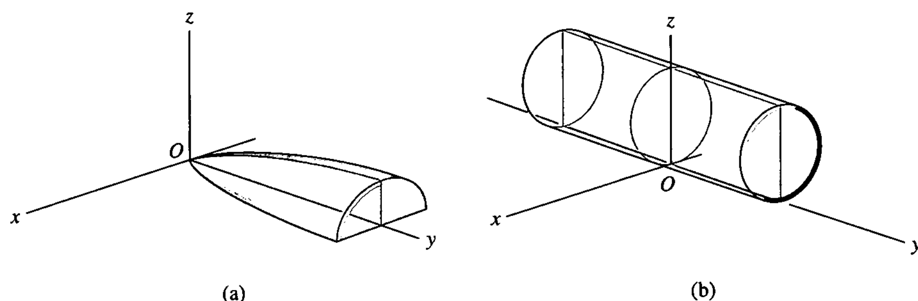



**Figura 21.2**

é composto de elementos mais simples, como aqueles da tabela no final do livro. Utiliza-se com freqüência o *teorema dos eixos paralelos* para se efetuarem os cálculos. Esse teorema, desenvolvido na Seção 17.1, serve para se 'transferir' o momento de inércia de um corpo de um eixo pelo seu centro de massa $G$ para um eixo paralelo que passa por outro ponto. Se $G$ tem coordenas $x_G$, $y_G$, $z_G$, definidas relativamente aos eixos $x$, $y$, $z$ (Figura 21.3), então as equações dos eixos paralelos usadas para calcular os momentos de inércia em relação a $x$, $y$, $z$ são

$$\begin{aligned} I_{xx} &= (I_{x'x'})_G + m(y_G^2 + z_G^2) \\ I_{yy} &= (I_{y'y'})_G + m(x_G^2 + z_G^2) \\ I_{zz} &= (I_{z'z'})_G + m(x_G^2 + y_G^2) \end{aligned} \tag{21.3}$$

Os produtos de inércia de um corpo composto são calculados da mesma maneira que os momentos de inércia. Entretanto, nesse caso, é importante o uso do *teorema dos planos paralelos*. Esse teorema é empregado para 'transferir' os produtos de inércia de um conjunto de três planos ortogonais que passam pelo centro de massa do corpo para um conjunto correspondente de três planos paralelos que passam por algum outro ponto $O$. Definindo as distâncias entre os planos como $x_G$, $y_G$ e $z_G$ (Figura 21.3), as equações dos planos paralelos podem ser escritas como

$$\begin{aligned} I_{xy} &= (I_{x'y'})_G + m x_G y_G \\ I_{yz} &= (I_{y'z'})_G + m y_G z_G \\ I_{zx} &= (I_{z'x'})_G + m z_G x_G \end{aligned} \tag{21.4}$$

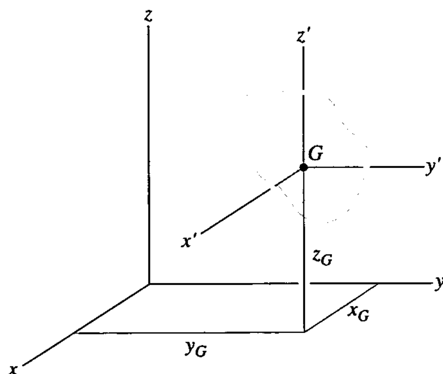



**Figura 21.3**



*A dinâmica do ônibus espacial em sua órbita terrestre só pode ser prevista se seus momentos e produtos de inércia forem conhecidos.*

A dedução dessas fórmulas é semelhante àquela das equações para os eixos paralelos (Seção 17.1).

***Tensor de Inércia.*** As propriedades inerciais de um corpo são caracterizadas completamente por nove termos, seis dos quais são independentes uns dos outros. Esse conjunto de termos é definido por meio das equações 21.1 e 21.2 e pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Esse arranjo é denominado *tensor de inércia*. O tensor de inércia para um corpo possui um conjunto único de valores para cada origem e orientação dos eixos coordenados.

Em geral, para cada ponto $O$ podemos especificar uma orientação única para os eixos coordenados de modo que os produtos de inércia sejam nulos. Ao proceder dessa maneira, dizemos que o tensor de inércia está 'diagonalizado' e pode ser expresso na seguinte forma simplificada

$$\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

Nessa expressão, $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$ e $I_z = I_{zz}$ são denominados *momentos de inércia principais* do corpo e são calculados em relação aos *eixos principais de inércia*. Desses três momentos de inércia principais, um será máximo e o outro, mínimo.

A determinação matemática das direções dos eixos principais de inércia não será discutida aqui (veja o Problema 21.21). Há muitos casos, entretanto, nos quais os eixos principais podem ser determinados por inspeção. Dessa discussão, podemos observar que se os eixos coordenados são orientados de forma que *dois* dos três planos ortogonais que contêm os eixos são planos de *simetria*, então todos os produtos de inércia para a massa do corpo são nulos em relação aos planos coordenados e, portanto, os eixos coordenados são eixos principais de inércia. Por exemplo, os eixos $x$, $y$, $z$ mostrados na Figura 21.2*b* representam eixos principais de inércia para o cilindro, no ponto $O$.

***Momento de Inércia em relação a um Eixo Arbitrário.*** Consideremos o corpo mostrado na Figura 21.4, para o qual os nove componentes do tensor de inércia foram calculados para os eixos $x$, $y$, $z$, com origem $O$. Desejamos determinar o momento de inércia do corpo em relação ao eixo $Oa$, para o qual a direção é definida pelo vetor unitário $\mathbf{u}_a$. Por definição, $I_{Oa} = \int b^2\, dm$, onde $b$ é a distância entre $dm$ e o eixo $Oa$. A posição de $dm$ pode ser determinada usando-se $\mathbf{r}$ e a seguir $b = r \operatorname{sen} \theta$, que representa o módulo do produto vetorial $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}$. Logo, o momento de inércia pode ser expresso como

$$I_{Oa} = \int_m |(\mathbf{u}_a \times \mathbf{r})|^2\, dm = \int_m (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r})\, dm$$

Considerando $\mathbf{u}_a = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, de forma que $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r} = (u_y z - u_z y)\mathbf{i} + (u_z x - u_x z)\mathbf{j} + (u_x y - u_y x)\mathbf{k}$, então, após substituição e utilização do produto escalar, podemos escrever o momento de inércia como

$$I_{Oa} = \int_m [(u_y z - u_z y)^2 + (u_z x - u_x z)^2 + (u_x y - u_y x)^2]\, dm$$

$$= u_x^2\int_m (y^2 + z^2)\,dm + u_y^2\int_m (z^2 + x^2)\,dm + u_z^2\int_m (x^2 + y^2)\,dm$$

$$- 2u_x u_y\int_m xy\,dm - 2u_y u_z\int_m yz\,dm - 2u_z u_x\int_m zx\,dm$$

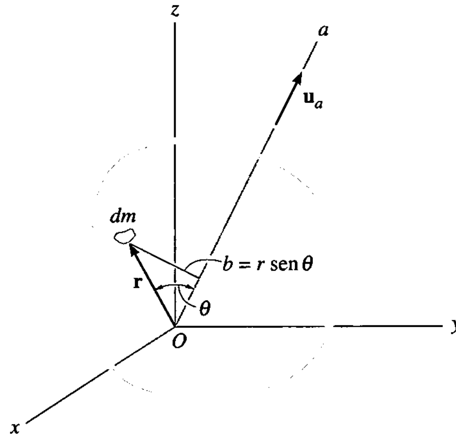



**Figura 21.4**

Reconhecendo as integrais como os momentos e os produtos de inércia do corpo (equações 21.1 e 21.2), temos

$$\boxed{I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_x u_y - 2I_{yz}u_y u_z - 2I_{zx}u_z u_x} \quad (21.5)$$

Assim, se o tensor de inércia é conhecido para os eixos $x, y, z$, o momento de inércia do corpo em relação a um eixo inclinado $Oa$ pode ser obtido por meio da Equação 21.5. Para o cálculo, os cossenos diretores $u_x, u_y, u_z$ dos eixos devem ser determinados. Esses termos especificam os cossenos dos ângulos diretores coordenados $\alpha, \beta, \gamma$ do eixo positivo $Oa$ em relação aos eixos positivos $x, y, z$, respectivamente (veja o Apêndice C).

## EXEMPLO 21.1

Determine o momento de inércia da barra dobrada mostrada na Figura 21.5*a*, em relação ao eixo *Aa*. A massa de cada um dos trechos é informada na figura.

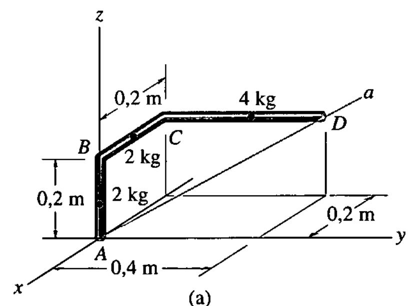



**Figura 21.5**

### SOLUÇÃO

Antes de se aplicar a Equação 21.5, é necessário determinar os momentos e produtos de inércia da barra, em relação aos eixos $x, y, z$. Para isso, vamos usar a fórmula para o momento de inércia de uma barra delgada, $I = \frac{1}{12}ml^2$, e os teoremas dos eixos paralelos e planos paralelos (equações 21.3 e 21.4). Dividindo a barra em três partes e localizando o centro de massa de cada trecho (Figura 21.5*b*), temos

$$I_{xx} = [\tfrac{1}{12}(2)(0{,}2)^2 + 2(0{,}1)^2] + [0 + 2(0{,}2)^2] + [\tfrac{1}{12}(4)(0{,}4)^2 + 4((0{,}2)^2 + (0{,}2)^2)] = 0{,}480\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yy} = [\tfrac{1}{12}(2)(0{,}2)^2 + 2(0{,}1)^2] + [\tfrac{1}{12}(2)(0{,}2)^2 + 2((-0{,}1)^2 + (0{,}2)^2)] + [0 + 4((-0{,}2)^2 + (0{,}2)^2)] = 0{,}453\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

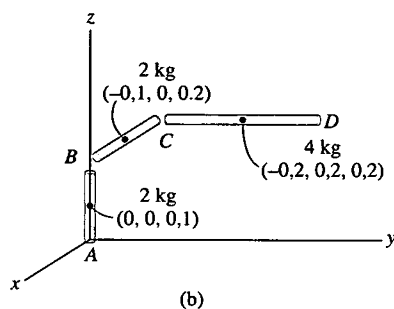



**Figura 21.5**

$$I_{zz} = [0 + 0] + [\tfrac{1}{12}(2)(0{,}2)^2 + 2(0{,}1)^2] + [\tfrac{1}{12}(4)(0{,}4)^2 + 4((-0{,}2)^2 + (0{,}2)^2)] = 0{,}400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{xy} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(-0{,}2)(0{,}2)] = -0{,}160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yz} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(0{,}2)(0{,}2)] = 0{,}160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zx} = [0 + 0] + [0 + 2(0{,}2)(-0{,}1)] + [0 + 4(0{,}2)(-0{,}2)] = -0{,}200 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

O eixo $Aa$ é definido pelo vetor unitário

$$\mathbf{u}_{Aa} = \frac{\mathbf{r}_D}{r_D} = \frac{-0{,}2\mathbf{i} + 0{,}4\mathbf{j} + 0{,}2\mathbf{k}}{\sqrt{(-0{,}2)^2 + (0{,}4)^2 + (0{,}2)^2}} = -0{,}408\mathbf{i} + 0{,}816\mathbf{j} + 0{,}408\mathbf{k}$$

Assim:

$$u_x = -0{,}408 \qquad u_y = 0{,}816 \qquad u_z = 0{,}408$$

Substituindo esses resultados na Equação 21.5, obtemos

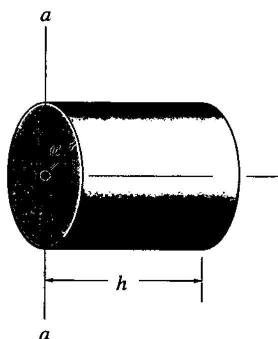
$$\begin{aligned} I_{Aa} &= I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x \\ &= 0{,}480(-0{,}408)^2 + (0{,}453)(0{,}816)^2 + 0{,}400(0{,}408)^2 \\ &\quad - 2(-0{,}160)(-0{,}408)(0{,}816) - 2(0{,}160)(0{,}816)(0{,}408) \\ &\quad - 2(-0{,}200)(0{,}408)(-0{,}408) \\ &= 0{,}169 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

***Resposta***

## PROBLEMAS

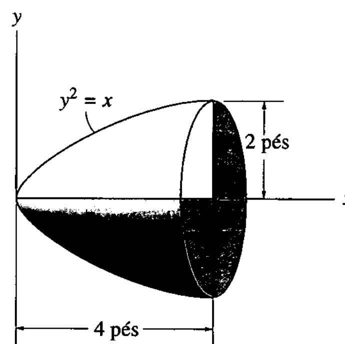
**21.1.** Mostre que a soma dos momentos de inércia de um corpo, $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$, é independente da orientação dos eixos $x, y, z$ e, portanto, depende somente da localização da origem.

**21.2.** Determine o momento de inércia do cilindro em relação ao eixo $a$–$a$. A massa do cilindro é $m$.




**Problema 21.2**

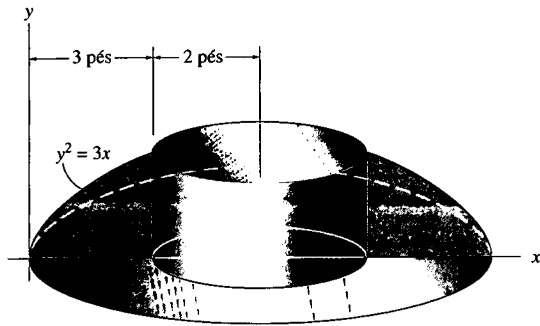
**21.3.** Determine o momento de inércia $I_y$ do sólido formado pela rotação da área cinza-claro em torno do eixo $x$. A densidade do material é $\rho = 12$ slug/pé$^3$.




**Problema 21.3**

***21.4.** Determine o produto de inércia $I_{xy}$ do corpo formado pela rotação da área sombreada em torno da reta $x = 5$ pés. Dê o resultado em função da densidade $\rho$ do material.

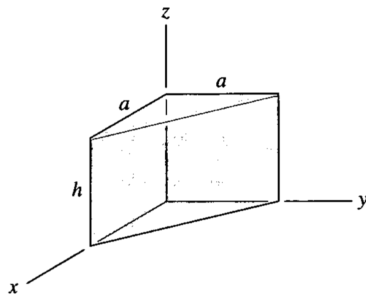
**21.5.** Determine o momento de inércia $I_y$ do corpo formado pela rotação da área sombreada em torno da reta $x = 5$ pés. Dê o resultado em função da densidade $\rho$ do material.




**Problemas 21.4/5**

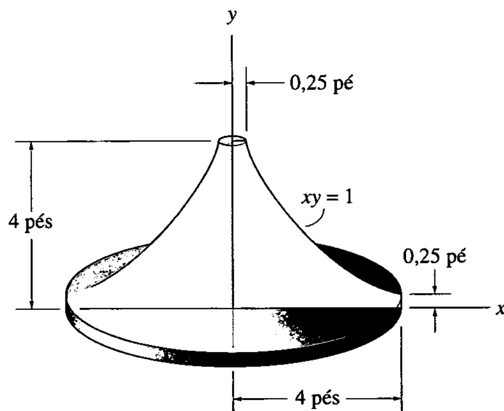
**21.6.** Determine por integração direta o produto de inércia $I_{yz}$ para o prisma homogêneo. A densidade do material é $\rho$. Dê o resultado em função da massa $m$ do prisma.

**21.7.** Determine por integração direta o produto de inércia $I_{xy}$ para o prisma homogêneo. A densidade do material é $\rho$. Dê o resultado em função da massa $m$ do prisma.



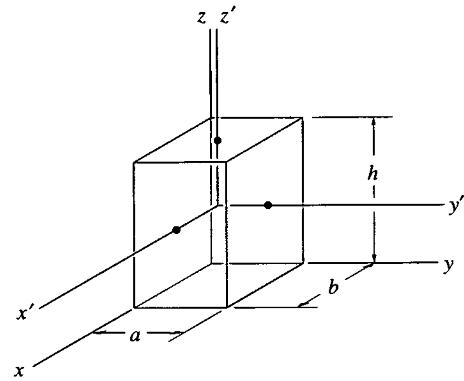

**Problemas 21.6/7**

***21.8.** Determine os raios de giração $k_x$ e $k_y$ para o sólido formado pela rotação da área cinza-claro em torno do eixo $y$. A densidade do material é $\rho$.



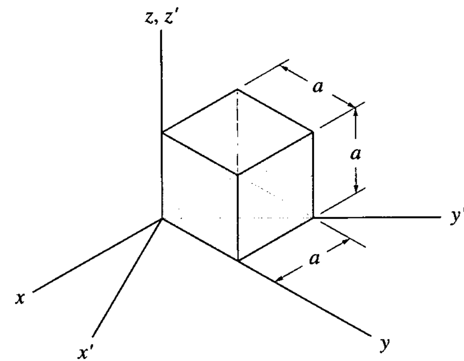

**Problema 21.8**

**21.9.** Determine o momento de inércia do bloco homogêneo em relação ao seu eixo central $x'$. A massa do bloco é $m$.



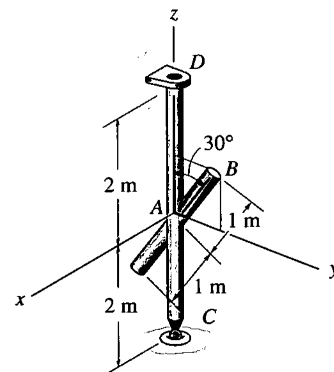

**Problema 21.9**

**21.10.** Determine os elementos do tensor de inércia para o cubo em relação ao sistema coordenado $x, y, z$. A massa do cubo é $m$.



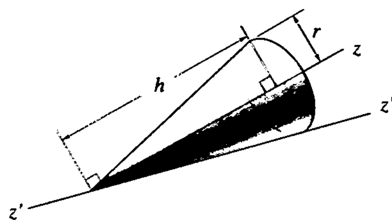

**Problema 21.10**

**21.11.** Determine os momentos de inércia em relação aos eixos $x$, $y$, $z$ do sistema de barras. As barras têm massa de 0,75 kg/m.



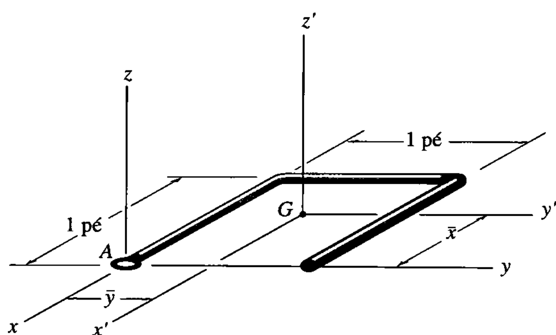

**Problema 21.11**

***21.12.** Determine o momento de inércia do cone em relação ao eixo $z'$. O peso do cone é 15 lb, a *altura* é $h = 1{,}5$ pé e o raio é $r = 0{,}5$ pé.



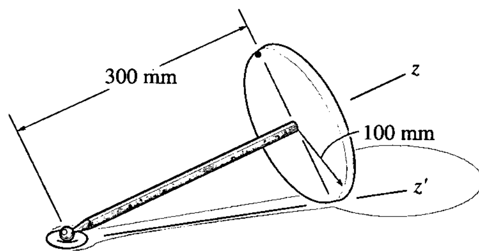

**Problema 21.12**

**21.13.** A barra dobrada tem peso de 1,5 lb/pé. Localize o centro de gravidade $G(\bar{x}, \bar{y})$ e determine os momentos principais de inércia $I_{x'}, I_{y'}$ e $I_{z'}$ da barra em relação aos eixos $x', y', z'$.




**Problema 21.13**

**21.14.** Determine o momento de inércia da peça formada pela barra de 1,5 kg e pelo disco de 4 kg, em relação ao eixo $z'$.

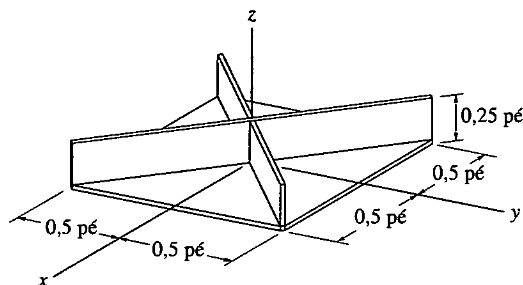



**Problema 21.14**

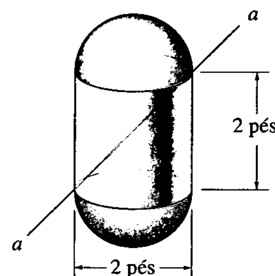
**21.15.** Determine o momento de inércia $I_x$ do conjunto de placas. As placas têm peso específico de 6 lb/pé$^2$.

***21.16.** Determine o produto de inércia $I_{yz}$ do conjunto de placas. As placas têm peso específico de 6 lb/pé$^2$.

**21.17.** Determine o momento de inércia do corpo composto em relação ao eixo *aa*. O cilindro pesa 20 lb e cada hemisfério pesa 10 lb.

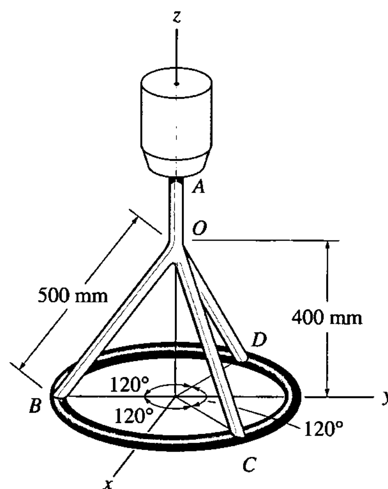



**Problemas 21.15/16**



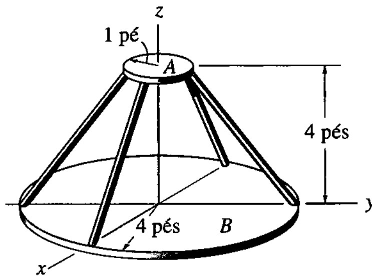

**Problema 21.17**

**21.18.** Determine o momento de inércia do conjunto formado por barras e anel delgados em relação ao eixo $z$. As barras e o anel têm massa de 2 kg/m.

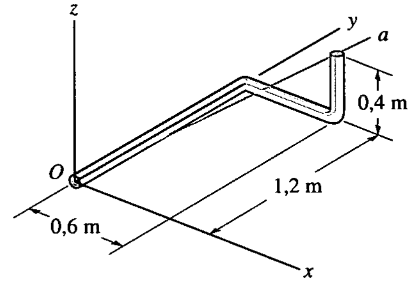



**Problema 21.18**

**21.19.** O arranjo consiste em uma placa $A$ de 15 lb, uma placa $B$ de 40 lb e quatro barras de 7 lb cada. Determine os momentos de inércia do arranjo em relação aos eixos principais $x, y, z$.




**Problema 21.19**




**Problema 21.20**

***21.20.** A barra dobrada tem uma massa de 4 kg/m. Determine o momento de inércia da barra em relação ao eixo *Oa*.

# *21.2 MOMENTO ANGULAR

Nesta seção, desenvolveremos as equações a serem usadas na determinação do momento angular de um corpo rígido em relação a um ponto arbitrário. Essa formulação fornecerá um meio para o desenvolvimento tanto do princípio do impulso e momento angulares quanto das equações do movimento de rotação para um corpo rígido.

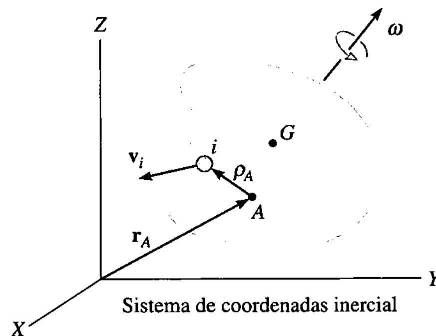



**Figura 21.6**

Consideremos o corpo rígido mostrado na Figura 21.6, que tem massa $m$ e centro de massa $G$. O sistema de coordenadas $x, y, z$ representa um referencial inercial, portanto seus eixos são fixos ou transladam com velocidade constante. O momento angular medido nesse referencial será calculado em relação ao ponto arbitrário $A$. O vetor de posição $\mathbf{r}_A$ é traçado da origem do sistema de coordenadas até o ponto $A$ e o vetor de posição $\boldsymbol{\rho}_A$, do ponto $A$ até o $i$-ésimo ponto do corpo. Se a massa do ponto é $m_i$, o momento angular em relação ao ponto $A$ é

$$(\mathbf{H}_A)_i = \boldsymbol{\rho}_A \times m_i \mathbf{v}_i$$

onde $\mathbf{v}_i$ representa a velocidade do ponto material medida no referencial $X$, $Y$, $Z$. Se o corpo tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, então a Equação 20.7 pode relacionar $\mathbf{v}_i$ com a velocidade de $A$, isto é,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$$

Logo:

$$(\mathbf{H}_A)_i = \boldsymbol{\rho}_A \times m_i(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)$$
$$= (\boldsymbol{\rho}_A m_i) \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, m_i$$

Uma soma de todos os pontos do corpo significa uma integração, de modo que para $m_i \rightarrow dm$ tem-se

$$\mathbf{H}_A = \left(\int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm\right) \times \mathbf{v}_A + \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, dm \qquad (21.6)$$

***Ponto Fixo O.*** Se $A$ é fixo e tomado coincidente com o ponto $O$ do corpo (Figura 21.7a), então $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ e a Equação 21.6 reduz-se a

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \int_m \boldsymbol{\rho}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_O)\, dm} \qquad (21.7)$$

***Centro de Massa G.*** Se $A$ está localizado no *centro de massa* $G$ do corpo (Figura 21.17*b*), então $\int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm = \mathbf{0}$ e

$$\boxed{\mathbf{H}_G = \int_m \boldsymbol{\rho}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_G)\, dm} \qquad (21.8)$$

***Ponto Arbitrário A.*** Em geral, $A$ pode ser algum ponto não coincidente com $O$ ou $G$ (Figura 21.7*c*). Nesse caso, todavia, a Equação 21.6 pode ser simplificada para a seguinte forma (veja o Problema 21.22):

$$\boxed{\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G} \qquad (21.9)$$

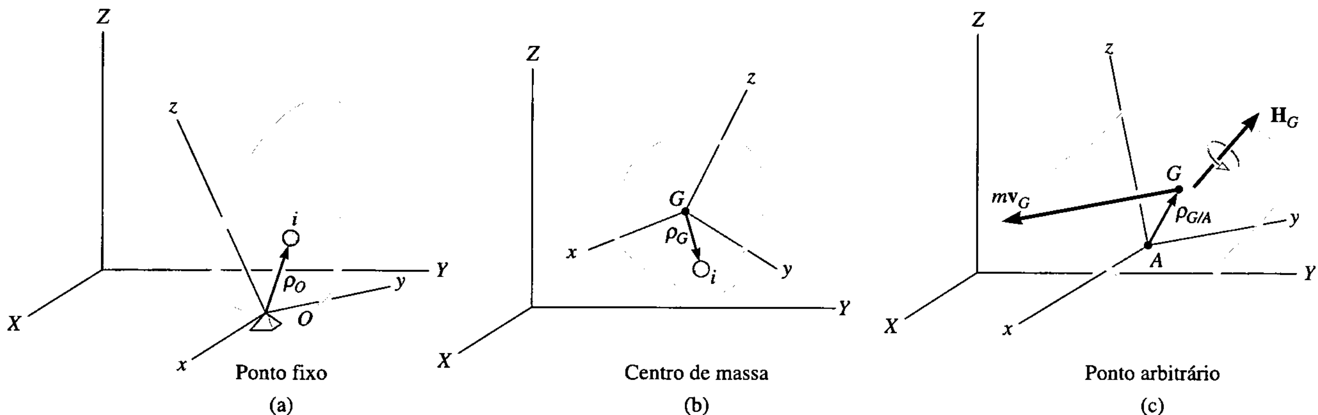



**Figura 21.7**

Nessa equação, o momento angular consiste em duas partes: o momento da quantidade de movimento $m\mathbf{v}_G$ do corpo em relação ao ponto $A$ somado vetorialmente ao momento angular $\mathbf{H}_G$. A Equação 21.9 também pode ser usada para calcular o momento angular do corpo em relação a um ponto fixo $O$; os resultados, certamente, coincidirão com aqueles calculados usando-se a Equação 21.7, que é mais conveniente.

***Componentes Cartesianos de* H.** Para uso prático das equações 21.7 a 21.9 o momento angular pode ser expresso em termos de seus componentes escalares. Para esse fim, é conveniente escolher um segundo conjunto de eixos

$x, y, z$ com orientação arbitrária relativamente aos eixos $X, Y, Z$ (Figura 21.7); para uma formulação geral, observemos que as equações 21.7 e 21.8 são

$$\mathbf{H} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})\, dm$$

Expressando $\mathbf{H}$, $\boldsymbol{\rho}$ e $\boldsymbol{\omega}$ em função de $x$, $y$ e $z$, temos

$$H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = \int_m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times [(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})]\, dm$$

A expansão dos produtos vetoriais e a combinação dos termos resulta em

$$\begin{aligned} H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = &\left[\omega_x \int_m (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int_m xy\, dm - \omega_z \int_m xz\, dm\right]\mathbf{i} \\ &+ \left[-\omega_x \int_m xy\, dm + \omega_y \int_m (x^2 + z^2)\, dm - \omega_z \int_m yz\, dm\right]\mathbf{j} \\ &+ \left[-\omega_x \int_m zx\, dm - \omega_y \int_m yz\, dm + \omega_z \int_m (x^2 + y^2)\, dm\right]\mathbf{k} \end{aligned}$$

Igualando os respectivos componentes **i**, **j**, **k** e reconhecendo que as integrais representam os momentos e produtos de inércia, obtemos

$$\boxed{\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}} \qquad (21.10)$$

Essas três equações representam a forma escalar dos componentes **i**, **j**, **k** de $\mathbf{H}_O$ ou $\mathbf{H}_G$ (dados na forma vetorial pelas equações 21.7 e 21.8). O momento angular do corpo em relação a um ponto arbitrário $A$, que não seja o ponto fixo $O$ ou o centro de massa $G$, também pode ser expresso na forma escalar. Nesse caso, é necessário usar a Equação 21.9 para representar $\boldsymbol{\rho}_{G/A}$ e $\mathbf{v}_G$ como vetores cartesianos, calcular o produto vetorial e substituir os componentes (equações 21.10) para $\mathbf{H}_G$.

As equações 21.10 poderão ser mais simplificadas se os eixos coordenados $x, y, z$ forem orientados de maneira que se tornem eixos principais de inércia, no ponto considerado. Quando esses eixos são usados, os produtos de inércia se anulam, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$, e se os momentos de inércia principais em relação a $x, y, z$ forem representados como $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$ e $I_z = I_{zz}$, os três componentes do momento angular se tornam

$$\boxed{H_x = I_x\omega_x \qquad H_y = I_y\omega_y \qquad H_z = I_z\omega_z} \qquad (21.11)$$



*O movimento do astronauta é controlado por pequenos jatos direcionais fixados em seu traje espacial. Os impulsos desses jatos devem ser cuidadosamente definidos para evitar balanços e perdas de orientação.*

***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Agora que já desenvolvemos a formulação do momento angular de um corpo, *o princípio do impulso e quantidade de movimento/momento angular*, como discutido na Seção 19.2, pode ser usado para a resolução de problemas que envolvem *força*, *velocidade* e *tempo*. Para esse caso, as seguintes equações vetoriais estão disponíveis:

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \quad (21.12)$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (21.13)$$

Em três dimensões, cada termo vetorial pode ser representado por três componentes escalares e, portanto, pode ser escrito um total de *seis equações escalares*. Três equações relacionam o impulso e a quantidade de movimento nas direções $x, y, z$ e as outras três relacionam o impulso e o momento angulares do corpo em relação aos eixos $x, y, z$. Antes da aplicação das equações 21.12 e 21.13 à solução de problemas, sugere-se uma recapitulação das seções 19.2 e 19.3.

## *21.3 ENERGIA CINÉTICA

Para aplicar o princípio do trabalho e energia à solução de problemas que envolvem o movimento geral de um corpo rígido, é necessário primeiro formular expressões para a energia cinética do corpo. Assim, consideremos o corpo rígido mostrado na Figura 21.8, que tem massa $m$ e centro de massa em $G$. A energia cinética do $i$-ésimo ponto do corpo que tem massa $m_i$ e velocidade $\mathbf{v}_i$, medida no referencial $X, Y, Z$, é

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

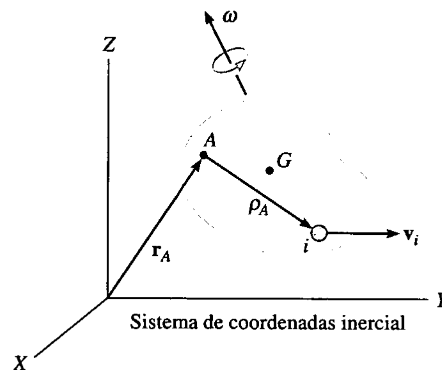



**Figura 21.8**

Conhecida a velocidade de um ponto $A$ qualquer do corpo, $\mathbf{v}_i$ pode ser relacionada com $\mathbf{v}_A$ pela equação $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$, onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do corpo, no sistema $X, Y, Z$, e $\boldsymbol{\rho}_A$ é o vetor de posição de $i$ relativamente a $A$. Usando-se a expressão acima para $\mathbf{v}_i$, a energia cinética para o ponto pode ser escrita como

$$T_i = \tfrac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)$$
$$= \tfrac{1}{2} (\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A)\, m_i + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, m_i + \tfrac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, m_i$$

A energia cinética para todo o corpo é dada pela soma das energias cinéticas de todos os seus pontos. Por integração, considerando $m_i \rightarrow dm$, temos

$$T = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A \, dm\right) + \frac{1}{2}\int_m (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \, dm$$

O último termo no segundo membro dessa equação pode ser reescrito usando-se a identidade vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, onde $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\rho}_A$ e $\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$. O resultado é

$$T = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A \, dm\right) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \, dm \qquad (21.14)$$

Essa equação raramente é usada por causa dos cálculos que envolvem as integrais. Entretanto, a equação é simplificada quando se toma o ponto de referência $A$ como um ponto fixo $O$ do corpo ou coincidente com o centro de massa $G$.

***Ponto Fixo O.*** Se $A$ é um *ponto fixo O* do corpo (Figura 21.7*a*), então $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, e, usando a Equação 21.7, podemos expressar a Equação 21.14 como

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O$$

Se os eixos $x$, $y$, $z$ forem *eixos principais de inércia* para o corpo, então $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{H}_O = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$. Substituindo esses resultados na equação anterior e calculando os produtos escalares, temos

$$\boxed{T = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2} \qquad (21.15)$$

***Centro de Massa G.*** Se $A$ coincide com o *centro de massa G* do corpo (Figura 21.7b), $\int \boldsymbol{\rho}_A \, dm = \mathbf{0}$ e, usando a Equação 21.8, podemos reescrever a Equação 21.14 como

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G$$

Da mesma maneira que no caso do ponto fixo, o último termo no segundo membro dessa equação pode ser representado na forma escalar, caso em que

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2} \qquad (21.16)$$

Podemos observar dessa equação que a energia cinética consiste na soma da energia cinética de translação com a velocidade do centro de massa, $\frac{1}{2}mv_G^2$, e da energia cinética de rotação do corpo.

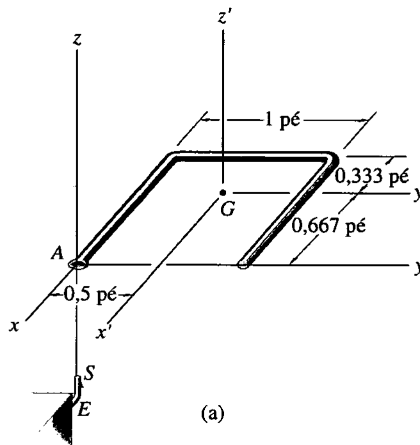
***Princípio do Trabalho e Energia.*** Uma vez formulada a energia cinética para o corpo, podemos aplicar o *princípio do trabalho e energia* para a solução de problemas que envolvem *força*, *velocidade* e *deslocamento*. Nesse caso, somente uma equação escalar pode ser escrita para cada corpo:

$$\boxed{T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2} \qquad (21.17)$$

Antes de se aplicar essa equação, é conveniente fazer uma recapitulação do Capítulo 18.

## EXEMPLO 21.2

A barra mostrada na Figura 21.9*a* pesa 1,5 lb. Determine sua velocidade angular imediatamente após sua extremidade *A* ter caído sobre o gancho em *E*. Devido a um mecanismo de fecho *S* o gancho fornece uma ligação permanente para a barra. Considere que, imediatamente antes de atingir o gancho, a barra está caindo com uma velocidade $(v_G)_1 = 10$ pés/s.



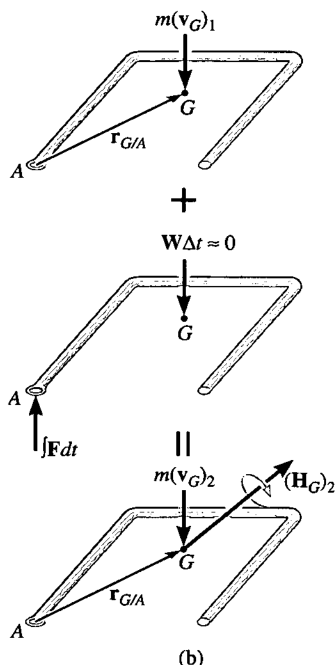




Figura 21.9

## SOLUÇÃO

Como há colisão, usaremos o princípio do impulso e quantidade de movimento/momento angular.

***Diagramas de Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** Consideremos a Figura 21.9*b*. Durante o breve intervalo de tempo $\Delta t$, a força impulsiva **F** que age em *A* muda a quantidade de movimento e o momento angular da barra. (O impulso do peso **W** da barra durante esse intervalo de tempo é pequeno comparado com $\int \mathbf{F}\,dt$, sendo, portanto, desprezível, isto é, a força peso pode ser considerada não impulsiva.) Assim, o momento angular da barra em relação a *A* se conserva, pois o momento de $\int \mathbf{F}\,dt$ em relação a esse ponto é nulo.

***Conservação do Momento Angular.*** A Equação 21.9 deve ser usada para calcular o momento angular da barra, pois *A* só se torna *fixo após* a interação impulsiva com o gancho. Assim, em relação à Figura 21.9*b*, $(\mathbf{H}_A)_1 = (\mathbf{H}_A)_2$, ou

$$\mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_2 + (\mathbf{H}_G)_2 \qquad (1)$$

Pela Figura 21.9*a*, $\mathbf{r}_{G/A} = \{-0{,}667\mathbf{i} + 0{,}5\mathbf{j}\}$ pés. Além disso, os eixos $x'$, $y'$, $z'$ são eixos principais de inércia, pois $I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{z'y'} = 0$. Logo, a partir das equações 21.11, $(\mathbf{H}_G)_2 = I_{x'}\omega_x\mathbf{i} + I_{y'}\omega_y\mathbf{j} + I_{z'}\omega_z\mathbf{k}$. Os momentos de inércia prin cipais são $I_{x'} = 0{,}0272$ slug·pé$^2$, $I_{y'} = 0{,}0155$ slug·pé$^2$, $I_{z'} = 0{,}0427$ slug·pé$^2$ (veja o Problema 21.13). Substituindo esses resultados na Equação 1, temos

$$(-0{,}667\mathbf{i} + 0{,}5\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{4{,}5}{32{,}2}\right)(-10\mathbf{k})\right] = (-0{,}667\mathbf{i} + 0{,}5\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{4{,}5}{32{,}2}\right)(-v_G)_2\mathbf{k}\right]$$
$$+ 0{,}0272\omega_x\mathbf{i} + 0{,}0155\omega_y\mathbf{j} + 0{,}0427\omega_z\mathbf{k}$$

Expandindo e igualando os respectivos componentes **i**, **j**, **k**, obtemos

$$-0{,}699 = -0{,}0699(v_G)_2 + 0{,}0272\omega_x \qquad (2)$$

$$-0{,}932 = -0{,}0932(v_G)_2 + 0{,}0155\omega_y \quad (3)$$

$$0 = 0{,}0427\omega_z \quad (4)$$

***Cinemática.*** Há quatro incógnitas nessas equações. Entretanto, usando a *cinemática*, podemos obter uma quarta equação relacionando $\boldsymbol{\omega}$ com $(\mathbf{v}_G)_2$. Como $\omega_z = 0$ (Equação 4) e após o impacto a barra gira em torno do ponto fixo $A$, a Equação 20.3 pode ser aplicada, o que resulta em $(\mathbf{v}_G)_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}$ ou

$$-(v_G)_2\mathbf{k} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}) \times (-0{,}667\mathbf{i} + 0{,}5\mathbf{j})$$

$$-(v_G)_2 = 0{,}5\omega_x + 0{,}667\omega_y \quad (5)$$

Resolvendo as equações 2 a 5 obtemos

$(\mathbf{v}_G)_2 = \{-8{,}41\mathbf{k}\}$ pés/s $\quad \boldsymbol{\omega} = \{-4{,}09\mathbf{i} - 9{,}55\mathbf{j}\}$ rad/s ***Resposta***

## EXEMPLO 21.3

Aplica-se um torque de 5 N·m ao eixo vertical $CD$ mostrado na Figura 21.10*a* que permite à engrenagem $A$ de 10 kg girar livremente em torno de $CE$. Supondo que $A$ parta do repouso, determine a velocidade angular de $CD$ após duas voltas. Despreze as massas dos eixos e suponha que a engrenagem $A$ possa ser aproximada por um disco fino. A engrenagem $B$ é fixa.

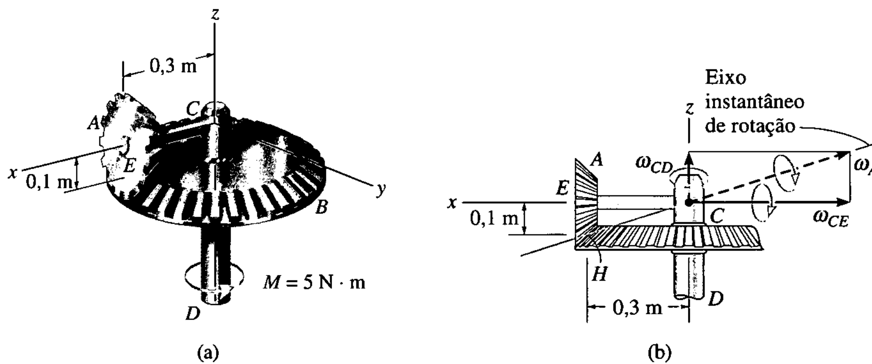



**Figura 21.10**

## SOLUÇÃO

Pode-se usar o princípio do trabalho e energia. Por quê?

***Trabalho.*** Considerando os eixos $CD$ e $CE$ e a engrenagem $A$ como corpos ligados, somente o torque $\mathbf{M}$ realiza trabalho. Para duas revoluções de $CD$, esse trabalho é $\Sigma U_{1-2} = (5\text{ N}\cdot\text{m})(4\pi\text{ rad}) = 62{,}83$ J.

***Energia Cinética.*** Uma vez que a engrenagem parte do repouso, sua energia cinética inicial é nula. A Figura 21.10*b* mostra um diagrama cinemático para a engrenagem. Se a velocidade angular de $CD$ é $\boldsymbol{\omega}_{CD}$, então a velocidade angular da engrenagem $A$ é $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_{CD} + \boldsymbol{\omega}_{CE}$. A engrenagem pode ser imaginada como parte de um corpo rígido estendido (sem massa no restante) que está girando em torno de um *ponto fixo* $C$. O eixo instantâneo de rotação para esse corpo é a reta $CH$, pois os pontos $C$ e $H$ do corpo (engrenagem) têm velocidade nula e, portanto, pertencem ao eixo. Isso exige que os componentes $\boldsymbol{\omega}_{CD}$ e $\boldsymbol{\omega}_{CE}$ relacionem-se pela equação $\omega_{CD}/0{,}1$ m $= \omega_{CE}/0{,}3$ m ou $\omega_{CE} = 3\,\omega_{CD}$. Logo:

$$\boldsymbol{\omega}_A = -\omega_{CE}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} = -3\omega_{CD}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} \quad (1)$$

Os eixos $x, y, z$ na Figura 21.10*a* são *eixos principais de inércia* em $C$ para a engrenagem. Como o ponto $C$ é um ponto fixo, a Equação 21.15 pode ser aplicada para determinar a energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2 \quad (2)$$

Aplicando o teorema dos eixos paralelos, obtemos os momentos de inércia da engrenagem em relação ao ponto $C$:

$$I_x = \frac{1}{2}(10\text{ kg})(0{,}1\text{ m})^2 = 0{,}05\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4}(10\text{ kg})(0{,}1\text{ m})^2 + 10\text{ kg}(0{,}3\text{ m})^2 = 0{,}925\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Como $\omega_x = -3\omega_{CD}$, $\omega_y = 0$ e $\omega_z = \omega_{CD}$, a Equação 2 se torna

$$T_A = \frac{1}{2}(0{,}05)(-3\omega_{CD})^2 + 0 + \frac{1}{2}(0{,}925)(\omega_{CD})^2 = 0{,}6875\omega_{CD}^2$$

***Princípio do Trabalho e Energia.*** Aplicando o princípio do trabalho e energia, temos

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + 62{,}83 = 0{,}6875\omega_{CD}^2$$

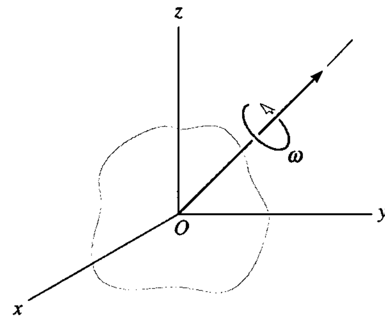
$$\omega_{CD} = 9{,}56\text{ rad/s}$$ ***Resposta***

## PROBLEMAS

**21.21.** Se um corpo *não possui planos de simetria*, os momentos principais de inércia podem ser determinados matematicamente. Para efetuar essa determinação, suponha que o corpo rígido esteja girando com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em torno de um dos eixos principais de inércia. Se $I$ é o momento principal de inércia em relação a esse eixo, o momento angular pode ser expresso como $\mathbf{H} = I\boldsymbol{\omega} = I\omega_x\mathbf{i} + I\omega_y\mathbf{j} + I\omega_z\mathbf{k}$. Os componentes de $\mathbf{H}$ também podem ser expressos pelas equações 21.10, ao supor que o tensor de inércia seja conhecido. Iguale os componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ de ambas as expressões para $\mathbf{H}$ e considere $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ como incógnitas. A solução dessas três equações pode ser obtida contanto que o determinante dos coeficientes seja nulo. Mostre que a expansão desse determinante resulta na equação cúbica

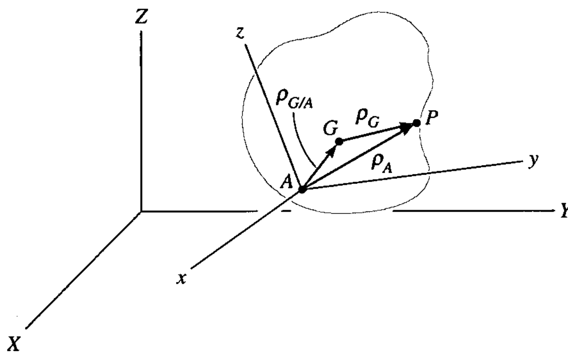
$$I^3 - (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})I^2 + (I_{xx}I_{yy} + I_{yy}I_{zz} + I_{zz}I_{xx} - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)I - (I_{xx}I_{yy}I_{zz} - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xx}I_{yz}^2 - I_{yy}I_{zx}^2 - I_{zz}I_{xy}^2) = 0$$

As três raízes positivas de $I$, obtidas da solução dessa equação, representam os momentos principais de inércia $I_x$, $I_y$ e $I_z$.



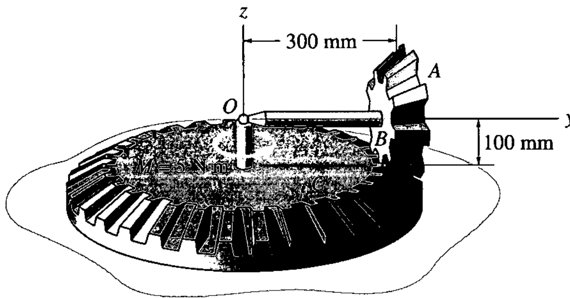

**Problema 21.21**

**21.22.** Mostre que se o momento angular de um corpo é determinado em relação a um ponto arbitrário $A$, então $\mathbf{H}_A$ pode ser expresso pela Equação 21.9. Isso exige que se substitua $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_G + \boldsymbol{\rho}_{G/A}$ na Equação 21.5 e se efetue a expansão, observando-se que $\int \boldsymbol{\rho}_G\, dm = \mathbf{0}$ pela definição de centro de massa e $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{G/A}$.




**Problema 21.22**

**21.23.** A engrenagem $A$ de 2 kg rola sobre a engrenagem fixa $C$. Determine a velocidade angular da barra $OB$ que gira em torno do eixo $z$, após executar uma volta, partindo do repouso. A barra sofre um torque constante $M = 5$ N·m. Despreze a massa da barra $OB$. Suponha que a engrenagem $A$ seja um disco uniforme com 100 m de raio.




**Problema 21.23**

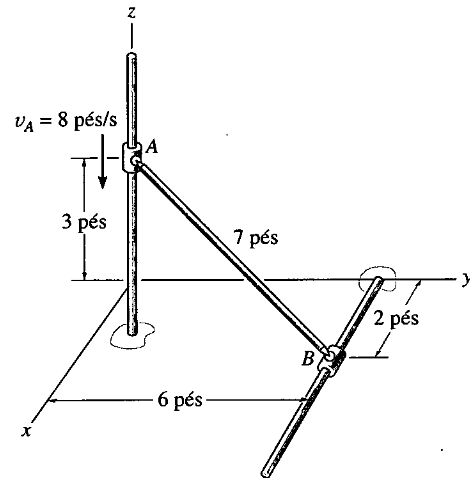
***21.24.** A barra $AB$ tem um peso de 6 lb e está presa por juntas esféricas a dois cursores. Se o cursor $A$ se move para baixo a uma velocidade de 8 pés/s, determine a energia cinética da barra, considerando a situação mostrada na figura. Suponha que a velocidade angular seja perpendicular à barra.

**21.25.** Num dado instante, o colar na extremidade $A$ da barra $AB$ de 6 lb tem velocidade $v_A = 8$ pés/s. Determine a energia cinética da barra após o colar ter descido 3 pés. Despreze o atrito e a espessura da barra. Despreze também a massa do cursor e considere que a barra está presa em suas extremidades por juntas esféricas.

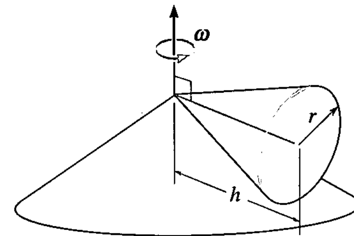
**21.26.** O cone tem uma massa $m$ e rola sem escorregar sobre a superfície cônica, com uma velocidade angular $\omega$ em relação ao eixo vertical. Determine a energia cinética do cone.

**21.27.** A barra pesa 3 lb/pé e está suspensa em $A$ e $B$ por cordas paralelas. Se a barra tem uma velocidade de 2 rad/s, como mostra a figura, determine quanto sobe o centro da barra no instante em que a velocidade se anula.

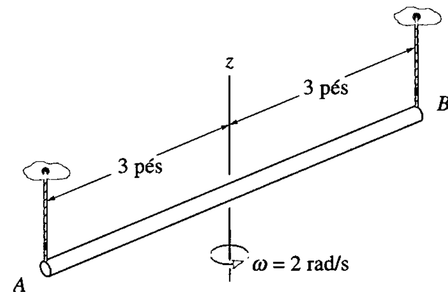
***21.28.** O disco de 5 kg e a barra delgada de 3 kg formam um sistema rígido. Se o sistema está ligado por uma junta esférica em $A$ e sofre a ação de um torque de 5 N·m, determine a velocidade angular da barra em seu movimento em torno do eixo $z$, após o sistema ter realizado duas voltas em torno desse eixo, partindo do repouso. O disco rola sem escorregar.




**Problemas 21.24/25**

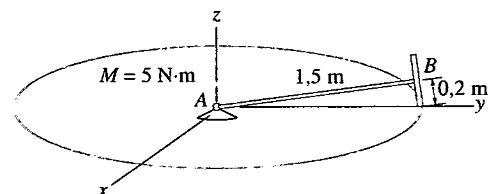



**Problema 21.26**




**Problema 21.27**

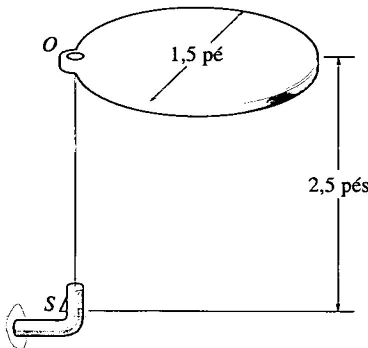
**21.29.** O disco de 5 kg e a barra delgada de 3 kg formam um sistema rígido. Se o sistema está ligado por uma junta esférica em $A$ e sofre a ação de um torque de 5 N·m, que lhe comunica uma velocidade angular $\omega_z = 2$ rad/s em torno do eixo $z$, determine o módulo do momento angular do sistema em relação ao ponto $A$.




**Problemas 21.28/29**

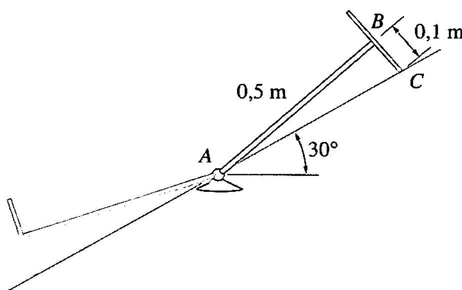
**21.30.** A placa circular tem peso de 19 lb e diâmetro de 1,5 pé. O disco é solto a partir do repouso e cai, em translação,

2,5 pés, atingindo o gancho $S$, que dispõe de mecanismo para uma conexão permanente. Determine a velocidade do centro de massa da placa imediatamente após a conexão ter sido efetuada.




Problema 21.30

**21.31.** O disco fino com 2 kg está unido à barra delgada fixada em $A$ por uma junta esférica. Se o sistema é abandonado a partir do repouso na posição mostrada na figura, determine a rotação do disco em torno da barra quando o disco atinge sua posição mais baixa. Despreze a massa da barra. O disco rola sem escorregar.

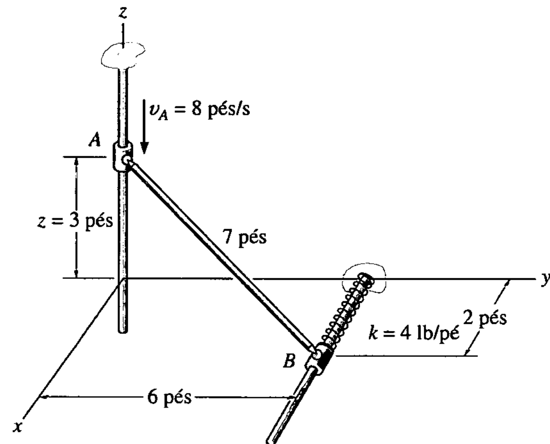



Problema 21.31

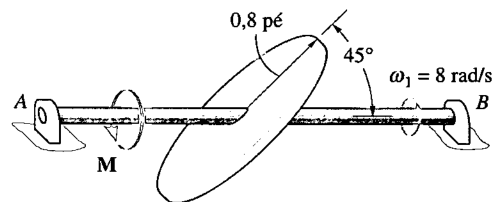
***21.32.** A barra $AB$ tem peso de 6 lb e está presa a dois colares lisos por meio de juntas esféricas. Se o colar $A$ está se movendo para baixo com velocidade de 8 pés/s, quando $z = 3$ pés, determine a velocidade de $A$ no instante em que $z = 0$. A mola tem comprimento de 2 pés, quando não deformada. Despreze a massa dos colares. Suponha que a velocidade angular da barra $AB$ seja perpendicular ao seu eixo.

**21.33.** O disco circular tem peso de 15 lb e está montado a 45° num eixo horizontal. Determine a velocidade angular do eixo quando $t = 3$ s, supondo que ele esteja submetido a um torque $M = 2$ lb · pés. A velocidade angular do eixo no instante $t = 0$, em que se inicia a aplicação do torque, é de 8 rad/s.

**21.34.** O disco circular tem peso de 15 lb e está montado a 45° num eixo horizontal. Determine a velocidade angular do eixo quando $t = 2$ s, supondo que ele esteja submetido a um torque $M = (4e^{0,1t})$ lb · pés, onde $t$ é dado em segundos. A velocidade angular do eixo no instante $t = 0$, em que se inicia a aplicação do torque, é de 8 rad/s.

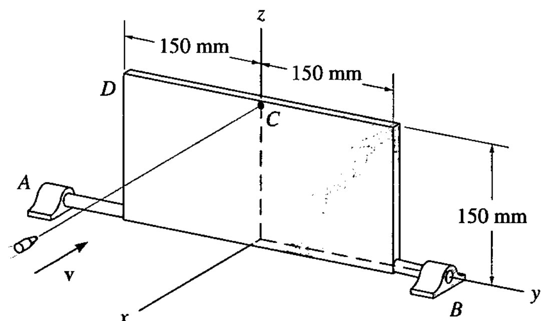



Problema 21.32



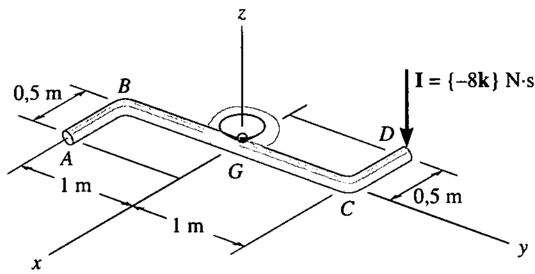

Problemas 21.33/34

**21.35.** A placa retangular de 15 kg pode girar livremente em torno do eixo $y$ graças aos mancais em $A$ e $B$. Uma bala de 3 g é disparada horizontalmente contra a placa que está no plano vertical. A velocidade da bala é $\mathbf{v} = \{-2.000\mathbf{i}\}$ m/s. Calcule a velocidade da placa no instante em que ela completa um giro de 180°. Se a bala atingisse o vértice $D$ com a mesma velocidade $\mathbf{v}$, a velocidade angular seria a mesma? Por quê?



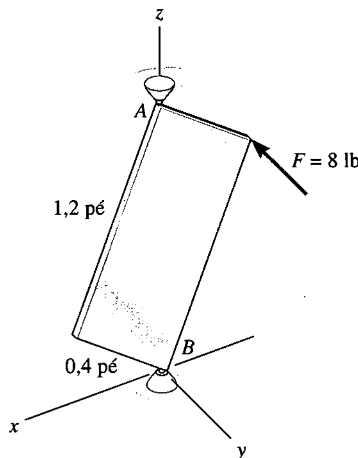

Problema 21.35

***21.36.** O sistema com massa de 0,5 kg/m é sustentado por uma junta esférica em $G$. Se o sistema inicialmente em repouso recebe um impulso $\mathbf{I} = \{-8\mathbf{k}\}$ N · m em $D$, determine a sua velocidade angular imediatamente após o impacto.



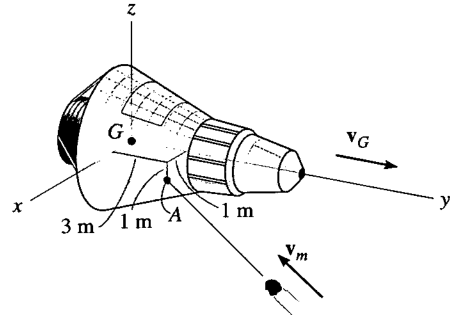

**Problema 21.36**

**21.37.** A placa de 15 lb está submetida a uma força $F = 8$ lb que se mantém perpendicular à sua face. Se a placa está inicialmente em repouso, determine sua velocidade angular após ela ter completado uma volta (360°). A placa pode girar graças às juntas esféricas em $A$ e $B$.




**Problema 21.37**

**21.38.** A cápsula espacial tem massa de 3,5 t e raios de giração $k_x = k_z = 0{,}8$ m e $k_y = 0{,}5$ m. Se a cápsula está viajando com velocidade $\mathbf{v}_G = \{600\mathbf{j}\}$ m/s, calcule sua velocidade angular imediatamente após ela ser atingida por um meteoróide de 0,6 kg com velocidade $\mathbf{V}_m = \{-200\mathbf{i} - 400\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\}$ m/s. Suponha que o meteoróide se engaste na cápsula em $A$ e que esta não possua velocidade angular inicial.




**Problema 21.38**

# *21.4 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Uma vez familiarizados com as técnicas para descrever as propriedades inerciais e o momento angular de um corpo, podemos escrever agora as equações que governam o movimento do corpo, em suas formas mais úteis.

***Equações do Movimento de Translação.*** O *movimento de translação* de um corpo é definido em termos da aceleração de seu centro de massa, medida num referencial inercial $X$, $Y$, $Z$. A equação do movimento de translação para o corpo pode ser escrita na forma vetorial como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \qquad (21.18)$$

ou pelas três equações escalares

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma F_z &= m(a_G)_z \end{aligned}} \qquad (21.19)$$

Nessas equações, $\Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}$ representa a soma de todas as forças externas que agem no corpo.

***Equações do Movimento de Rotação.*** Na Seção 15.6, desenvolvemos a Equação 15.17, a saber,

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{21.20}$$

Essa equação estabelece que a soma dos momentos (ou torques), em relação a um ponto fixo $O$, de todas as forças externas que agem num sistema de pontos materiais (formando um corpo rígido) é igual à derivada temporal do momento angular total do corpo, em relação ao ponto fixo $O$. Quando os torques das forças externas que agem nos pontos materiais são somados em relação ao *centro de massa* $G$, novamente obtém-se a *mesma* forma simples da Equação 21.20, relacionando a soma dos momentos $\Sigma\mathbf{M}_G$ à derivada do momento angular $\mathbf{H}_G$. Para demonstrar esse resultado, consideremos o sistema de pontos materiais mostrado na Figura 21.11, onde $X$, $Y$, $Z$ representam um referencial inercial e os eixos $x, y, z$, com origem em $G$, se *transladam* em relação a esse sistema. Em geral, $G$ é *acelerado*, e assim, por definição, o sistema em translação *não* é inercial. Entretanto, o momento angular do $i$-ésimo ponto material em relação a esse referencial é

$$(\mathbf{H}_i)_G = \mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{v}_{i/G}$$

onde $\mathbf{r}_{i/G}$ e $\mathbf{v}_{i/G}$ representam a posição e a velocidade do $i$-ésimo ponto, em relação a $G$, respectivamente. Derivando em relação ao tempo, temos

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = \dot{\mathbf{r}}_{i/G} \times m_i\mathbf{v}_{i/G} + \mathbf{r}_{i/G} \times m_i\dot{\mathbf{v}}_{i/G}$$

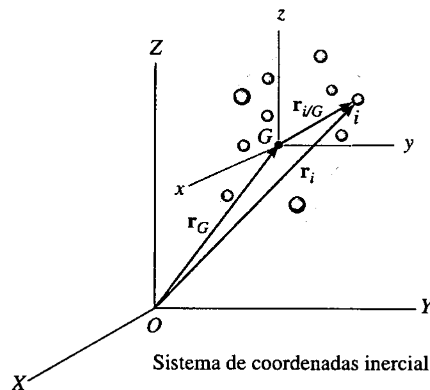



**Figura 21.11**

Por definição, $\mathbf{v}_{i/G} = \dot{\mathbf{r}}_{i/G}$. Logo, o primeiro termo no segundo membro da equação anterior é igual a zero, pois o produto vetorial de um vetor por ele mesmo é nulo. Além disso, $\mathbf{a}_{i/G} = \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$, de modo que

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = (\mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{a}_{i/G})$$

Expressões análogas podem ser escritas para outros pontos do corpo. Somando os resultados, temos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{a}_{i/G})$$

onde $\dot{\mathbf{H}}_G$ é a derivada temporal do momento angular em relação ao centro de massa $G$.

A aceleração relativa do ponto $i$ é definida pela equação $\mathbf{a}_{i/G} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_G$, onde $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{a}_G$ representam, respectivamente, as acelerações do $i$-ésimo ponto e do centro de massa $G$, em relação ao *referencial inercial*. Substituindo os resultados, expandindo e fazendo uso da propriedade distributiva do produto vetorial, obtemos:

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{a}_i) - (\Sigma m_i\mathbf{r}_{i/G}) \times \mathbf{a}_G$$

Por definição de centro de massa, a soma $(\Sigma m_i\mathbf{r}_{i/G}) = (\Sigma m_i)\bar{\mathbf{r}}$ é nula, pois o vetor de posição relativo a $G$ é nulo. Logo, o último termo da equação anterior é nulo. Usando a equação de movimento, o produto $m_i\mathbf{a}_i$ pode ser substituído pela resultante $\mathbf{F}_i$ das forças externas que agem no $i$-ésimo ponto do corpo. Denotando $\Sigma\mathbf{M}_G = (\Sigma\mathbf{r}_{i/G} \times \mathbf{F}_i)$, o resultado final pode ser escrito como

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad (21.21)$$

A equação de movimento para a rotação do corpo pode ser estabelecida tanto pela Equação 21.20 quanto pela Equação 21.21. Os componentes escalares do momento angular $\mathbf{H}_O$ ou $\mathbf{H}_G$ são definidos pelas equações 21.10 ou 21.11, se os eixos principais de inércia são usados no ponto $O$ ou no centro de massa $G$. Se esses componentes são calculados em relação aos eixos $x, y, z$ que giram com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$, que pode ser *diferente* da velocidade angular do corpo, $\boldsymbol{\omega}$, então a derivada temporal $\dot{\mathbf{H}} = d\mathbf{H}/dt$, usada nas equações 21.20 e 21.21, deve levar em conta a rotação dos eixos $x, y, z$ medida no referencial inercial $X, Y, Z$. Logo, a derivada temporal de $\mathbf{H}$ deve ser determinada pela Equação 20.6 e as equações 21.20 e 21.21 podem ser escritas como

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O$$

$$\Sigma\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (21.22)$$

Nessas equações $(\dot{\mathbf{H}})_{xyz}$ é a derivada temporal de $\mathbf{H}$ medida no referencial $x, y, z$.

Há três maneiras de definir o movimento dos eixos $x, y, z$. Obviamente, o movimento desse referencial deve ser escolhido de modo que resulte no conjunto mais simples de equações dos momentos para a solução de um determinado problema.

***Eixos x, y, z, com $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$.*** Se o corpo tem movimento geral, os eixos $x, y, z$ podem ser escolhidos com origem em $G$ e *em translação* relativamente ao sistema inercial $X, Y, Z$. Essa escolha certamente simplifica a Equação 21.22, pois $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Todavia, o corpo pode ter uma velocidade de rotação em relação a esses eixos e, nesse caso, os momentos e produtos de inércia do corpo seriam *funções do tempo*. Em muitos casos isto resultaria numa tarefa difícil, de modo que a escolha tem valor restrito.

***Eixos x, y, z, com $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$.*** Os eixos podem ser *fixados no corpo e, portanto, movidos com ele.* Os momentos e produtos de inércia relativos a esses eixos serão constantes durante o movimento. Como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, as equações 21.22 se tornam

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O$$

$$\Sigma\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (21.23)$$

Usando as equações 21.10, podemos expressar cada uma das equações vetoriais anteriores como três equações escalares. Ignorando os subscritos $O$ e $G$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z - I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) \\
&\qquad - I_{zx}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y) \\
\Sigma M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x - I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) \\
&\qquad - I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) \\
\Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y - I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) \\
&\qquad - I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x)
\end{aligned}
\tag{21.24}
$$

Observemos que para um corpo rígido simétrico relativamente ao plano de referência $x$–$y$, com um movimento plano geral nesse plano, $I_{xz} = I_{yz} = 0$ e $\omega_x = \omega_y = d\omega_x/dt = d\omega_y/dt = 0$. As equações 21.24 são reduzidas à forma $\Sigma M_x = \Sigma M_y = 0$ e $\Sigma M_z = I_{zz}\alpha_z$ (onde $\alpha_z = \dot{\omega}_z$), que é essencialmente a terceira das equações 17.16 ou 17.17, dependendo da escolha do ponto $O$ ou $G$ para o cálculo dos momentos.

Se os eixos $x$, $y$ e $z$ forem escolhidos como *eixos principais de inércia*, os produtos de inércia serão, obviamente, nulos e as equações 21.24 serão reduzidas à forma

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z \\
\Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \\
\Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y
\end{aligned}
}
\tag{21.25}
$$

O conjunto dessas equações é conhecido historicamente como as *equações de Euler do movimento*, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, que as deduziu pela primeira vez. Essas equações se aplicam *apenas* aos momentos calculados em relação a $O$ ou $G$.

Quando aplicamos as equações 21.25 devemos ter em mente que $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ representam as derivadas temporais dos componentes $x, y, z$ de $\boldsymbol{\omega}$ observadas de $x, y, z$. Como os eixos $x, y, z$ giram com $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, devemos observar da Equação 20.6 que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$. Como $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, então $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Esse resultado importante indica que as derivadas temporais de $\boldsymbol{\omega}$ podem ser obtidas de duas maneiras: tanto encontrando primeiro os componentes de $\boldsymbol{\omega}$ ao longo dos eixos $x$, $y$, $z$, com esses eixos numa orientação geral, e *a seguir* derivando os componentes, isto é, $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$, quanto derivando $\boldsymbol{\omega}$ em relação ao sistema $X$, $Y$, $Z$, isto é, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, e então determinando os componentes $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$. Na prática, é mais fácil, em geral, calcular $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$, como base na obtenção de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Veja o Exemplo 21.5.

***Eixos x, y, z, com $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$.*** Para se simplificarem os cálculos da derivada temporal de $\boldsymbol{\omega}$, é conveniente em muitos casos escolher eixos $x$, $y$, $z$ com uma velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ diferente da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo. Isso é particularmente útil na análise de piões e giroscópios que são *simétricos* em relação aos seus eixos de rotação.[1] Nesses casos, os momentos e produtos de inércia permanecem constantes durante o movimento.

[1] Na Seção 21.5 discutimos detalhadamente esses dispositivos.

As equações 21.22 são aplicáveis para esses casos. Cada uma dessas equações pode ser reduzida a um conjunto de três equações escalares que podem ser obtidas de maneira semelhante àquela das equações 21.25;[2] isto é,

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y \end{aligned} \quad (21.26)$$

Nessas equações, $\Omega_x$, $\Omega_y$, $\Omega_z$ representam os componentes de $\mathbf{\Omega}$, medidos no referencial inercial, e $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ devem ser determinados relativamente aos eixos $x$, $y$, $z$ que giram com velocidade $\mathbf{\Omega}$. Veja o Exemplo 21.6.

Qualquer um dos conjuntos de equações de momentos (equações 21.24, 21.25 ou 21.26) representa uma série de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não-lineares. Essas equações estão 'acopladas', pois os componentes de velocidade angular estão presentes em todos os termos. O sucesso na solução de um dado problema depende, portanto, de qual é a incógnita. A dificuldade aparece certamente quando se tenta resolver o problema para os componentes desconhecidos de $\boldsymbol{\omega}$, dados os momentos externos como funções do tempo. Complicações adicionais poderão ocorrer se as equações dos momentos estiverem acopladas às três equações escalares do movimento de translação (equações 21.19). Isso pode acontecer devido à existência de vínculos cinemáticos que relacionam a rotação do corpo à sua translação associada com o movimento do seu centro de massa, como por exemplo o movimento de um aro que rola sem escorregar. Problemas que envolvem a solução de um sistema de equações diferenciais geralmente exigem a aplicação de métodos numéricos auxiliados por computadores. Em muitos problemas de engenharia, entretanto, exige-se a determinação dos momentos aplicados, dadas as informações sobre o movimento do corpo. Felizmente, muitos desses tipos de problemas têm soluções diretas, de modo que não há necessidade de se recorrer a técnicas computacionais.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Problemas que envolvem o movimento tridimensional de um corpo rígido podem ser resolvidos usando-se o seguinte procedimento.

### *Diagrama de Corpo Livre*

- Construa um diagrama de corpo livre para o corpo no instante considerado e especifique o sistema de coordenadas $x$, $y$, $z$. A origem desse sistema deve ser tomada como coincidente com o centro de massa $G$ do corpo ou com um ponto $O$ fixo em um referencial inercial. O ponto $O$ deve pertencer ao corpo ou a uma extensão sem massa desse corpo.
- Forças de reação desconhecidas podem ser representadas com um sentido positivo de sua direção.
- Dependendo da natureza do problema, decida o tipo de velocidade angular $\mathbf{\Omega}$ que o sistema de coordenadas $x$, $y$, $z$ deve possuir, isto é, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ ou $\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$. Ao fazer a escolha, tenha em mente que as equações dos momentos são simplificadas quando os eixos são eixos principais de inércia, durante todo o movimento.
- Calcule os momentos e produtos de inércia para os eixos relativos $x$, $y$, $z$.

[2] Veja o Problema 21.41.

### PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE (CONTINUAÇÃO)

*Cinemática*

- Determine os componentes $x, y, z$ da velocidade angular do corpo e calcule suas derivadas temporais.
- Observe que, se $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}, \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$ e podemos proceder de duas maneiras alternativas. Podemos não só obter os componentes de $\boldsymbol{\omega}$ ao longo dos eixos $x, y, z$ orientados segundo uma posição geral e, a seguir, tomar a derivada temporal desses componentes, $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$, como também encontrar a derivada temporal de $\boldsymbol{\omega}$ em relação aos eixos $X, Y, Z$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, e, então, determinar os componentes $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$.

*Equações de Movimento*

- Aplique as duas equações vetoriais 21.18 e 21.22 ou, alternativamente, as correspondentes seis equações escalares apropriadas para os eixos coordenados escolhidos.

## EXEMPLO 21.4

A engrenagem mostrada na Figura 21.12*a* tem massa de 10 kg e está montada a um ângulo de 10° em um eixo de massa desprezível. Se $I_z = 0{,}1$ kg·m², $I_x = I_y = 0{,}05$ kg·m² e o eixo está girando a uma velocidade angular constante $\omega = 30$ rad/s, determine as reações dos mancais $A$ e $B$, como mostra a figura.

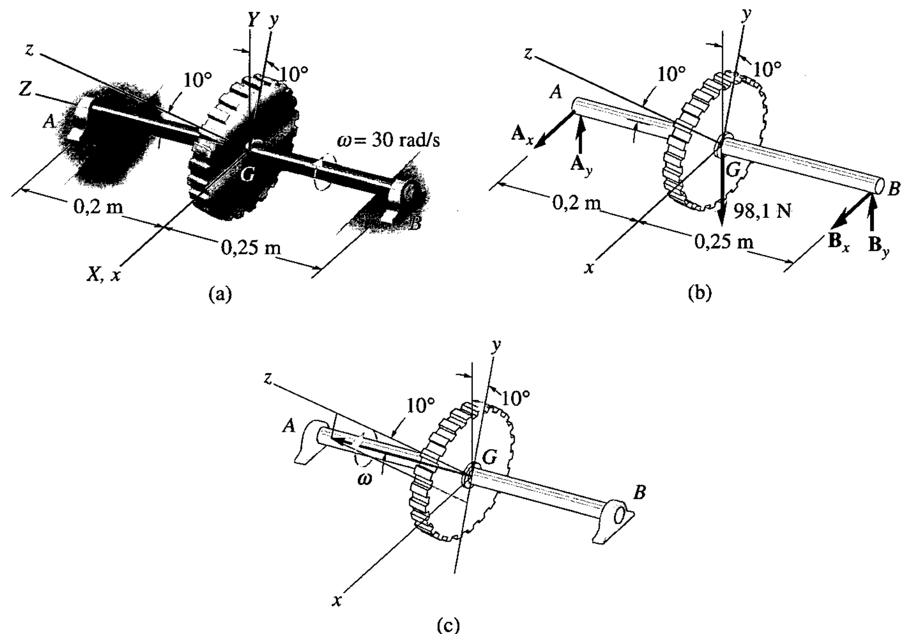



**Figura 21.12**

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Consideremos a Figura 21.12*b*. A origem do sistema de coordenadas $x, y, z$ está localizada no centro de massa $G$ da engrenagem, que coincidentemente é um ponto fixo. Os eixos estão fixos na engrenagem e, portanto, giram com ela. Além disso, eles sempre representarão os eixos principais de inércia da engrenagem. Nessas condições, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$.

***Cinemática.*** Como mostra a Figura 21.12*c*, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da engrenagem é constante em módulo e tem sempre a direção do eixo $AB$. Como esse vetor é medido no sistema inercial $X$, $Y$, $Z$, tem-se para qualquer posição dos eixos $x$, $y$, $z$

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = -30 \text{ sen } 10° \qquad \omega_z = 30 \cos 10°$$

Esses componentes permanecem constantes para qualquer orientação dos eixos $x$, $y$, $z$, logo $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$. Observemos também que como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, então $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$ e podemos obter essas derivadas temporais relativamente aos eixos $X$, $Y$, $Z$. A velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ tem módulo, direção e sentido $(+Z)$ constantes, assim $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, ou $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$. Além disso, como $G$ é fixo, $(a_G)_x = (a_G)_y = (a_G)_z = 0$.

***Equações de Movimento.*** Aplicando as equações 21.25 ($\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$) temos

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$-(A_Y)(0{,}2) + (B_Y)(0{,}25) = 0 - (0{,}05 - 0{,}1)(-30 \text{ sen } 10°)(30 \cos 10°)$$

$$-0{,}2A_Y + 0{,}25B_Y = -7{,}70 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

$$A_X(0{,}2) \cos 10° - B_X(0{,}25) \cos 10° = 0 + 0$$

$$A_X = 1{,}25B_X \qquad (2)$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$A_X(0{,}2) \text{ sen } 10° - B_X(0{,}25) \text{ sen } 10° = 0 + 0$$

$$A_X = 1{,}25B_X$$

A aplicação das equações 21.19 resulta em

$\Sigma F_X = m(a_G)_X;$ $\qquad A_X + B_X = 0 \qquad (3)$

$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y;$ $\qquad A_Y + B_Y - 98{,}1 = 0 \qquad (4)$

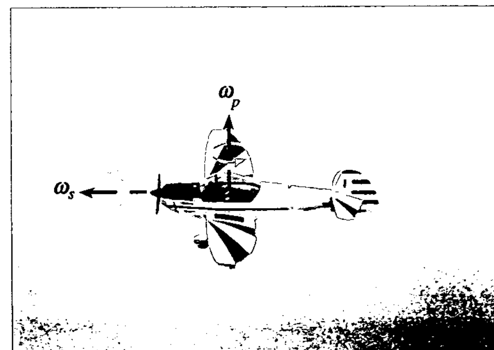
$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z;$ $\qquad 0 = 0$

Resolvendo o sistema de equações 1 a 4, obtemos finalmente

$A_X = B_X = 0 \qquad A_Y = 71{,}6 \text{ N} \qquad B_Y = 26{,}5 \text{ N}$ ***Resposta***

## EXEMPLO 21.5

O avião mostrado na Figura 21.13*a* está fazendo uma curva *horizontal* a uma taxa $\omega_p$. Durante o movimento, a hélice do avião gira a uma taxa $\omega_s$. Se a hélice tem duas pás, determine os torques que o eixo da hélice exerce nesta no instante em que as pás estão na direção vertical. Para simplificar, considere que as pás formam uma barra delgada e uniforme com momento de inércia $I$ em torno de um eixo que é perpendicular a elas e passa pelo seu centro. Suponha também que o momento de inércia em relação ao eixo longitudinal da hélice seja zero.




(a)

**Figura 21.13**

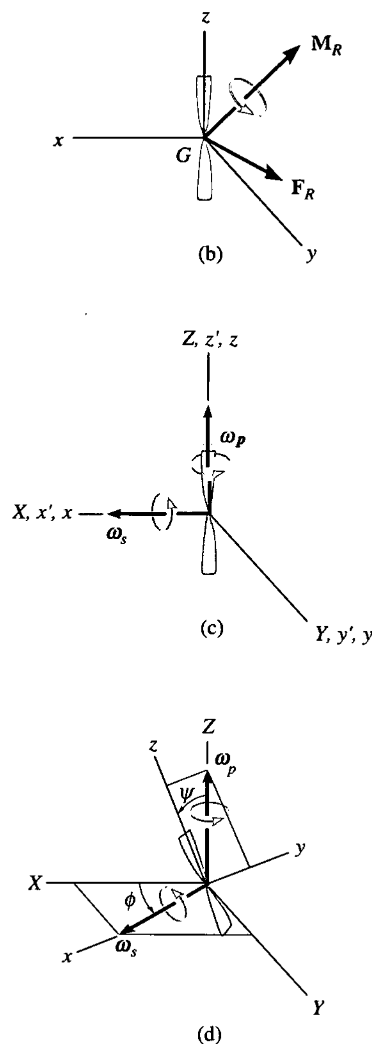



**Figura 21.13**

## SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Consideremos a Figura 21.13*b*. O efeito de ligação do eixo à hélice está indicado pelas resultantes $\mathbf{F}_R$ e $\mathbf{M}_R$. (Despreze o peso da hélice.) Os eixos $x, y, z$ serão fixados na hélice, pois esses eixos sempre representarão os seus eixos principais de inércia. Assim, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$. Os momentos de inércia $I_x$ e $I_y$ são iguais a $I$ e $I_z = 0$.

***Cinemática.*** A velocidade angular da hélice observada do sistema $X, Y, Z$, coincidente com o sistema $x, y, z$ (Figura 21.13*c*), é $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \omega_s\mathbf{i} + \omega_p\mathbf{k}$, de modo que os componentes $x, y, z$ de $\boldsymbol{\omega}$ são

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_p$$

Como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, então $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. A derivada temporal de $\boldsymbol{\omega}$ pode ser determinada em relação aos eixos fixos $X, Y, Z$, usando as equações 20.6, pois $\boldsymbol{\omega}$ muda de direção relativamente a $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$. Como $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$, então $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p$. A taxa temporal de variação de cada um desses componentes relativamente aos eixos $X, Y, Z$ pode ser obtida usando-se um terceiro sistema $x', y', z'$, que tem velocidade $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_p$ e coincide com os eixos $X, Y, Z$ no instante considerado. Logo,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} \\ &= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{x'y'z'} + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \omega_p\mathbf{k} \times \omega_s\mathbf{i} + \mathbf{0} = \omega_p\omega_s\mathbf{j}\end{aligned}$$

Como os eixos $X$, $Y$, $Z$ coincidem com os eixos $x$, $y$, $z$ no instante considerado, os componentes de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ao longo de $x, y, z$ são dados por

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p\omega_s \qquad \dot{\omega}_z = 0$$

Esses mesmos resultados também podem ser obtidos pelo cálculo direto da $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$; todavia, isso exige um pouco mais de trabalho. De fato, será necessário ver a hélice (ou os eixos $x$, $y$, $z$) em uma *posição genérica*, como mostra a Figura 21.13*d*. Nessa figura, o plano está girado de um ângulo $\phi$ e a hélice girou de $\psi$ relativamente ao plano. Observemos que $\boldsymbol{\omega}_p$ está sempre orientado ao longo do eixo fixo $Z$ e $\boldsymbol{\omega}_s$ segue o eixo $x$. Assim, os componentes de $\boldsymbol{\omega}$ são

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = \omega_p \operatorname{sen} \psi \qquad \omega_z = \omega_p \cos \psi$$

Como $\omega_s$ e $\omega_p$ são constantes, as derivadas temporais desses componentes são

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p \cos \psi \, \dot{\psi} \qquad \omega_z = -\omega_p \operatorname{sen} \psi \, \dot{\psi}$$

Mas $\phi = \psi = 0°$ e $\dot{\psi} = \omega_s$ na situação considerada. Logo:

$$\begin{aligned}&\omega_x = \omega_s \qquad &&\omega_y = 0 \qquad &&\omega_z = \omega_p \\ &\dot{\omega}_x = 0 \qquad &&\dot{\omega}_y = \omega_p\omega_s \qquad &&\dot{\omega}_z = 0\end{aligned}$$

que são os resultados obtidos anteriormente.

***Equações de Movimento.*** Usando as equações 21.25, temos

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = I(0) - (I - 0)(0)\omega_p$$

$$M_x = 0$$ ***Resposta***

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = I(\omega_p\omega_s) - (0 - I)\omega_p\omega_s$$

$$M_y = 2I\omega_p\omega_s$$ ***Resposta***

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = 0(0) - (I - I)\omega_s(0)$$

$$M_z = 0$$ ***Resposta***

## EXEMPLO 21.6

O volante de 10 kg (ou disco fino) mostrado na Figura 21.14*a* gira em torno do eixo com velocidade angular constante $\omega_s = 6$ rad/s. Ao mesmo tempo, o eixo gira (precessão) em torno do mancal em *A* com velocidade angular $\omega_p = 3$ rad/s. Se o mancal em *A* é axial (mancal de pressão) e o mancal em *B* é radial, determine os componentes da força de reação em cada um dos suportes.

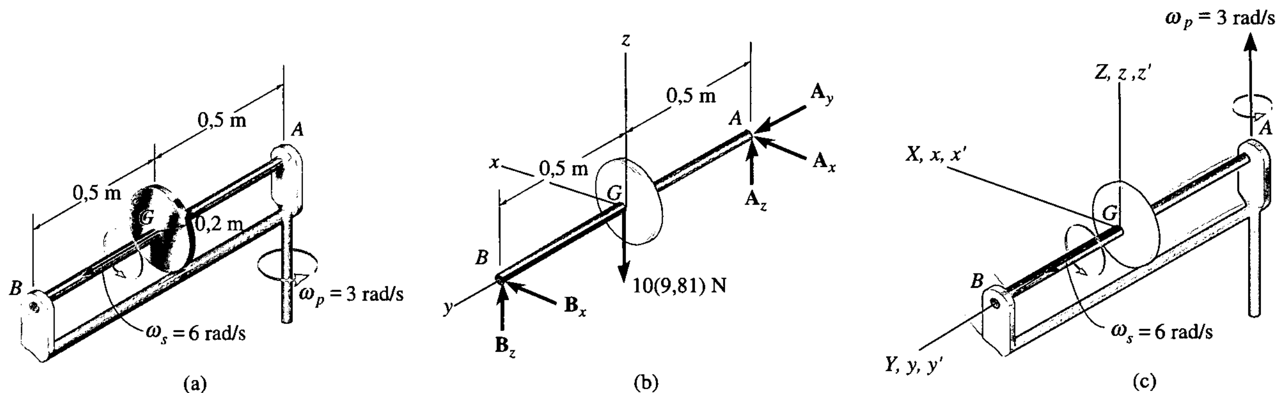



**Figura 21.14**

## SOLUÇÃO I

***Diagrama de Corpo Livre.*** Observemos a Figura 21.14*b*. A origem do sistema *x*, *y*, *z* está localizada no centro de massa *G* do volante. Consideraremos para esse referencial uma velocidade $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{k}\}$ rad/s. Embora o volante gire relativamente a esses eixos, os momentos de inércia *permanecem constantes*,[3] isto é

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{4}(10\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2 = 0{,}1\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_y = \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(0{,}2\text{ m})^2 = 0{,}2\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

***Cinemática.*** Em relação ao sistema inercial *X*, *Y*, *Z*, coincidente (Figura 21.14*c*), o volante tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$rad/s, de modo que

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 6\text{ rad/s}, \quad \omega_z = 3\text{ rad/s}$$

A derivada temporal de $\boldsymbol{\omega}$ deve ser determinada relativamente ao sistema *x*, *y*, *z*. Nesse caso, tanto $\boldsymbol{\omega}_p$ quanto $\boldsymbol{\omega}_s$ não se modificam e, portanto,

$$\dot{\omega}_x = 0, \quad \dot{\omega}_y = 0, \quad \dot{\omega}_z = 0$$

[3] Isso não seria verdadeiro para a hélice no Exemplo 21.5.

***Equações de Movimento.*** Aplicando as equações 21.26 ($\Omega \neq \omega$) temos

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$

$$-A_z(0{,}5) + B_z(0{,}5) = 0 - (0{,}2)(3)(6) + 0 = -3{,}6$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$

$$0 = 0 - 0 + 0$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$

$$A_x(0{,}5) - B_x(0{,}5) = 0 - 0 + 0$$

A aplicação da Equação 21.19 resulta em

$\Sigma F_X = m(a_G)_X;$ $\quad A_x + B_x = 0$

$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y;$ $\quad A_y = -10(0{,}5)(3)^2$

$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z;$ $\quad A_z + B_z - 10(9{,}81) = 0$

Resolvendo as equações acima, obtemos

$A_x = 0 \quad A_y = -45{,}0\text{ N} \quad A_z = 52{,}6\text{ N}$ ***Resposta***

$B_x = 0 \quad B_z = 45{,}4\text{ N}$ ***Resposta***

Observemos que, se não ocorresse a precessão, $\boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{0}$, as reações em $A$ e $B$ seriam iguais a 49,05 N. No caso aqui estudado, todavia, a diferença nas reações é provocada pelo 'momento giroscópico' criado toda vez que um corpo em rotação apresenta movimento de precessão em torno de outro eixo. Esse efeito será estudado com mais detalhes na próxima seção.

## SOLUÇÃO II

Este exemplo também pode ser resolvido usando-se as equações de Euler para o movimento (equações 21.25). Nesse caso, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$rad/s e a derivada temporal $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$ pode ser obtida convenientemente em relação ao sistema fixo $X$, $Y$, $Z$, pois $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Esse cálculo pode ser realizado ao se escolherem os eixos $x'$, $y'$, $z'$ com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_p$ (Figura 21.14*c*), de modo que

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} + 3\mathbf{k} \times (6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \{-18\mathbf{i}\}\text{ rad/s}^2$$

$$\dot{\omega}_x = -18\text{ rad/s} \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0$$

As equações para os momentos tornam-se, então,

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$-A_x(0{,}5) + B_z(0{,}5) = 0{,}1(-18) - (0{,}2 - 0{,}1)(6)(3) = -3{,}6$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

$$0 = 0 - 0$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$A_x(0{,}5) - B_x(0{,}5) = 0 - 0$$

A solução segue como anteriormente.

## PROBLEMAS

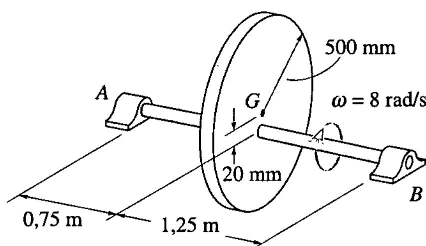
**21.39.** Deduza a forma escalar da equação de movimento rotacional ao longo do eixo $x$ quando $\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$ e os momentos e produtos de inércia do corpo *não são constantes* no tempo.

***21.40.** Deduza a forma escalar da equação de movimento rotacional ao longo do eixo $x$ quando $\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$ e os momentos e produtos de inércia do corpo são *constantes* no tempo.

**21.41.** Deduza as equações de Euler para o movimento, considerando $\mathbf{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$, isto é, as equações 21.26.

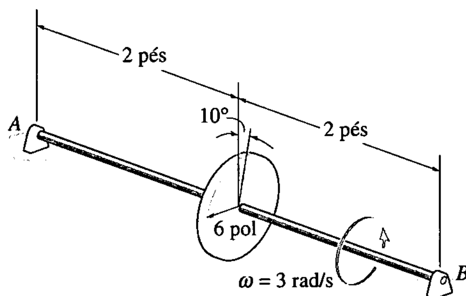
**21.42.** O volante (disco) de 40 kg está montado com seu eixo a 20 mm de seu centro de massa em $G$. Se o eixo está girando com velocidade angular constante $\omega = 8$ rad/s, determine as reações máximas nos mancais $A$ e $B$.

**21.43.** O volante (disco) de 40 kg está montado com seu eixo a 20 mm de seu centro de massa em $G$. Se o eixo está girando com velocidade angular constante $\omega = 8$ rad/s, determine as reações mínimas nos mancais $A$ e $B$ durante o movimento.



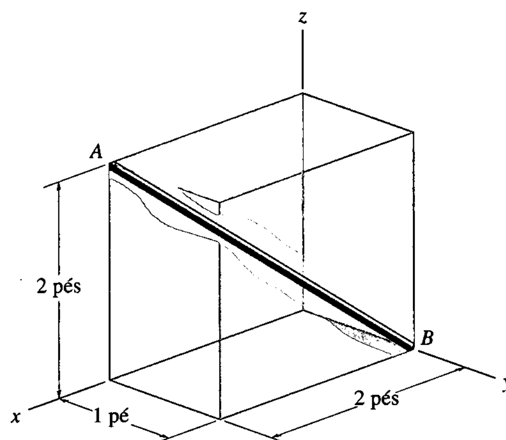

**Problemas 21.42/43**

***21.44.** O disco de 20 lb está montado em um eixo horizontal $AB$, de modo que seu plano forma um ângulo de 10° com a vertical. Se o eixo gira com velocidade angular de 3 rad/s, determine as reações verticais desenvolvidas nos mancais quando o disco ocupa a posição mostrada na figura.



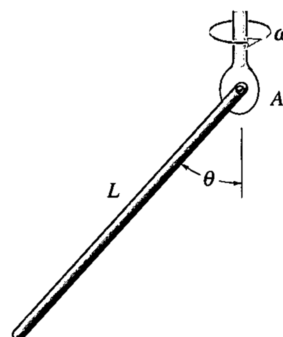

**Problema 21.44**

**21.45.** A barra de 4 lb apóia-se nos vértices lisos de uma caixa aberta. Num dado instante, a caixa tem velocidade $\mathbf{v} = \{3\mathbf{j}\}$ pés/s e aceleração $\mathbf{a} = \{-6\mathbf{j}\}$ pés/s$^2$. Determine os componentes $x$, $y$, $z$ da força que os vértices exercem na barra.



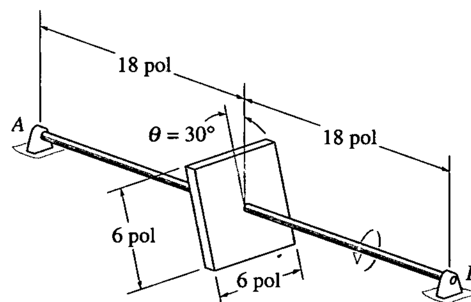

**Problema 21.45**

**21.46.** O pêndulo cônico consiste em uma barra de massa $m$ e comprimento $L$ que é sustentada por um pino em sua extremidade $A$. Se o pino está submetido a uma rotação com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, determine o ângulo $\theta$ que a barra forma com a vertical durante o seu movimento de rotação. Determine também os componentes da reação no pino.



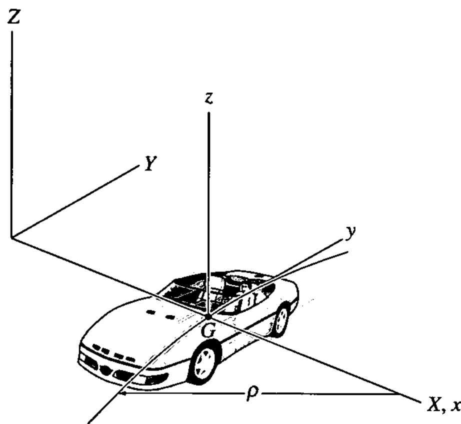

**Problema 21.46**

**21.47.** A placa de 20 lb está montada num eixo $AB$ de tal modo que seu plano forma um ângulo $\theta = 30°$ com a vertical. Se o eixo está girando no sentido indicado na figura, com velocidade angular de 25 rad/s, determine as reações verticais nos mancais $A$ e $B$ quando a placa está na posição mostrada.



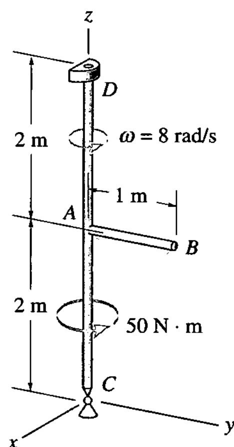

**Problema 21.47**

***21.48.** O carro está trafegando numa curva (raio $\rho$) de uma estrada, de forma que seu centro de massa tem velocidade escalar $v_G$. Escreva as equações do movimento de rotação em relação aos eixos $x$, $y$, $z$. Suponha que sejam conhecidos os seis momentos e produtos de inércia do carro.



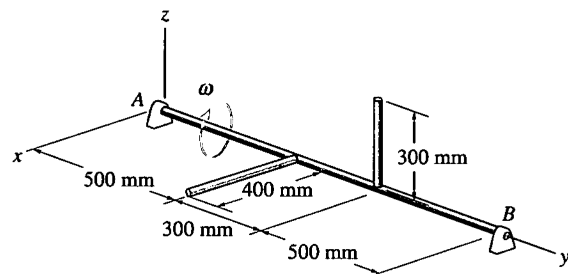

**Problema 21.48**

**21.49.** O conjunto de barras é mantido por uma junta esférica em $C$ e um mancal em $D$, que desenvolve apenas forças de reação $x$ e $y$. As barras têm massa de 0,75 kg/m. Determine a aceleração angular das barras e os componentes da reação nos suportes no instante em que $\omega = 8$ rad/s e a barra está na posição mostrada na figura.



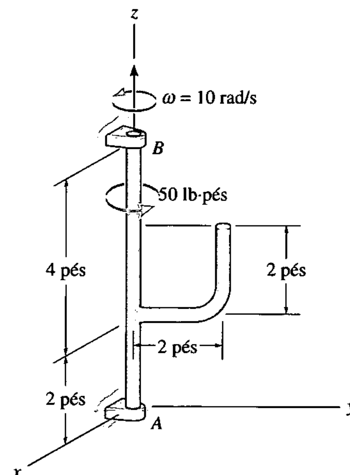

**Problema 21.49**

**21.50.** O arranjo de barras é mantido por mancais em $A$ e $B$, desenvolvendo apenas reações $x$ e $y$ no eixo. Se o eixo $AB$ está girando no sentido mostrado na figura, com velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \{-5\mathbf{j}\}$ rad/s, determine as reações nos mancais quando o sistema está na posição mostrada na figura. Qual é a aceleração angular do eixo? A massa de cada barra é 1,5 kg/m.




**Problema 21.50**

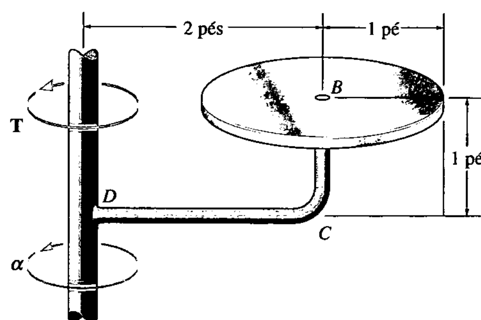
**21.51.** O arranjo de barras tem peso de 5 lb/pé. Ele é mantido em $B$ por um mancal liso que desenvolve forças de reação $x$ e $y$ e em $A$ por um mancal liso que desenvolve forças de reação $x$, $y$, $z$. Aplica-se um torque de 50 lb · pés ao longo da barra $AB$. Determine os componentes das reações nos mancais quando a velocidade angular for $\omega = 10$ rad/s, como mostra a figura.




**Problema 21.51**

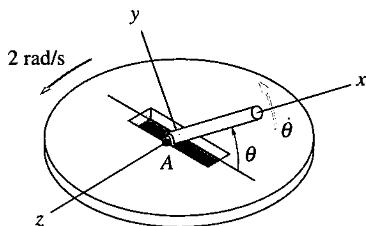
***21.52.** O disco de 25 lb está fixo na barra $BCD$ que tem massa desprezível. Determine o torque $T$ que deve ser aplicado ao eixo vertical para que este tenha uma aceleração angular $\alpha = 6$ rad/s$^2$. O eixo pode girar livremente em seus mancais.

**21.53.** Resolva o Problema 21.52 supondo que a barra $BCD$ tenha peso de 2 lb/pé.



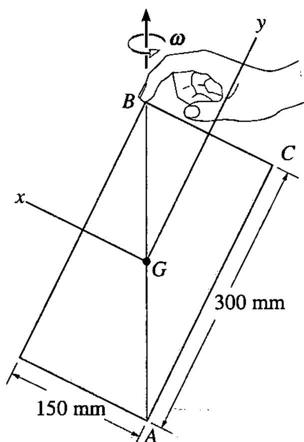

**Problemas 21.52/53**

**21.54.** A barra *fina* tem massa de 0,8 kg e comprimento total de 150 mm. A barra gira em torno de seu ponto médio a uma taxa constante $\dot{\theta} = 6$ rad/s, enquanto a mesa à qual seu eixo está preso gira a 2 rad/s. Determine os componentes $x$, $y$, $z$ do momento exercido pelo eixo sobre a barra quando esta tem posição $\theta$.



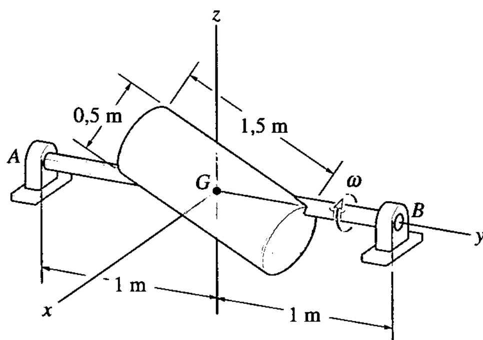

**Problema 21.54**

**21.55.** Uma placa uniforme e fina com massa de 0,4 kg está girando com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$ em torno de sua diagonal $AB$. Se a pessoa segurando o vértice da placa em $B$ tirar o dedo, a placa cairá sobre seu lado $AC$. Determine o torque $M$ a ser aplicado à placa para evitar que isso ocorra.



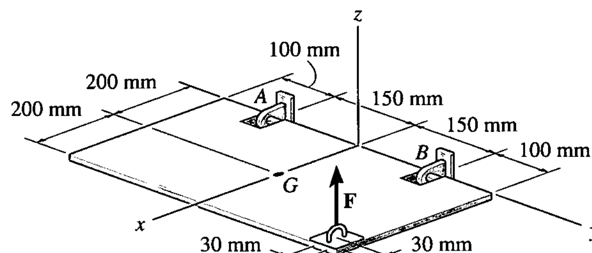

**Problema 21.55**

***21.56.** O cilindro tem massa de 30 kg e está montado num eixo mantido pelos mancais $A$ e $B$. Se num dado instante o eixo está girando a uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \{-40\mathbf{j}\}$ rad/s, determine os componentes verticais da força que age nos mancais nesse instante.



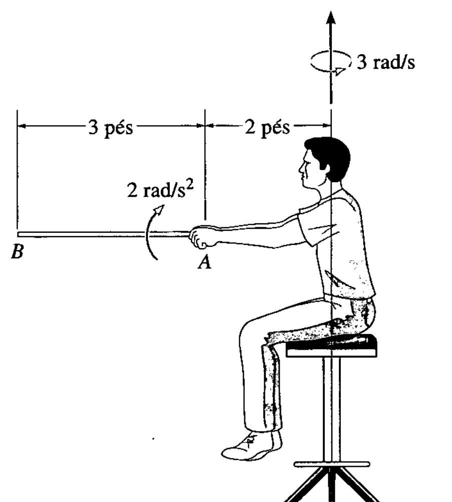

**Problema 21.56**

**21.57.** A porta uniforme de 15 kg e centro de massa em $G$ é mantida no plano horizontal pelos mancais $A$ e $B$. Aplica-se uma força vertical $F = 300$ N, como mostra a figura. Determine os componentes da reação nos mancais e a aceleração angular da porta. O mancal em $A$ resiste com um componente de força na direção $y$, o que não ocorre com $B$. Suponha que a porta seja uma placa fina e despreze o tamanho de cada mancal. A porta está inicialmente em repouso.



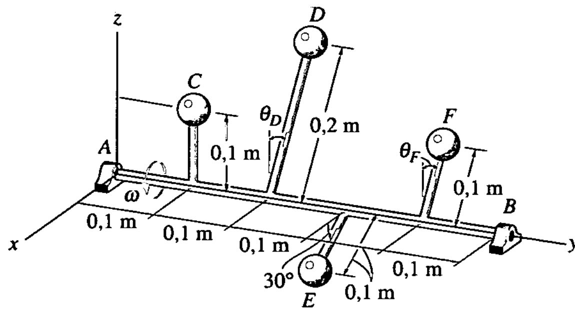

**Problema 21.57**

**21.58.** O homem está sentado num banco giratório que gira a uma velocidade angular de 3 rad/s. Ele segura uma barra uniforme $AB$ horizontal. Repentinamente, o homem comunica à barra uma aceleração de 2 rad/s$^2$, medida em relação a ele, como mostra a figura. Determine os componentes de força e momento aplicados em $A$, necessários a essa operação. Estabeleça eixos com origem no centro de massa $G$ da barra, com o eixo $+z$ orientado para cima e com o eixo $+y$ ao longo da barra e apontando para $A$.



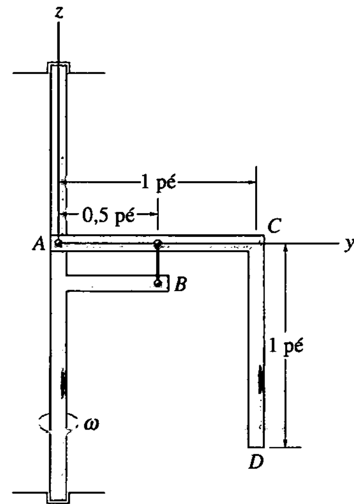

**Problema 21.58**

**21.59.** Quatro esferas estão ligadas ao eixo $AB$. Se $m_C = 1$ kg e $m_E = 2$ kg, determine a massa de $D$ e de $F$ e os ângulos das barras, $\theta_D$ e $\theta_F$, para que o eixo esteja dinamicamente balanceado, isto é, para que os mancais em $A$ e $B$ exerçam apenas forças verticais sobre o eixo durante a rotação. Despreze a massa das barras.




**Problema 21.59**

***21.60.** A barra curva *ACD* é uniforme e pesa 5 lb. Ela está ligada ao eixo vertical por um pino em *A* e está presa por uma corda em *B*. Se o eixo vertical gira a uma velocidade angular constante $\omega$ = 20 rad/s, determine os componentes *x*, *y*, *z* da força e do momento desenvolvidos em *A* e a tensão na corda.




**Problema 21.60**

# *21.5 Movimento Giroscópico

Nesta seção, serão desenvolvidas as equações que definem o movimento de um corpo (pião) simétrico em relação a um dado eixo e que está se movendo em torno de um ponto *fixo* pertencente ao eixo de simetria. Essas equações serão então aplicadas ao estudo do movimento de um dispositivo particularmente interessante, o giroscópio.

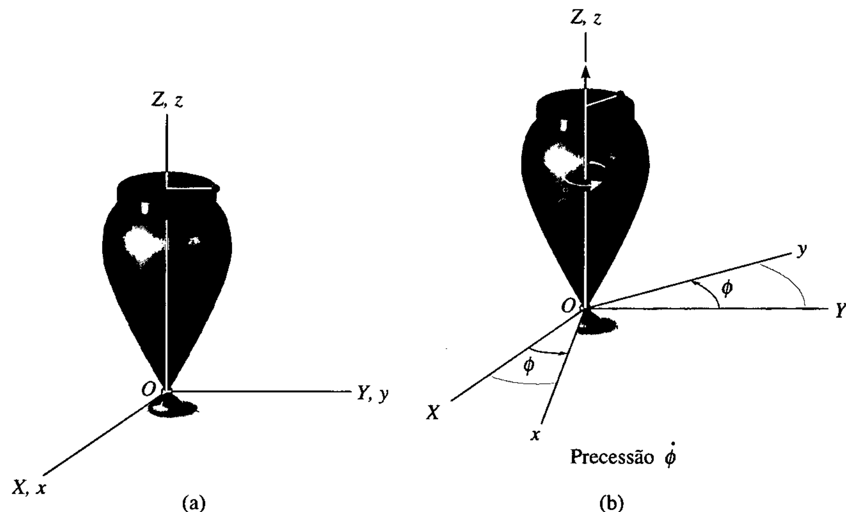



**Figura 21.15**

O movimento do corpo será analisado usando-se os *ângulos de Euler* $\phi$, $\theta$, $\psi$. Para ilustrar como esses ângulos definem a posição de um corpo, consideremos o pião mostrado na Figura 21.15*a*. O pião está preso no ponto *O* e tem, em um dado instante, uma orientação relativamente aos eixos fixos *X*, *Y*, *Z*, como mostra a Figura 21.15*d*. Para se definir essa posição final será necessário considerar um segundo sistema de eixos *x*, *y*, *z* fixo no pião. Partindo com o sistema *x*, *y*, *z* coincidente com o sistema *X*, *Y*, *Z* (Figura 21.15*a*), a posição final do pião é determinada de acordo com as seguintes etapas:

1. Gire o pião de um ângulo $\phi$ $(0 \leq \phi < 2\pi)$ em torno do eixo $Z$ (ou $z$) (Figura 21.15*b*).
2. Gire o pião de um ângulo $\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ em torno do eixo $x$ (Figura 21.15*c*).
3. Gire o pião de um ângulo $\psi$ $(0 \leq \psi < 2\pi)$ em torno do eixo $z$ para obter a posição final (Figura 21.15*d*).

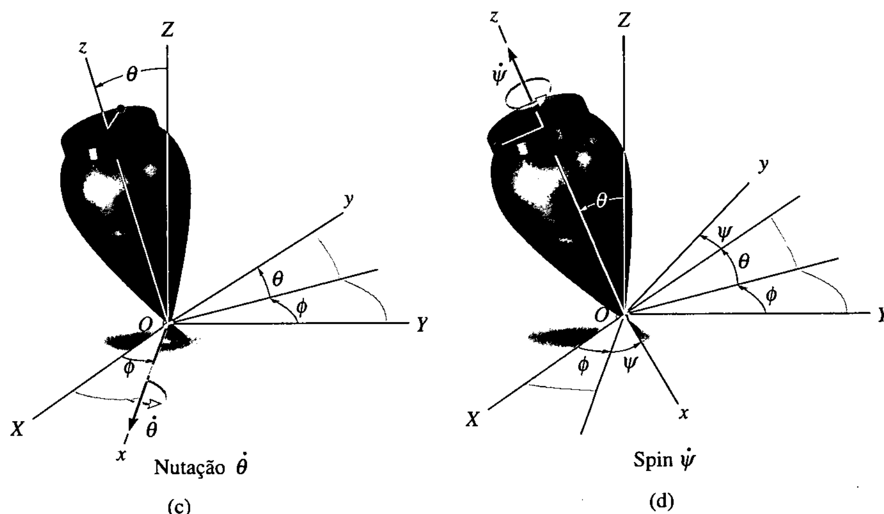



**Figura 21.15**

A seqüência desses três ângulos, $\phi$, $\theta$ e então $\psi$, deve ser mantida, pois rotações finitas *não são vetores* (veja a Figura 20.1). Isso, todavia, não ocorre para ângulos infinitesimais, de modo que as rotações infinitesimais $d\boldsymbol{\phi}$, $d\boldsymbol{\theta}$ e $d\boldsymbol{\psi}$ são vetores e, portanto, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do pião pode ser expressa em função das derivadas temporais dos ângulos de Euler. Os componentes da velocidade angular $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ são conhecidos como *precessão*, *nutação* e *rotação própria* ou *spin*,* respectivamente.

Seus sentidos positivos estão na Figura 21.16. Vemos que esses vetores não são todos perpendiculares entre si; entretanto, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do pião ainda pode ser expressa em termos desses três componentes.

Em nosso caso, o corpo (pião) é simétrico em relação ao eixo $z$, ou eixo de spin. Se consideramos que o pião está orientado, em um dado instante, com o ângulo de spin $\psi = 0$ e *os eixos $x, y, z$ seguindo o movimento do corpo somente em nutação e precessão*, isto é, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_n$, então a nutação e o spin estarão sempre orientados ao longo dos eixos $x$ e $z$, respectivamente (Figura 21.16). Logo, a velocidade angular do corpo é especificada apenas em função do ângulo de Euler $\theta$, isto é,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \\ &= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{k} \qquad (21.27)\end{aligned}$$

Como o movimento dos eixos não é afetado pelo componente de spin,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k} \\ &= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{k} \qquad (21.28)\end{aligned}$$

* O termo da língua inglesa *spin* já faz parte da nomenclatura adotada no estudo da dinâmica de corpos rígidos e será empregado neste livro (N. do T.).

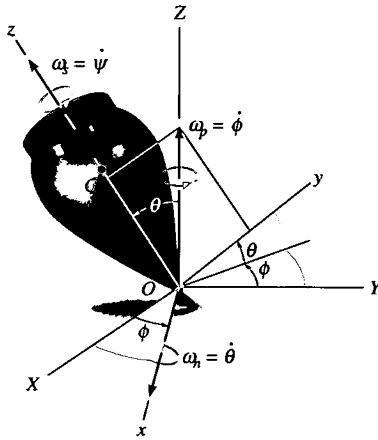



**Figura 21.16**

Os eixos $x$, $y$, $z$ na Figura 21.16 representam *eixos principais de inércia* do corpo para *qualquer* spin do corpo em relação a esses eixos. Logo, os momentos de inércia são constantes e serão representados como $I_{xx} = I_{yy} = I$ e $I_{zz} = I_z$. Uma vez que $\boldsymbol{\Omega} \neq \boldsymbol{\omega}$, as equações 21.26 são usadas para estabelecer as equações do movimento de rotação. Substituindo nessas equações os respectivos componentes de velocidade angular definidos pelas equações 21.27 e 21.28, suas derivadas temporais e os momentos de inércia, obtemos

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= I(\ddot\theta - \dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + I_z\dot\phi\operatorname{sen}\theta(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\\ \Sigma M_y &= I(\ddot\phi\operatorname{sen}\theta + 2\dot\phi\dot\theta\cos\theta) - I_z\dot\theta(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi) \qquad (21.29)\\ \Sigma M_z &= I_z(\ddot\psi + \ddot\phi\cos\theta - \dot\phi\dot\theta\operatorname{sen}\theta)\end{aligned}$$

Cada somatório de momento aplica-se apenas ao ponto fixo $O$ ou ao centro de massa $G$ do corpo. Como as equações representam um sistema acoplado de equações diferenciais ordinárias não-lineares de segunda ordem, em geral uma solução fechada pode não ser obtida. Entretanto, os ângulos de Euler $\phi$, $\theta$ e $\psi$ podem ser obtidos graficamente como funções do tempo usando-se análise numérica e técnicas computacionais.

Existe um caso especial para o qual é possível uma simplificação das equações 21.29. Esse caso é conhecido por *precessão estacionária*, que ocorre quando o ângulo de nutação $\theta$, a velocidade angular de precessão $\dot\phi$ e a velocidade angular de spin $\dot\psi$ são *constantes*. As equações 21.29 reduzem-se, então, à forma

$$\boxed{\Sigma M_x = -I\dot\phi^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot\phi\operatorname{sen}\theta(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)} \qquad (21.30)$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

A Equação 21.30 pode ser ainda mais simplificada ao observamos que, da Equação 21.27, $\omega_z = \dot\phi\cos\theta + \dot\psi$, de modo que

$$\Sigma M_x = -I\dot\phi^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot\phi\operatorname{sen}\theta\,\omega_z$$

ou

$$\boxed{\Sigma M_x = \dot\phi\operatorname{sen}\theta(I_z\omega_z - I\dot\phi\cos\theta)} \qquad (21.31)$$

É interessante observar os efeitos do spin $\dot\psi$ sobre o momento em relação ao eixo $x$. Para isso, consideremos o rotor em movimento mostrado na Figura 21.17, para o qual $\theta = 90°$, de modo que a Equação 21.30 se reduz à forma

$$\Sigma M_x = I_z\dot\phi\dot\psi$$

ou

$$\boxed{\Sigma M_x = I_z\Omega_y\omega_z} \qquad (21.32)$$

Da figura vemos que os vetores $\Sigma\mathbf{M}_x$, $\boldsymbol{\Omega}_y$ e $\boldsymbol{\omega}_z$ estão orientados ao longo de seus respectivos *eixos positivos* e são, portanto, mutuamente perpendiculares. Intuitivamente, poderíamos presumir que o rotor cairia sob a ação da gravidade! No entanto, isso não ocorrerá, se o produto $I_z\Omega_y\omega_z$ for escolhido para contrabalançar o momento $\Sigma M_x = Wr_G$ do peso do rotor em relação a $O$. Esse fenômeno incomum é conhecido como *efeito giroscópico*.

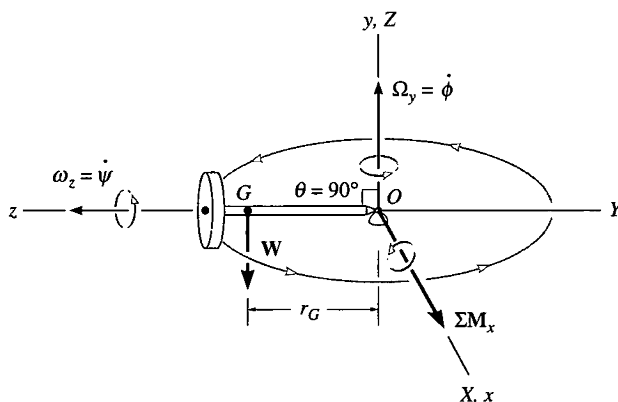



**Figura 21.17**

Talvez uma demonstração mais interessante do efeito giroscópico venha do estudo da ação de um *giroscópio*. Um giroscópio é um rotor com alta velocidade de spin. Essa taxa de spin é consideravelmente maior que a taxa do movimento de precessão em torno do eixo vertical. Logo, para todos os propósitos práticos, o momento angular do giroscópio pode ser considerado coincidente com o eixo de spin (eixo de simetria do rotor). Assim, para o rotor do giroscópio mostrado na Figura 21.18, $\omega_z \gg \Omega_y$, e o módulo do momento angular em relação ao ponto $O$, determinado pelas equações 21.11, reduz-se à forma $H_O = I_z\omega_z$. Como o módulo e a direção de $\mathbf{H}_O$ são constantes, observados de $x$, $y$, $z$, a aplicação direta da Equação 21.22 resulta em

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_x = \mathbf{\Omega}_y \times \mathbf{H}_O} \qquad (21.33)$$

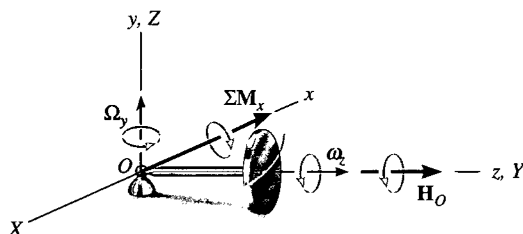
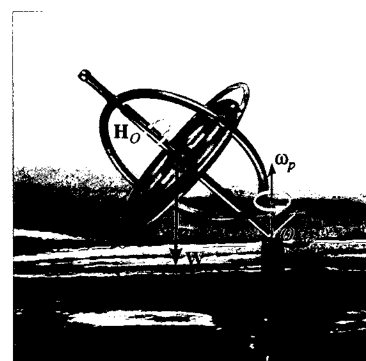



**Figura 21.18**

Usando a regra da mão direita para o produto vetorial, vemos que $\mathbf{\Omega}_y$ sempre gira $\mathbf{H}_O$ (ou $\boldsymbol{\omega}_z$) no sentido de $\Sigma\mathbf{M}_x$. De fato, a *mudança de direção* do momento angular do giroscópio, $d\mathbf{H}_O$, é equivalente ao impulso angular causado pelo peso do giroscópio em relação a $O$, isto é, $d\mathbf{H}_O = \Sigma M_x\, dt$ (Equação 21.20). Além disso, como $H_O = I_z\omega_z$ e $\Sigma M_x$, $\Omega_y$ e $\mathbf{H}_O$ são mutuamente perpendiculares, a Equação 21.33 reduz-se à Equação 21.32.

Quando um giroscópio é montado numa suspensão Cardan (Figura 21.19), ele se torna livre de momentos externos aplicados à sua base. Assim, idealmente, seu momento angular $\mathbf{H}$ não sofre precessão, mas, ao contrário, manterá sua orientação fixa ao longo do eixo de spin quando sua base girar. Esse tipo de giroscópio, chamado de *giroscópio livre*, é útil como bússola quando seu eixo de spin é orientado para o norte. Na realidade, a suspensão nunca é completamente livre de atrito, de modo que esse dispositivo é útil somente para navegação local de navios e aviões. O efeito giroscópico também é útil como um meio de estabilização do movimento de oscilação de navios e das trajetórias de mísseis e projéteis. Além disso, esse efeito é importante no desenvolvimento de eixos e mancais para rotores submetidos a precessões forçadas.




*A rotação do giroscópio na estrutura deste giroscópio de brinquedo produz um momento angular $\mathbf{H}_O$ que muda de direção à medida que a estrutura sofre uma precessão $\boldsymbol{\omega}_p$ em torno do eixo vertical. O giroscópio não cairá se o torque do seu peso $\mathbf{W}$ em relação ao suporte for compensado pela mudança na direção de $\mathbf{H}_O$.*

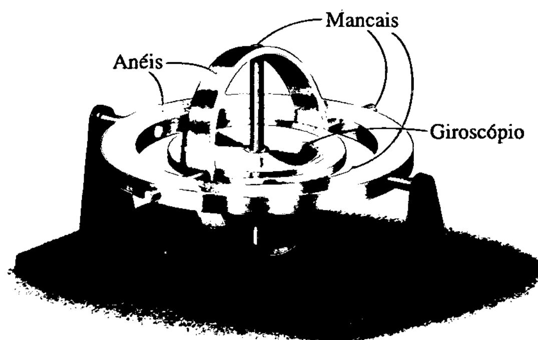
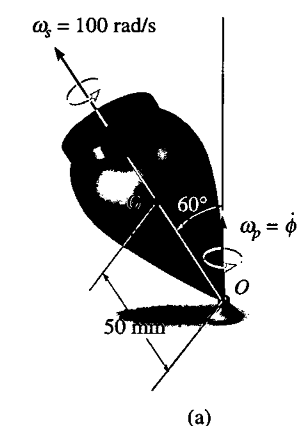
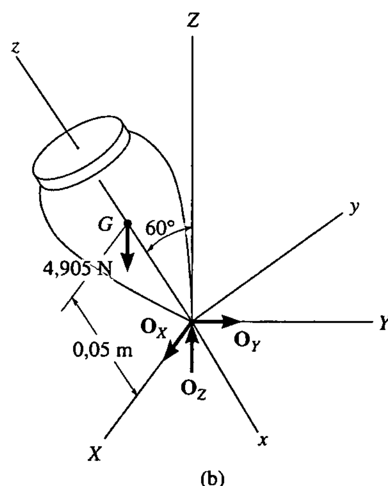



Figura 21.19

## EXEMPLO 21.7




(a)




(b)

Figura 21.20

O pião de 0,5 kg mostrado na Figura 21.20*a* tem movimento de precessão em torno do eixo vertical a um ângulo constante $\theta = 60°$. Sendo a velocidade angular do movimento de spin $\omega_s = 100$ rad/s, determine a velocidade de precessão $\boldsymbol{\omega}_p$. Suponha que os momentos de inércia axial e transversal do pião sejam $0{,}45(10^{-3})$ kg·m² e $1{,}20(10^{-3})$ kg·m², respectivamente, medidos em relação ao ponto fixo *O*.

### SOLUÇÃO

A Equação 21.30 será usada na solução, pois o movimento é de *precessão estacionária*. Como se mostra no diagrama de corpo livre (Figura 21.20*b*), os eixos coordenados são estabelecidos da forma usual, isto é, com o eixo *z* positivo na direção e sentido do spin, o eixo positivo *Z* na direção e sentido da precessão e o eixo positivo *x* na direção e sentido do torque $\Sigma \mathbf{M}_x$ (veja a Figura 21.16). Assim:

$$\Sigma M_x = -I\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot\phi\operatorname{sen}\theta(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)$$

$$4{,}905\text{ N}(0{,}05\text{ m})\operatorname{sen}60° = -[1{,}20(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2\,\dot\phi^2]\operatorname{sen}60°\cos60° + [0{,}45(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2]\,\dot\phi\operatorname{sen}60°(\dot\phi\cos60° + 100\text{ rad/s})$$

ou

$$\dot\phi^2 - 120{,}0\dot\phi + 654{,}0 = 0 \qquad (1)$$

Resolvendo essa equação do segundo grau para a precessão, temos

$$\dot\phi = 114\text{ rad/s} \qquad \text{(alta precessão)}$$ ***Resposta***

e

$$\dot\phi = 5{,}72\text{ rad/s} \qquad \text{(baixa precessão)}$$ ***Resposta***

Na realidade, observa-se, em geral, a baixa precessão, pois a alta exige uma grande energia cinética.

## EXEMPLO 21.8

O disco de 1 kg mostrado na Figura 21.21*a* tem movimento de spin com velocidade angular constante $\omega_D = 70$ rad/s em torno de seu eixo. Pelo ajuste da posição *s* do bloco *B* de 2 kg, pode-se modificar a precessão do disco em

torno do pivô de sustentação em $O$. Determine a posição $s$ que permite ao disco ter velocidade de precessão constante $\omega_p = 0{,}5$ rad/s em torno do pivô. Despreze o peso do eixo.

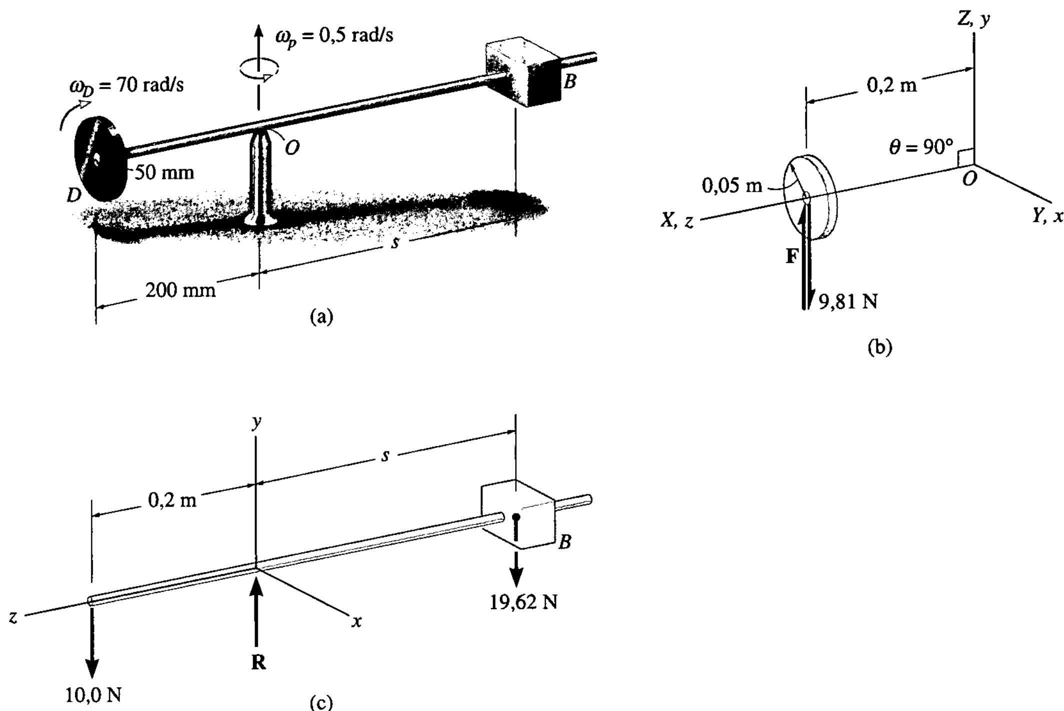



**Figura 21.21**

## SOLUÇÃO

A Figura 21.21*b* mostra o diagrama de corpo livre do disco, onde **F** representa a força de reação do eixo sobre o disco. A origem para os sistemas de coordenadas $x$, $y$, $z$ e $X$, $Y$, $Z$ está localizada no ponto $O$, que é um *ponto fixo* para o disco. (Embora o ponto $O$ não esteja no próprio disco, imaginemos uma extensão sem massa do disco até esse ponto.) No sentido convencional, escolhe-se o eixo $Z$ ao longo do eixo de precessão e o eixo $z$ ao longo do eixo de spin, de modo que $\theta = 90°$. Uma vez que a precessão é *estacionária*, a Equação 21.31 pode ser usada na solução. Essa equação se reduz a

$$\Sigma M_x = \dot{\phi} I_z \omega_z$$

que é o mesmo que a Equação 21.32. Substituindo os dados na equação, temos

$$9{,}81\ \text{N}(0{,}2\ \text{m}) - F(0{,}2\ \text{m}) = 0{,}5\ \text{rad/s}[\tfrac{1}{2}(1\ \text{kg})(0{,}05\ \text{m})^2](-70\ \text{rad/s})$$
$$F = 10{,}0\ \text{N}$$

Como se mostra no diagrama de corpo livre do eixo e do bloco $B$ (Figura 21.21*c*), o somatório dos torques em relação ao eixo $x$ exige que

$$(19{,}62\ \text{N})s = (10{,}0\ \text{N})(0{,}2\ \text{m})$$
$$s = 0{,}102\ \text{m} = 102\ \text{mm} \qquad \textbf{\textit{Resposta}}$$

## *21.6 MOVIMENTO LIVRE DE TORQUES

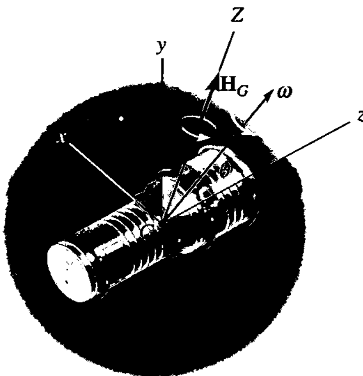



**Figura 21.22**

Quando a única força externa que age num corpo é causada pela gravitação, o movimento geral do corpo é denominado *movimento livre de torques*. Esse tipo de movimento é característico de planetas, satélites artificiais e projéteis — contanto que os efeitos de atrito com o ar sejam desprezíveis.

Para se descreverem as características desse movimento, a distribuição da massa do corpo será considerada como tendo *simetria axial* (corpo de revolução). O satélite mostrado na Figura 21.22 é um exemplo de corpo 'axissimétrico', no qual o eixo $z$ é um eixo de simetria. A origem das coordenadas $x, y, z$ está localizada no centro de massa $G$, de modo que para o corpo $I_{zz} = I_z$ e $I_{xx} = I_{yy} = I$. Como a força gravitacional é a única força externa presente, o somatório dos torques em relação ao centro de massa é nulo. Conclui-se da Equação 21.21 que o momento angular em relação a $G$ é constante, isto é,

$$\mathbf{H}_G = \text{constante}$$

Vamos considerar que, em um dado instante, o referencial inercial esteja orientado de forma que o eixo $Z$ positivo esteja dirigido ao longo de $\mathbf{H}_G$ e que o eixo $y$ esteja no plano formado pelos eixos $z$ e $Z$ (Figura 21.22). O ângulo de Euler entre $Z$ e $z$ é $\theta$, e, portanto, com essa escolha de eixos o momento angular pode ser expresso como

$$\mathbf{H}_G = H_G \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + H_G \cos \theta \mathbf{k}$$

Além disso, usando as equações 21.11, temos

$$\mathbf{H}_G = I\omega_x \mathbf{i} + I\omega_y \mathbf{j} + I_z\omega_z \mathbf{k}$$

onde $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ representam os componentes $x$, $y$, $z$ da velocidade angular do corpo. Igualando os respectivos componentes **i**, **j**, **k** das duas equações anteriores, temos

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I} \qquad \omega_z = \frac{H_G \cos \theta}{I_z} \tag{21.34}$$

ou

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I} \mathbf{j} + \frac{H_G \cos \theta}{I_z} \mathbf{k}} \tag{21.35}$$

De maneira similar, igualando os respectivos componentes **i**, **j**, **k** da Equação 21.27 aos da Equação 21.34, obtemos

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I}$$

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \frac{H_G \cos \theta}{I_z}$$

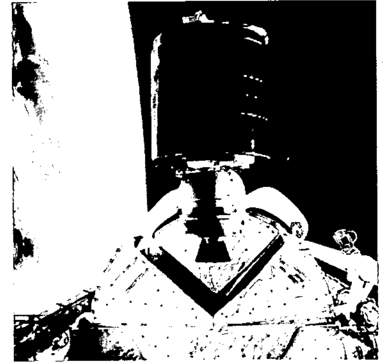
Resolvendo, obtemos

$$\theta = \text{const}$$
$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I}$$
$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{II_z} H_G \cos\theta \qquad (21.36)$$

Assim, para um movimento livre de torques de um corpo com simetria axial, o ângulo $\theta$ formado pelo vetor momento angular e o eixo de spin permanece constante. Além disso, o momento angular $\mathbf{H}_G$, a velocidade angular de precessão $\dot{\phi}$ e a de spin $\dot{\psi}$ permanecem constantes durante todo o movimento. Da eliminação de $H_G$ da segunda e da terceira Equação 21.36 resulta a seguinte relação entre as velocidades angulares de spin e precessão:

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z} \dot{\phi} \cos\theta \qquad (21.37)$$

Como mostra a Figura 21.23*a*, o corpo apresenta um movimento de precessão em torno do eixo $Z$, que tem direção fixa, e um movimento de spin em torno do eixo $z$. Esses dois componentes do movimento angular podem ser estudados usando-se um simples modelo de cones, como se introduziu na Seção 21.1. O *cone do espaço* definindo a precessão é fixo, pois a precessão tem direção fixa. Por outro lado, o *cone do corpo* rola sem escorregar sobre a superfície externa do cone do espaço. Assim, tentemos imaginar o movimento. O ângulo interno de cada cone é escolhido de modo que a velocidade angular do corpo esteja orientada ao longo da linha de contato dos dois cones. Essa linha de contato representa o eixo instantâneo de rotação para o cone do corpo e, portanto, a velocidade angular do corpo e do cone do corpo deve estar orientada ao longo dessa linha. Uma vez que o spin é uma função dos momentos de inércia $I$ e $I_z$ (Equação 21.36), o modelo de cones na Figura 21.23*a* é satisfatório para a descrição do movimento, caso $I > I_z$. Um movimento livre de torques que satisfaz essas condições é denominado *precessão regular*. Se $I < I_z$, a velocidade de spin é negativa e a de precessão, positiva. Esse movimento é representado pelo movimento do satélite mostrado na Figura 21.23*b* ($I < I_z$). O modelo de cones também pode ser usado para representar o movimento; todavia, para preservar corretamente a adição vetorial do spin e da precessão para se obter a velocidade angular, a superfície interna do cone do corpo deve rolar sobre a superfície externa do cone (fixo) do espaço. Esse movimento é chamado de *precessão retrógrada*.





*É comum comunicar a um satélite antes do lançamento uma rotação de spin. Se seu momento angular não for colinear com o eixo de spin, haverá precessão. A primeira foto mostra que haverá uma precessão regular, uma vez que $I > I_z$. Na segunda foto mostra-se que ocorrerá uma precessão retrógrada, pois $I < I_z$.*

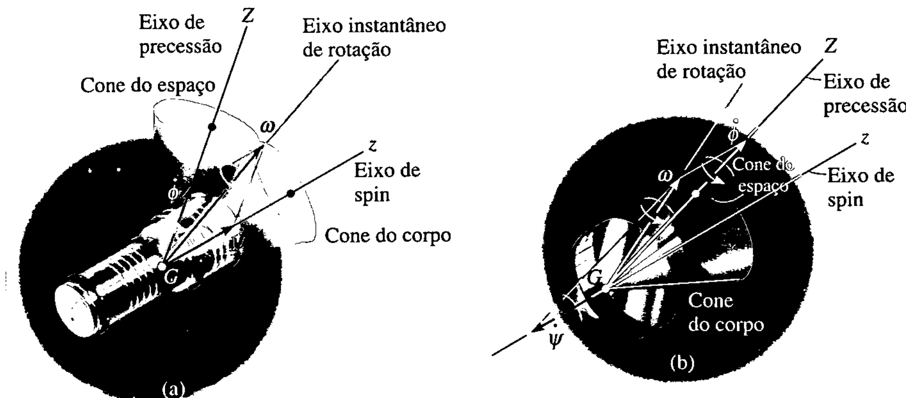



**Figura 21.23**

## EXEMPLO 21.9

Usa-se um projetor de filme em câmara lenta para se observar o movimento de uma bola de futebol americano. Percebe-se do filme que a direção do spin da bola forma um ângulo de 30° com a direção horizontal (veja a Figura 21.24*a*). A bola também apresenta uma precessão em torno do eixo vertical a uma taxa $\dot{\phi} = 3$ rad/s. Se a razão entre os momentos de inércia axial e transversal da bola, em relação ao centro de massa, é de $\frac{1}{3}$, determine o módulo da velocidade de spin e da velocidade angular da bola. Despreze os efeitos da resistência do ar.

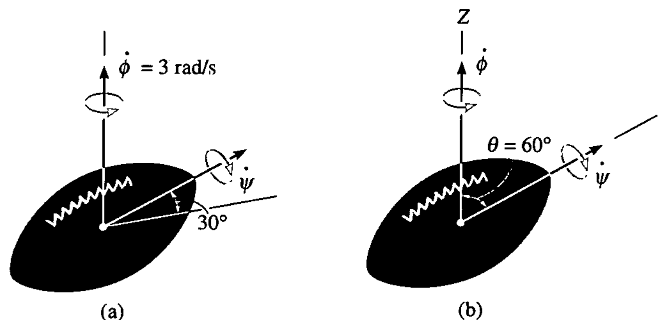



**Figura 21.24**

### SOLUÇÃO

Como o peso da bola é a única força agindo, o movimento é livre de torques. No sentido convencional, se o eixo $z$ é estabelecido ao longo do eixo de spin e o eixo $Z$, ao longo do eixo de precessão, como mostra a Figura 21.24*b*, então o ângulo $\theta = 60°$. Aplicando a Equação 21.37, obtemos para a velocidade de spin

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta = \frac{I - \frac{1}{3}I}{\frac{1}{3}I}(3)\cos 60°$$

$$= 3 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resposta}$$

Usando as equações 21.34, onde $H_G = \dot{\phi}I$ (Equação 21.36), temos

$$\omega_x = 0$$

$$\omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I} = \frac{3I \operatorname{sen} 60°}{I} = 2{,}60 \text{ rad/s}$$

$$\omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I_z} = \frac{3I\cos 60°}{\frac{1}{3}I} = 4{,}50 \text{ rad/s}$$

Dessa maneira,

$$\omega = \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 + (\omega_z)^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2 + (2{,}60)^2 + (4{,}50)^2}$$

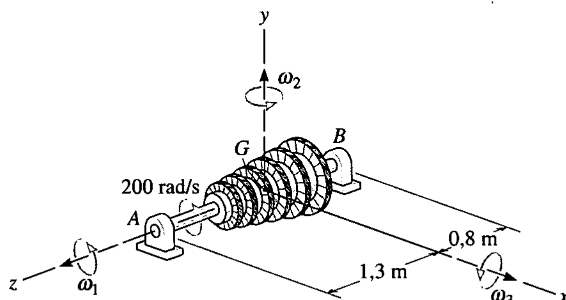
$$= 5{,}20 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resposta}$$

# PROBLEMAS

**21.61.** Mostre que a velocidade angular de um corpo, em termos dos ângulos de Euler $\phi$, $\theta$ e $\psi$, pode ser expressa como $\omega = (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\,\psi)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{k}$, onde **i**, **j** e **k** estão orientados ao longo dos eixos $x$, $y$, $z$, como mostra a Figura 21.15*d*.

**21.62.** Uma barra delgada coincidindo inicialmente com o eixo $Z$ recebe três rotações definidas pelos ângulos de Euler $\phi = 30°$, $\theta = 45°$ e $\psi = 60°$. Se as rotações são comunicadas nessa ordem, determine os ângulos diretores coordenados $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ do eixo da barra em relação aos eixos $X$, $Y$, $Z$. Essas direções são as mesmas para qualquer ordem das rotações? Por quê?

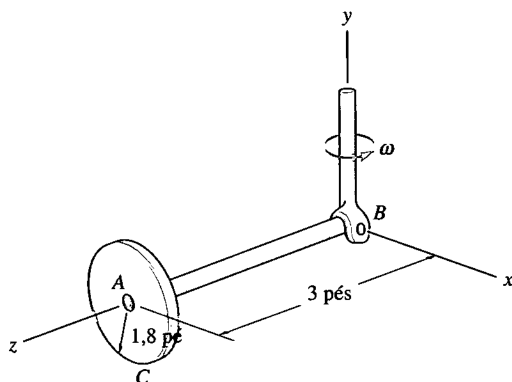
**21.63.** A turbina de um navio tem massa de 400 kg e está montada em mancais $A$ e $B$, como mostra a figura. Seu centro de massa está em $G$, seu raio de giração é $k_z = 0{,}3$ m e os outros raios de giração são $k_x = k_y = 0{,}5$ m. Se a velocidade angular de spin é de 200 rad/s, determine as reações verticais nos mancais quando o navio realiza cada um dos seguintes movimentos: (a) giro na direção $z$ (balanço transversal) com $\omega_1 = 0{,}2$ rad/s, (b) giro na direção $y$ com $\omega_2 = 0{,}8$ rad/s e (c) giro na direção $x$ (arfagem) com $\omega_3 = 1{,}4$ rad/s.




**Problema 21.63**

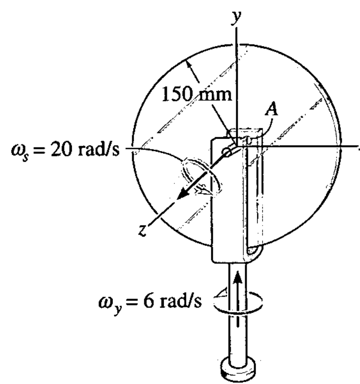
***21.64.** A roda de 30 lb rola sem escorregar. Se ela tem raio de giração $k_{AB} = 1{,}2$ pé em relação ao seu eixo $AB$ e o eixo vertical gira a 8 rad/s, determine a reação normal da roda sobre o piso em $C$.

**21.65.** A roda de 30 lb rola sem escorregar. Se ela tem raio de giração $k_{AB} = 1{,}2$ pé em relação ao seu eixo $AB$, determine sua velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ para que a reação normal em $C$ seja de 60 lb.



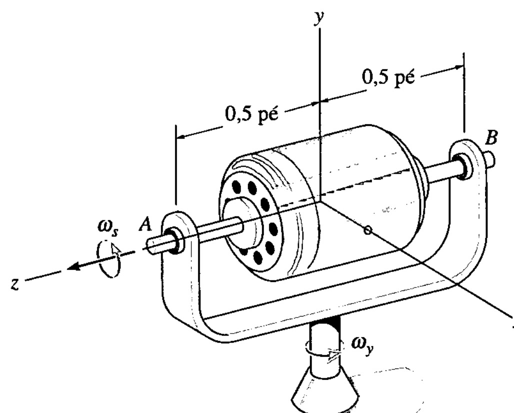

**Problemas 21.64/65**

**21.66.** O disco de 20 kg gira em torno de seu centro com velocidade angular de spin $\omega_s = 20$ rad/s, enquanto seu eixo de sustentação gira com velocidade angular $\omega_y = 6$ rad/s. Determine o momento do giroscópio causado pelas forças de reação que o pino $A$ exerce no disco devido ao movimento.



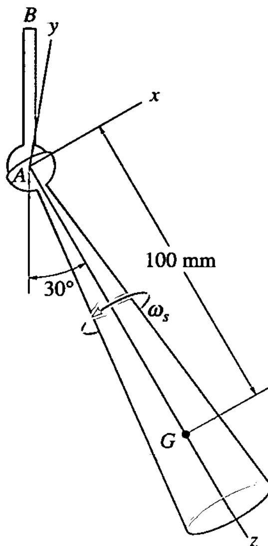

**Problema 21.66**

**21.67.** O motor pesa 50 lb e tem raio de giração de 0,2 pé em relação ao eixo $z$. O eixo do motor é sustentado por mancais em $A$ e $B$ e está girando com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_s = \{100\mathbf{k}\}$ rad/s, enquanto a estrutura tem velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_y = \{2\mathbf{j}\}$ rad/s. Determine os torques das forças dos mancais em $A$ e $B$ sobre o eixo.



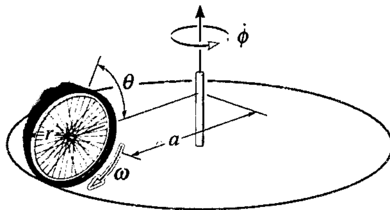

**Problema 21.67**

***21.68.** O pião cônico tem massa de 0,8 kg e momentos de inércia $I_x = I_y = 3{,}5\,(10^{-3})$ kg·m² e $I_z = 0{,}8(10^{-3})$ kg·m². Se ele tem movimento de spin com velocidade angular $\omega_s = 750$ rad/s, calcule a velocidade angular de precessão do pião em torno do eixo $AB$. O pião está ligado ao eixo $AB$ por meio de uma junta esférica.




**Problema 21.68**

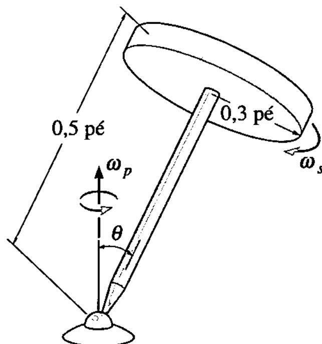
**21.69.** Uma roda de massa $m$ e raio $r$ rola ao longo de uma trajetória circular de raio $a$, com velocidade angular de spin constante $\boldsymbol{\omega}$. Se o ângulo de inclinação é $\theta$, determine a taxa de precessão. Considere a roda um anel fino. Não há escorregamento.




**Problema 21.69**

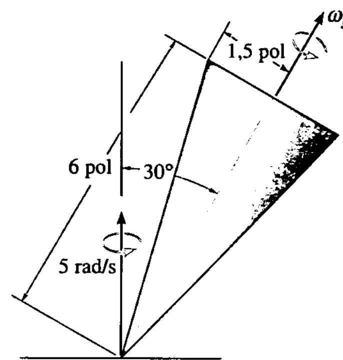
**21.70.** O pião consiste em um disco fino que tem peso de 8 lb e raio de 0,3 pé. A haste tem massa desprezível e comprimento de 0,5 pé. Se o pião gira com velocidade angular de spin $\omega_s$ = 300 rad/s, determine a velocidade angular $\omega_p$ de precessão estacionária da haste para $\theta$ = 40°.

**21.71.** Resolva o Problema 21.70 para $\theta$ = 90°.



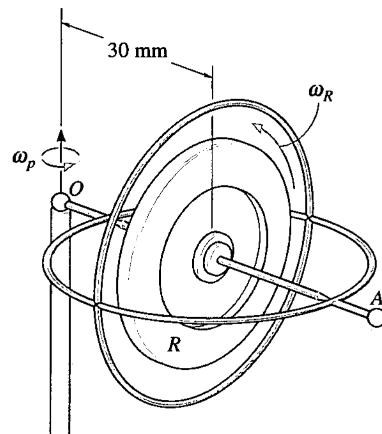

**Problemas 21.70/71**

***21.72.** O pião tem massa de 3 lb e pode ser considerado um cone maciço. Se ele tem movimento de precessão em torno do eixo vertical a uma taxa constante de 5 rad/s, determine sua velocidade angular de spin.



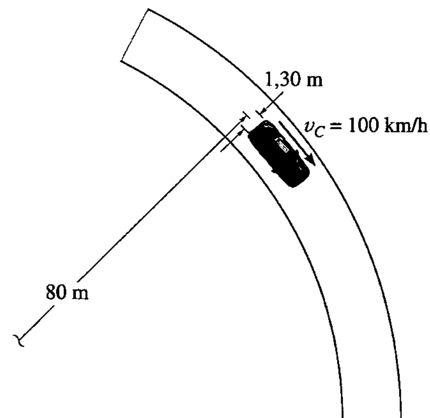

**Problema 21.72**

**21.73.** O giroscópio de brinquedo consiste num rotor $R$ que está ligado a uma estrutura de massa desprezível. Observa-se que a estrutura tem movimento de precessão em torno do pivô $O$ com velocidade angular $\omega_p$ = 2 rad/s. Determine a velocidade angular $\omega_R$ do rotor. A massa do rotor é de 200 g e seu raio de giração em relação a $OA$ é $k_{OA}$ = 20 mm.



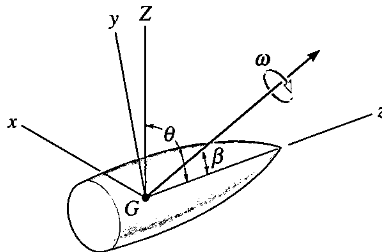

**Problema 21.73**

**21.74.** O carro trafega a uma velocidade $v_C$ = 100 km/h numa curva horizontal de 80 m de raio. Se cada roda tem massa de 16 kg, raio de giração $k_G$ = 300 mm em relação ao seu eixo de spin e raio de 400 mm, determine a diferença entre as forças normais nas rodas traseiras causada pelo efeito giroscópico. A distância entre as rodas é de 1,30 m.



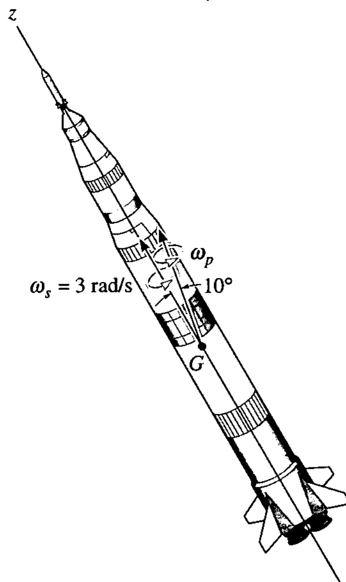

**Problema 21.74**

**21.75.** O projétil mostrado na figura tem movimento livre de torques. Os momentos de inércia transversal e axial são $I$ e $I_z$, respectivamente. Se $\theta$ representa o ângulo entre o eixo de precessão $Z$ e o eixo de simetria $z$ e $\beta$ é o ângulo entre a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e o eixo $z$, mostre que $\beta$ e $\theta$ estão relacionados pela equação tg $\theta = (I/I_z)$ tg $\beta$.




**Problema 21.75**

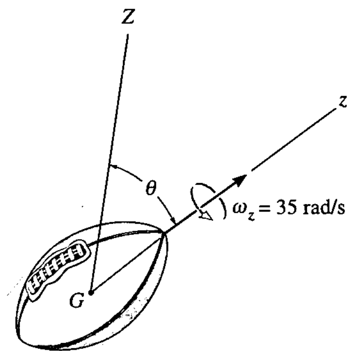
***21.76.** Enquanto o foguete está em vôo livre, ele tem velocidade angular de spin de 3 rad/s e movimento de precessão em torno de um eixo que forma um ângulo de 10° com o eixo de spin. A razão entre os momentos de inércia axial e transversal, em relação a eixos que passam pelo seu centro de massa $G$, é de 1/15. Determine o ângulo que a velocidade angular resultante forma com o eixo de spin. Construa os cones do corpo e do espaço para descrever o movimento. A precessão é regular ou retrógrada?



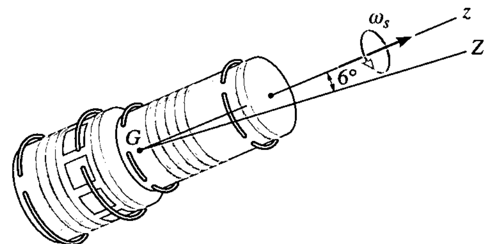

**Problema 21.76**

**21.77.** Arremessa-se a bola de futebol americano (massa de 0,2 kg) a uma velocidade de spin $\omega_z$ = 35 rad/s. Se o ângulo $\theta$ vale 60°, determine a velocidade de precessão em torno do eixo $Z$.

**21.78.** A cápsula espacial tem massa de 3,2 t e seus raios de giração axial e transversal, passando pelo centro de massa $G$, são $k_z$ = 0,90 m e $kt$ = 1,85 m, respectivamente. Se sua velocidade angular de spin é $\omega_s$ = 0,8 rev/s, determine seu momento angular. A precessão se dá em torno do eixo $Z$.

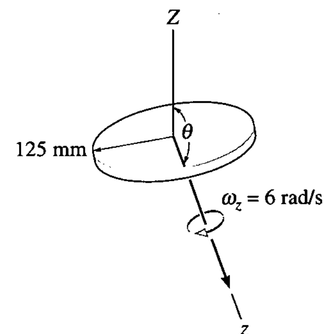



**Problema 21.77**



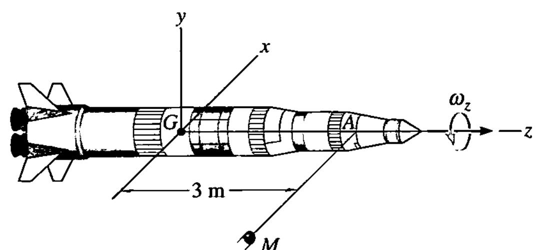

**Problema 21.78**

**21.79.** Arremessa-se o disco de 4 kg com velocidade de spin $\omega_z$ = 6 rad/s. Se o ângulo $\theta$ vale 160°, determine a velocidade angular de precessão em torno do eixo $Z$.




**Problema 21.79**

***21.80.** O foguete tem massa de 4 t e raios de giração $k_z$ = 0,85 m e $k_y$ = 2,3 m. Ele está girando com velocidade angular $\omega_z$ = 0,05 rad/s em torno do eixo de spin, quando um meteoróide $M$ o atinge em $A$, gerando um impulso $\mathbf{I}$ = {300**i**} N · s. Determine o eixo de precessão após o impacto.




**Problema 21.80**

## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Momentos e Produtos de Inércia.*** Um corpo tem seis componentes de inércia para qualquer sistema de eixos $x$, $y$, $z$. Três desses componentes são os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados $I_x$, $I_y$, $I_z$ e três são os produtos de inércia, cada um definido para cada par de planos ortogonais, $I_{xy}$, $I_{yz}$, $I_{xz}$. Se um plano ou ambos os planos forem planos de simetria, então o produto de inércia em relação a esses planos será nulo.

  Os momentos e produtos de inércia podem ser determinados por integração direta ou pelo emprego de valores tabulados. Se essas quantidades devem ser determinadas em relação a eixos e planos que não passam pelo centro de massa, deve-se usar os teoremas dos eixos paralelos e dos planos paralelos.

  Conhecidos os seis componentes de inércia, então o momento de inércia em relação a qualquer eixo pode ser determinado usando-se a equação de transformação

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x$$

- ***Momentos Principais de Inércia.*** Em qualquer ponto no corpo ou fora dele, os eixos $x$, $y$, $z$ podem ser orientados de modo que os produtos de inércia sejam nulos. Os momentos de inércia correspondentes para essa situação são denominados eixos principais de inércia do corpo.

- ***Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento/Momento Angular.*** O momento angular para um corpo pode ser determinado em relação a qualquer ponto $A$ usando-se a equação

$$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G$$

  Se os eixos forem eixos principais de inércia, com origem no centro de massa do corpo ou em um ponto fixo, então os componentes do momento angular se tornam

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$H_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

  Uma vez que a quantidade de movimento e o momento angular tenham sido formulados para o corpo, então o princípio do impulso e quantidade de movimento/momento angular pode ser usado para resolver problemas que envolvam força, velocidade e tempo. Essas equações são

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

- ***Princípio do Trabalho e Energia.*** A energia cinética de um corpo é determinada normalmente em relação a um ponto fixo ou ao seu centro de massa. Se os eixos forem eixos principais de inércia, então, para um ponto fixo,

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

  E relativamente ao centro de massa:

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

  Essas formulações podem ser empregadas juntamente com o princípio do trabalho e energia para resolver problemas que envolvam força, velocidade e deslocamento. A equação é

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

- ***Equações de Movimento.*** Há três equações escalares do movimento de translação tridimensional para um corpo rígido:

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma F_z = m(a_G)_z$$

As três equações escalares do movimento de rotação dependem da localização de referencial $x$, $y$, $z$. Com freqüência, esses eixos são orientados de modo que os eixos sejam eixos principais de inércia. Se os eixos são fixos no corpo e giram com a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ deste, então as equações são denominadas equações de Euler para o movimento:

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

Se os eixos têm uma rotação $\Omega \neq \omega$, as equações se tornam

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$

A aplicação dessas equações deve ser sempre acompanhada de um diagrama de corpo livre.

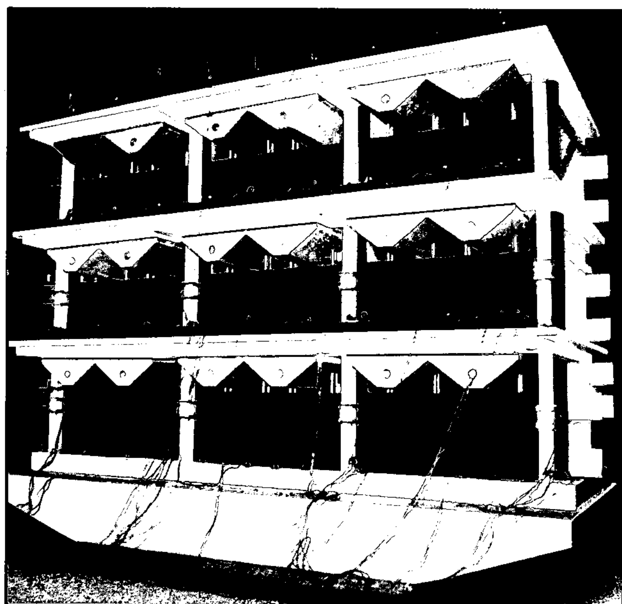
- ***Movimento Giroscópico.*** O movimento angular de um giroscópio é mais bem descrito usando-se os três ângulos de Euler. As derivadas temporais desses ângulos são denominadas velocidades angulares de precessão, $\dot{\phi}$, de nutação, $\dot{\theta}$, e de spin, $\dot{\psi}$. Se $\dot{\psi} = 0$ e $\dot{\phi}$ e $\theta$ são constantes, diz-se que o movimento é uma precessão estacionária. Nesse caso, as equações do movimento de rotação se tornam

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \text{sen}\,\theta \cos\theta + I_z\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$
$$\Sigma M_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0$$

O movimento de spin de um rotor giroscópico é o responsável por evitar que o rotor caia, mantendo-o em precessão em torno de um eixo vertical. Esse fenômeno é denominado efeito giroscópico.

- ***Movimento Livre de Torques.*** É nulo o torque total em relação ao centro de massa de um corpo que está submetido apenas a uma força gravitacional e, por isso, o movimento é descrito como livre de torques. O momento angular para o corpo permanecerá constante. Isso faz com que o corpo tenha movimento de spin e precessão. O comportamento depende do valor do momento de inércia de um corpo simétrico em relação ao eixo de spin, $I_z$, comparado com o valor do momento de inércia $I$ em relação a um eixo perpendicular. Se $I > I_z$, ocorre precessão regular. Se $I < I_z$, o movimento é denominado precessão retrógrada.

# 22 VIBRAÇÕES



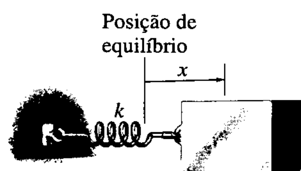
*A análise de vibrações tem papel importante no estudo do comportamento de estruturas sujeitas a terremotos.*

## OBJETIVOS DO CAPÍTULO

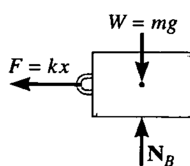
- Discutir as vibrações de um corpo rígido com um grau de liberdade e sem amortecimento, usando a equação de movimento e métodos de energia.
- Discutir as vibrações com amortecimento viscoso.
- Estudar a análise de vibrações forçadas sem amortecimento e com amortecimento viscoso.
- Introduzir o conceito de analogia com circuitos elétricos para se estudar o movimento vibratório.

## *22.1 VIBRAÇÃO LIVRE SEM AMORTECIMENTO

*Vibração* é todo movimento periódico de um corpo ou sistema de corpos interligados, em torno de uma posição de equilíbrio. Em geral, há dois tipos de vibração, livre e forçada. A *vibração livre* ocorre quando o movimento se mantém por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas, como, por exemplo, o movimento de vai-e-vem de um pêndulo ou a vibração de uma barra elástica. Uma *vibração forçada é causada* por uma força externa periódica ou intermitente aplicada ao sistema. Ambos os tipos de vibração podem ser amortecidos ou não. Vibrações livres *não amortecidas* podem continuar indefinidamente, quando se consideram desprezíveis os efeitos das forças de atrito. Como na realidade tanto as forças de atrito internas quanto externas estão sempre presentes, o movimento de vibração de qualquer corpo é *sempre amortecido*.




(a)




(b)

**Figura 22.1**

O tipo mais simples de movimento de vibração é o de vibração livre sem amortecimento representado pelo modelo mostrado na Figura 22.1*a*. O bloco tem massa $m$ e está ligado a uma mola de rigidez $k$. Um movimento de vibração ocorre quando o bloco é solto após ter sido deslocado para uma posição $x$, de modo que a mola, por estar deformada, puxa-o de volta. O bloco atingirá uma velocidade tal que será capaz de ultrapassar a posição de equilíbrio $x = 0$. O movimento adquirido, que será oscilatório, continuará indefinidamente, caso se considerem nulas as forças de atrito, como, por exemplo, no caso de uma superfície de apoio lisa.

O movimento dependente do tempo pode ser determinado aplicando-se a equação de movimento ao bloco considerado numa posição genérica $x$. A Figura 22.1*b* mostra o diagrama de corpo livre. A força elástica restauradora, de intensidade $F = kx$, está sempre voltada para a posição de equilíbrio, enquan-

to a aceleração **a** é tomada genericamente com *sentido positivo concordante com o do deslocamento*. Ao observar que $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$, temos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx = m\ddot{x}$$

Observemos que a aceleração é proporcional ao deslocamento do bloco. O movimento assim descrito é denominado *movimento harmônico simples*. Após rearranjo, a equação anterior pode ser posta na 'forma-padrão'

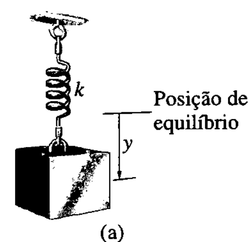
$$\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0 \qquad (22.1)$$

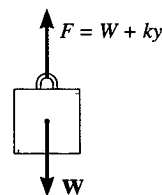
A constante $\omega_n$, dada por

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad (22.2)$$

é chamada de *freqüência angular natural* ou *pulsação natural* e é expressa em rad/s.

A Equação 22.1 também pode ser obtida considerando-se o bloco suspenso e medindo-se o deslocamento $y$ a partir da sua posição de equilíbrio (Figura 22.2*a*). Quando o bloco está em equilíbrio, a mola exerce nele uma força para cima de intensidade $F = W = mg$. Logo, quando o bloco é deslocado de uma distância $y$ para baixo dessa posição, a intensidade da força da mola passa a ser $F = W + ky$ (Figura 22.2*b*). A aplicação da equação de movimento resulta em




(b)

**Figura 22.2**

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad -W - ky + W = m\ddot{y}$$

ou

$$\ddot{y} + \omega_n{}^2 y = 0$$

que tem a mesma forma da Equação 22.1, com $\omega_n$ dado pela Equação 22.2.

A Equação 22.1 é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com coeficientes constantes. Podemos mostrar usando os métodos das equações diferenciais que a solução geral da Equação 22.1 é

$$\boxed{x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t} \qquad (22.3)$$

onde $A$ e $B$ são duas constantes de integração arbitrárias. A velocidade e a aceleração do bloco são determinadas por derivações temporais sucessivas, o que resulta em

$$v = \dot{x} = A^{\omega}{}_n \cos \omega_n t - B^{\omega}{}_n \operatorname{sen} \omega_n t \qquad (22.4)$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n{}^2 \operatorname{sen} \omega_n t - B\omega_n{}^2 \cos \omega_n t \qquad (22.5)$$

Verificamos facilmente que quando as equações 22.3 e 22.5 são substituídas na Equação 22.1, a equação diferencial é, de fato, satisfeita, mostrando que a Equação 22.3 é solução da Equação 22.1.

As constantes arbitrárias $A$ e $B$ na Equação 22.3 podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema. Por exemplo, suponha que o bloco na Figura 22.1*a* tenha sido deslocado de uma distância $x_1$ para a direita de sua posição de equilíbrio e recebeu uma velocidade inicial $\mathbf{v}_1$ para direita ($v_1$ posi-

tiva). Substituindo na Equação 22.3 $x = x_1$ para $t = 0$, obtemos $B = x_1$. Como $v = v_1$ para $t = 0$, então, aplicando a Equação 22.4, chegamos a $A = v_1/\omega_n$. Com esses valores a Equação 22.3 que descreve o movimento se torna

$$x = \frac{v_1}{\omega_n} \text{sen } \omega_n t + x_1 \cos \omega_n t \tag{22.6}$$

A Equação 22.3 também pode ser expressa de forma mais simples em termos de uma função seno. Sejam

$$A = C \cos \phi \tag{22.7}$$

e

$$B = C \text{ sen } \phi \tag{22.8}$$

onde $C$ e $\phi$ são duas novas constantes arbitrárias a serem determinadas no lugar de $A$ e $B$. Substituindo essas expressões na Equação 22.3, temos

$$x = C \cos \phi \text{ sen } \omega_n t + C \text{ sen } \phi \cos \omega_n t$$

Usando a identidade trigonométrica sen $(\theta + \phi)$ = sen $\theta$ cos $\phi$ + cos $\theta$ sen $\phi$, podemos escrever

$$\boxed{x = C \text{ sen}(\omega_n t + \phi)} \tag{22.9}$$

Um gráfico $x$ *versus* $\omega_n t$ para essa equação pode ser visto na Figura 22.3. O deslocamento máximo do bloco relativamente à sua posição de equilíbrio é denominado *amplitude* da vibração. Podemos ver tanto da figura quanto da Equação 22.9 que a amplitude é $C$. O ângulo $\phi$ é chamado de *ângulo de fase* ou, mais apropriadamente, *fase inicial*, pois ele representa quanto a curva está deslocada em relação à origem no instante $t = 0$. As constantes $C$ e $\phi$ relacionam-se com $A$ e $B$ por meio das equações 22.7 e 22.8. Elevando ao quadrado e adicionando as duas equações, obtemos para a amplitude o resultado

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{22.10}$$

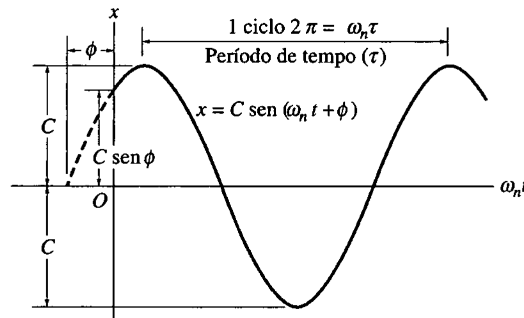



**Figura 22.3**

Se a Equação 22.8 é dividida pela Equação 22.7, obtemos para o ângulo de fase a relação

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{B}{A} \tag{22.11}$$

Observemos que a curva senoidal (Equação 22.9) completa um *ciclo* num tempo $t = \tau$ quando $\omega_n\tau = 2\pi$ ou

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}} \qquad (22.12)$$

Esse tempo é denominado *período* (Figura 22.3). Usando-se a Equação 22.2, o período também pode ser expresso como

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (22.13)$$

A *freqüência f* é definida como o número de ciclos completos por unidade de tempo. A freqüência é o recíproco do período:

$$\boxed{f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi}} \qquad (22.14)$$

ou

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (22.15)$$

A unidade de freqüência no Sistema Internacional é denominada *hertz* (símbolo Hz), de forma que 1 Hz = 1 ciclo/s = 2 $\pi$ rad/s.

Quando um corpo ou sistema de corpos interligados sofre um deslocamento inicial a partir de sua posição de equilíbrio e, então, é abandonado, ele passa a vibrar com sua *freqüência natural* $\omega_n$. Se o corpo tem apenas um grau de liberdade, isto é, se sua posição pode ser especificada completamente por apenas uma coordenada, então o movimento de vibração do corpo terá as mesmas características do movimento harmônico simples do sistema bloco–mola discutido anteriormente. Conseqüentemente, o movimento do corpo será descrito por uma equação diferencial com a mesma 'forma-padrão' da Equação 22.1, isto é,

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0} \qquad (22.16)$$

Assim, se a pulsação natural $\omega_n$ do corpo for conhecida, o período da vibração $\tau$, a freqüência natural $f$ e outras características do movimento de vibração do corpo poderão ser estabelecidos por meio das equações 22.3 a 22.15.

## Pontos Importantes

- A vibração livre ocorre quando o movimento é mantido por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas.
- A amplitude é o deslocamento máximo de um corpo.
- O período é o tempo para se completar um ciclo.
- A freqüência é o número de ciclos completos por unidade de tempo; no SI sua unidade é o hertz (Hz); portanto, 1 Hz = 1 ciclo/s.
- Um sistema com grau de liberdade exige apenas uma coordenada para definir a sua posição.

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

Assim como no caso de um bloco e uma mola, a freqüência angular ou pulsação natural $\omega_n$ de um corpo rígido ou sistema de corpos rígidos interligados, com um grau de liberdade, pode ser determinada usando-se o seguinte procedimento:

***Diagrama de Corpo Livre***

- Trace o diagrama de corpo livre para o corpo sujeito a um *pequeno deslocamento* em relação à sua posição de equilíbrio.
- Localize o corpo em relação à sua posição de equilíbrio, usando uma *coordenada inercial* apropriada $q$. A aceleração $\mathbf{a}_G$ do centro de massa do corpo ou sua aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ deve ter um sentido correspondente ao *sentido positivo* da coordenada de posição.
- Se a equação do movimento de rotação $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ for usada, será útil desenhar o diagrama dinâmico, pois ele leva em conta graficamente os componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$, o que facilita a visualização dos termos necessários no somatório dos momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

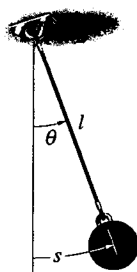
***Equação de Movimento***

- Aplique a equação de movimento para relacionar as forças *restauradoras* elásticas ou gravitacionais e momentos de binário que agem no corpo com seu movimento acelerado.

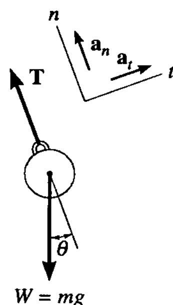
***Cinemática***

- Usando a cinemática, expresse o movimento acelerado do corpo em função da derivada temporal de segunda ordem da coordenada de posição, $\ddot{q}$.
- Substitua o resultado na equação de movimento e determine $\omega_n$, rearranjando os termos de modo que a equação resultante esteja na 'forma-padrão', $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

## EXEMPLO 22.1




(a)




(b)

**Figura 22.4**

Determine o período de vibração para o pêndulo simples mostrado na Figura 22.4*a*. A esfera tem massa $m$ e o fio, comprimento $l$. Despreze o tamanho da esfera e a massa do fio. Considere o fio inextensível.

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** O movimento do sistema será descrito por meio da coordenada de posição ($q =$) $\theta$ (Figura 22.4*b*). Quando a esfera está deslocada de um ângulo $\theta$, a força restauradora que age nela é dada pelo componente do peso $mg$ sen $\theta$. Além disso, a aceleração $\mathbf{a}_t$ tem o sentido de $s$ (ou $\theta$) *crescente*.

***Equação de Movimento.*** Aplicando a equação de movimento na *direção tangencial*, pois a força restauradora tem essa direção, obtemos

$$+\nearrow\Sigma F_t = ma_t; \qquad -mg \operatorname{sen}\theta = ma_t \tag{1}$$

***Cinemática.*** $a_t = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$. Além disso, a coordenada $s$ está relacionada com a posição angular $\theta$ pela equação $s = l\theta$, de modo que $a_t = l\ddot{\theta}$. Logo, a Equação 1 se reduz a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{2}$$

A solução dessa equação envolve o uso de uma integral elíptica. Todavia, para *pequenos deslocamentos*, sen $\theta \approx \theta$, logo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3}$$

A comparação dessa equação com a Equação 22.16 ($\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$) mostra que $\omega_n = \sqrt{g/l}$. Da Equação 22.12, o tempo (período) para uma oscilação da esfera é, portanto,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ ***Resposta***

Esse resultado interessante, descoberto experimentalmente por Galileu Galilei, indica que o período depende somente do comprimento do fio, e não da massa da esfera ou do ângulo $\theta$.

A solução da Equação 3 é dada pela Equação 22.3, substituindo $x$ por $\theta$ e considerando $\omega_n = \sqrt{g/l}$. Da mesma maneira que no caso do bloco e da mola, as constantes $A$ e $B$ nesse problema poderão ser determinadas se, por exemplo, forem conhecidos o deslocamento e a velocidade iniciais da esfera.

## EXEMPLO 22.2

A placa retangular de 10 kg mostrada na Figura 22.5*a* está suspensa em seu centro por uma barra de rigidez torcional $k = 1{,}5$ N·m/rad. Determine o período natural de vibração da placa quando se lhe comunica um pequeno deslocamento angular $\theta$ em seu próprio plano.

### SOLUÇÃO

***Diagrama de Corpo Livre.*** Consideremos a Figura 22.5*b*. Como a placa é deslocada em seu próprio plano, o momento torcional restaurador criado pela barra tem intensidade $M = k\theta$. Esse momento age no sentido oposto ao do deslocamento angular $\theta$. O sentido convencionado para a aceleração angular $\ddot{\theta}$ é o de *$\theta$ positivo*.

***Equação de Movimento.***

$$\Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad -k\theta = I_O\ddot{\theta}$$

ou

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I_O}\theta = 0$$

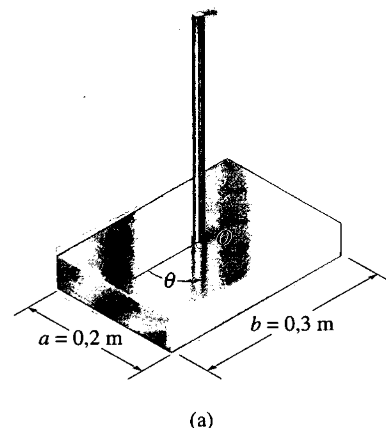
Como essa equação está na 'forma-padrão', a pulsação natural é $\omega_n = \sqrt{k/I_O}$.

Da tabela no final deste livro obtemos para o momento de inércia da placa em relação ao eixo coincidente com a barra a expressão $I_O = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$. Logo:

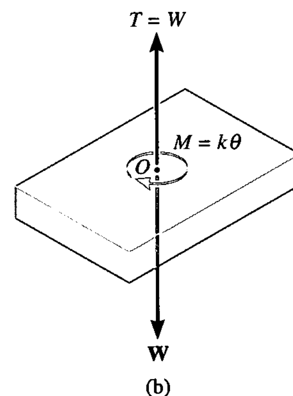
$$I_O = \frac{1}{12}(10\text{ kg})[(0{,}2\text{ m})^2 + (0{,}3\text{ m})^2] = 0{,}108\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

O período natural de vibração é, portanto,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}108}{1{,}5}} = 1{,}69\text{ s}$$ ***Resposta***




(a)

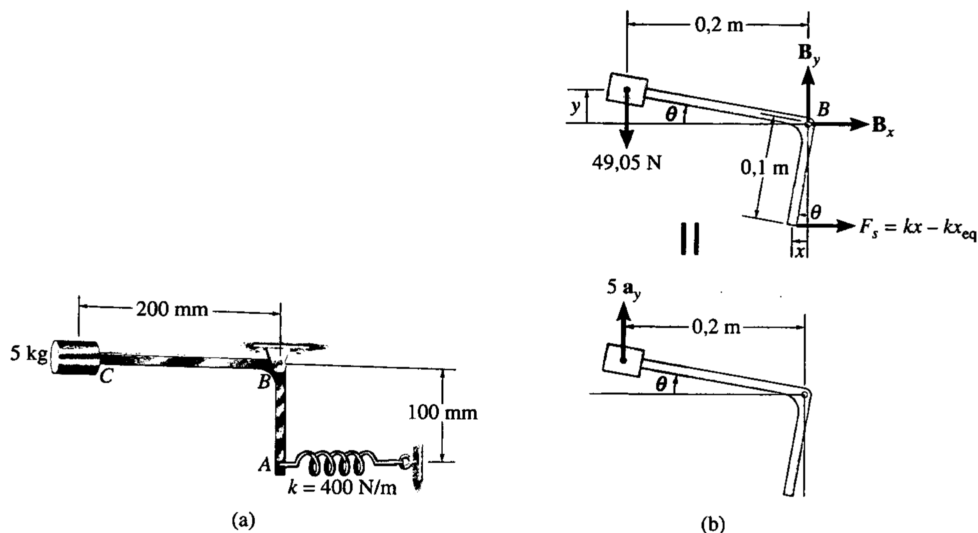



(b)

**Figura 22.5**

## EXEMPLO 22.3

A barra curva mostrada na Figura 22.6*a* tem massa desprezível e suporta um cursor de 5 kg em sua extremidade. Determine o período natural de vibração para o sistema.




### SOLUÇÃO

***Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico.*** Consideremos a Figura 22.6*b*. Desloca-se a barra em um pequeno ângulo $\theta$ em relação à sua posição de equilíbrio. Como a mola apresenta uma compressão inicial $x_{eq}$ para satisfazer a condição de equilíbrio, quando o deslocamento $x > x_{eq}$ a mola exerce na barra uma força $F_s = kx - kx_{eq}$. Para obter a 'forma-padrão' (Equação 22.16), $5\mathbf{a}_y$ age *para cima*, estando de acordo com o deslocamento positivo $\theta$.

***Equação de Movimento.*** Os momentos serão somados em relação ao ponto $B$ a fim de se eliminar a reação desconhecida nesse ponto. Como $\theta$ é pequeno,

$\circlearrowright + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B;$

$$kx(0{,}1\text{ m}) - kx_{eq}(0{,}1\text{ m}) + 49{,}05\text{ N}(0{,}2\text{ m}) = -(5\text{ kg})a_y(0{,}2\text{ m})$$

O segundo termo no primeiro membro dessa equação, $-kx_{eq}(0{,}1\text{m})$, representa o momento criado pela força da mola necessária para manter o cursor em *equilíbrio*, isto é, em $x = 0$. Esse momento tem a mesma intensidade do momento 49,05 N (0,2 m) criado pelo peso do cursor, de forma que esses dois momentos se cancelam por terem sentidos opostos. Assim:

$$kx(0{,}1) = -5a_y(0{,}2) \qquad (1)$$

***Cinemática.*** As posições da mola e do cursor podem ser relacionadas com o ângulo $\theta$ (Figura 22.6*c*). Uma vez que $\theta$ é pequeno, $x = (0{,}1\text{ m})\theta$ e $y = (0{,}2\text{ m})\theta$. Portanto, $a_y = \ddot{y} = 0{,}2\ddot{\theta}$. Substituindo esses resultados na Equação 1, temos

$$400(0{,}1\theta)0{,}1 = -5(0{,}2\ddot{\theta})0{,}2$$

Reescrevendo essa equação na 'forma-padrão', obtemos

$$\ddot{\theta} + 20\theta = 0$$

0,2 m
$y = 0{,}2\,\theta$
$\theta$
B
0,1 m
$\theta$
$x = 0{,}1\,\theta$
(c)

**Figura 22.6**

Comparando com $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ (Equação 22.16), temos

$$\omega_n^2 = 20 \qquad \omega_n = 4{,}47 \text{ rad/s}$$

e o período natural de vibração é, portanto,

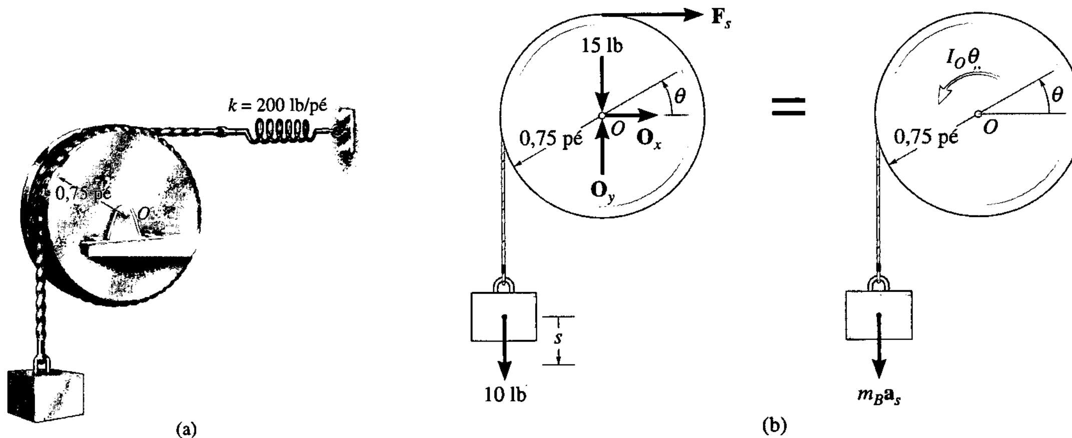
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4{,}47} = 1{,}40 \text{ s} \qquad \textit{Resposta}$$

## EXEMPLO 22.4

Um bloco de 10 lb está suspenso por uma corda que passa sobre um disco de 15 lb, como mostra a Figura 22.7*a*. A mola tem rigidez $k = 200$ lb/pé. Determine o período natural de vibração para o sistema.

### SOLUÇÃO

***Diagramas de Corpo Livre e Dinâmico.*** Consideremos a Figura 22.7*b*. O *sistema* consiste no disco, que sofre uma rotação definida pelo ângulo $\theta$, e o bloco, que se translada de $s$. O 'vetor' $I_O\ddot{\theta}$ tem o sentido correspondente a $\theta$ *positivo* e, conseqüentemente, $m_B\mathbf{a}_s$ tem o sentido (para baixo) correspondente a *s positivo*.




***Equação de Movimento.*** Somando os momentos em relação ao ponto $O$ para eliminar as reações $\mathbf{O}_x$ e $\mathbf{O}_y$ e observando que $I_O = \frac{1}{2}mr^2$, temos

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O;$$

$$10 \text{ lb}(0{,}75 \text{ pé}) - F_s(0{,}75 \text{ pé})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{15 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)(0{,}75 \text{ pé})^2\ddot{\theta} + \left(\frac{10 \text{ lb}}{32{,}2 \text{ pés/s}^2}\right)a_s(0{,}75 \text{ pé}) \qquad (1)$$

***Cinemática.*** Como mostra o diagrama cinemático na Figura 22.7*c*, a um pequeno deslocamento positivo $\theta$ do disco corresponde um deslocamento do bloco para baixo $s = 0{,}75\theta$; logo, $a_s = \ddot{s} = 0{,}75\ddot{\theta}$. Quando $\theta = 0°$, a força da mola necessária ao *equilíbrio* do disco tem uma intensidade de 10 lb e age para a direita. Para a posição $\theta$, a força da mola é $F_s = (200 \text{ lb/pé})(0{,}75\theta \text{ pé}) + 10$ lb. Substituindo esses resultados na Equação 1, obtemos após a simplificação

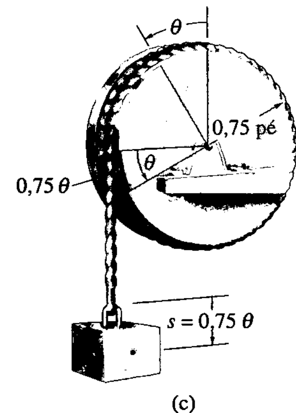



**Figura 22.7**

$$\ddot{\theta} + 368\theta = 0$$

Logo:

$$\omega_n^2 = 368 \qquad \omega_n = 19{,}2 \text{ rad/s}$$

Portanto, o período natural de vibração é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19{,}2} = 0{,}328 \text{ s}$$ ***Resposta***

## PROBLEMAS

**22.1.** Quando se suspende um peso de 20 lb por uma mola, esta se alonga 4 pol. Determine a freqüência natural e o período de vibração correspondente para um peso de 10 lb ligado à mola.

**22.2.** Uma mola tem rigidez de 600 N/m. Um bloco de 4 kg é preso à mola, empurrado 50 mm acima da sua posição de equilíbrio e solto a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento do bloco. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

**22.3.** Quando se prende um bloco de 3 kg com uma mola, esta se alonga 60 mm. Determine a freqüência natural e o período de vibração para um bloco de 0,2 kg ligado à mola.

***22.4.** Usa-se uma mola de rigidez $k$ = 80 N/m para suspender um bloco de 8 kg. Se ao bloco for comunicada uma velocidade para cima de 0,4 m/s quando este está 90 mm acima da sua posição de equilíbrio, determine a equação que descreverá o movimento do bloco e seu deslocamento máximo para cima, medido a partir da posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

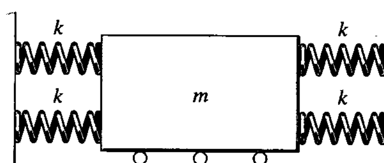
**22.5.** Suspende-se um bloco de 2 lb por uma mola de rigidez $k$ = 2 lb/pol. O peso é empurrado 1 pol para cima, a partir de sua posição de equilíbrio, e, então, é abandonado a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento. Quais são a amplitude e a freqüência natural de vibração?

**22.6.** Considere um bloco de 6 lb suspenso por uma mola de rigidez $k$ = 3 lb/pol. Comunica-se ao bloco uma velocidade de 20 pés/s para cima quando este está 2 pol acima da sua posição de equilíbrio. Determine a equação que descreve o movimento do bloco e seu deslocamento máximo para cima, medido a partir de sua posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

**22.7.** Considere um bloco de 6 kg suspenso por uma mola de rigidez $k$ = 200 N/m. Comunica-se ao bloco uma velocidade de 0,4 m/s para cima quando este está 75 mm acima da sua posição de equilíbrio. Determine a equação que descreve o movimento do bloco e o seu deslocamento máximo para cima, medido a partir de sua posição de equilíbrio. Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

***22.8.** Suspende-se um bloco de 3 kg por uma mola de rigidez $k$ = 200 N/m. O peso é empurrado 50 mm para cima, a partir da sua posição de equilíbrio, e, então, é abandonado a partir do repouso. Determine a equação que descreve o movimento. Quais são a amplitude e a freqüência natural de vibração? Suponha que os deslocamentos positivos sejam medidos para baixo.

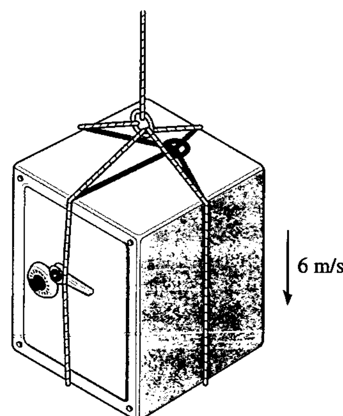
**22.9.** Determine a freqüência de vibração para o bloco. As molas estão comprimidas inicialmente Δ.




**Problema 22.9**

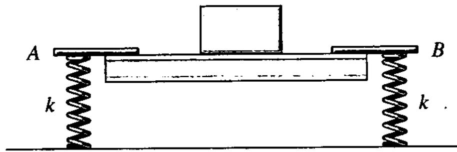
**22.10.** Comunica-se a um pêndulo uma velocidade tangencial para cima, quando este está ocupando a posição $\theta$ = 0,3 rad. Determine a equação que descreve o movimento angular. O fio do pêndulo tem 0,4 m de comprimento.

**22.11.** Usa-se um cabo para suspender um cofre de 800 lb. O cofre está descendo a 6 m/s, quando o motor sofre uma parada repentina. Determine a tensão máxima no cabo e a freqüência de vibração do cofre. O cabo, suposto elástico, se alonga 20 mm quando submetido a uma tensão de 4 kN. Despreze a massa do cabo.



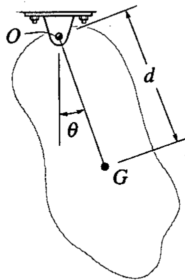

**Problema 22.11**

*22.12. Uma barra uniforme é suportada em suas duas extremidades pelas molas $A$ e $B$, cada uma com uma rigidez $k$. O período de vibração vertical da barra quando nada se apóia nela é de 0,83 s. Seu período se altera para 1,52 s, quando se coloca sobre seu centro uma massa de 50 kg. Calcule a rigidez de cada mola e a massa da barra.



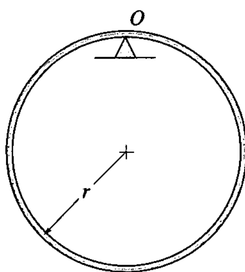

**Problema 22.12**

22.13. O corpo de forma arbitrária tem massa $m$, centro de massa em $G$ e raio de giração $k_G$ em relação a $G$. Desloca-se o corpo ligeiramente um ângulo $\theta$ em relação à sua posição de equilíbrio, e, em seguida, ele é abandonado. Determine o período natural de vibração.



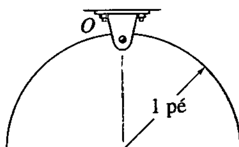

**Problema 22.13**

22.14. O anel delgado de massa $m$ apóia-se em um gume. Determine o período natural de vibração para pequenas amplitudes.



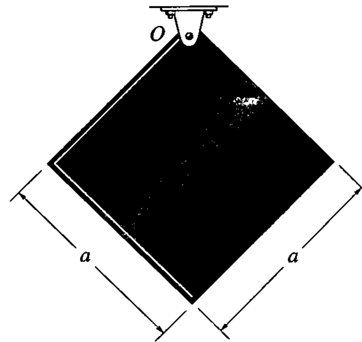

**Problema 22.14**

22.15. O semidisco circular pesa 20 lb. Determine o período natural de vibração se ele for deslocado ligeiramente da posição de equilíbrio e solto a seguir.



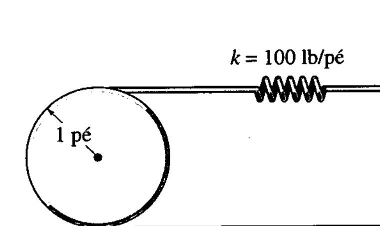

**Problema 22.15**

*22.16. A placa quadrada tem massa $m$ e está suspensa em um de seus vértices pelo pino $O$. Determine o período de vibração se ele for deslocado ligeiramente da posição de equilíbrio e solto a seguir.



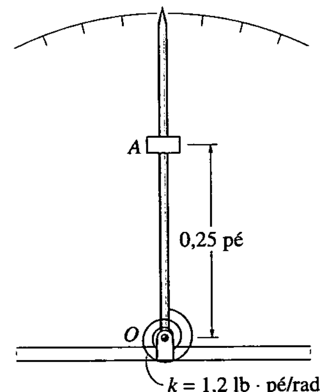

**Problema 22.16**

22.17. O disco tem peso de 10 lb e rola sem escorregar sobre a superfície horizontal, conforme ele oscila em relação à sua posição de equilíbrio. Desloca-se o disco de 0,4 rad, por rolamento, no sentido anti-horário. Determine a equação que descreve seu movimento oscilatório após ter sido solto.



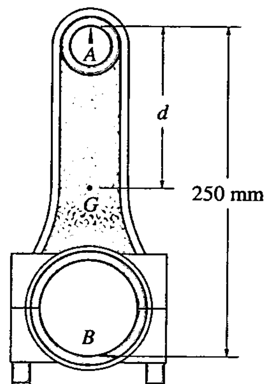

**Problema 22.17**

22.18. O ponteiro de um metrônomo suporta um cursor $A$ de 0,4 lb, que se encontra a uma distância fixa medida a partir do pivô $O$. Quando se desloca o ponteiro, uma mola de torção em $O$ exerce um torque restaurador de intensidade $M = (1{,}2\theta)$ lb · pé, onde $\theta$, em radianos, representa o ângulo do deslocamento em relação à vertical. Determine o período natural de vibração do ponteiro, quando este for deslocado um pequeno ângulo $\theta$ e solto a seguir. Despreze a massa do ponteiro.



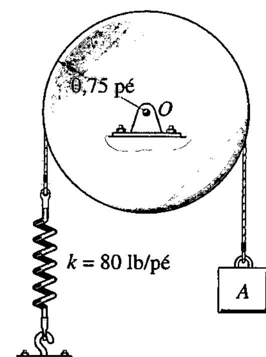

**Problema 22.18**

**22.19.** A biela, apoiada num gume em $A$, tem período de vibração $\tau_A = 3{,}38$ s. Se ela for removida e girada 180° para ser, então, apoiada no gume em $B$, seu período de vibração passará a ser $\tau_B = 3{,}96$ s. Determine a localização do seu centro de gravidade $G$ e calcule o raio de giração $k_G$.




**Problema 22.19**

***22.20.** O disco de 15 lb pode girar em torno do pino em seu centro $O$ e suportar um bloco $A$ de 3 lb. Se a correia que passa sobre o disco não escorrega na região de contato, determine o período natural de vibração do sistema.

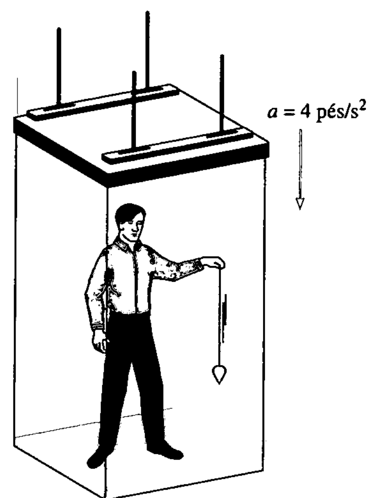



**Problema 22.20**

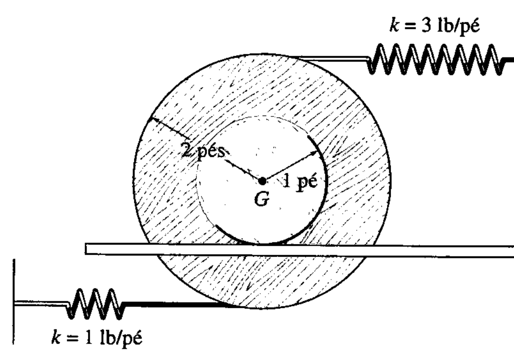
**22.21.** O homem no elevador segura um pêndulo de comprimento de 18 pol e peso de 0,5 lb. Se o elevador está descendo com aceleração $a = 4$ pés/s$^2$, determine o período de vibração para pequenas amplitudes.

**22.22.** A bobina de 50 lb prende-se a duas molas. Se a bobina é deslocada ligeiramente e, então, solta, determine o período natural de vibração. O raio de giração da bobina é $k_G = 1{,}5$ pé. A bobina rola sem escorregar.

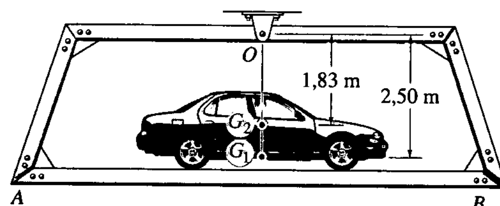
**22.23.** A plataforma $AB$, quando vazia, tem massa de 400 kg, centro de massa em $G_1$ e um período natural de oscilação $\tau_1 = 2{,}38$ s. Se um carro de 1,2 t e centro de massa em $G_2$ é colocado na plataforma, o período de oscilação passa a ser $\tau_2 = 3{,}16$ s. Determine o momento de inércia do carro em relação a um eixo que passa por $G_2$.




**Problema 22.21**

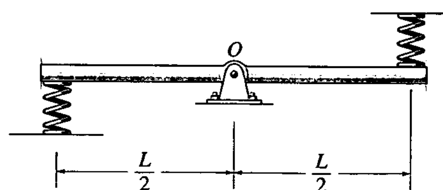



**Problema 22.22**



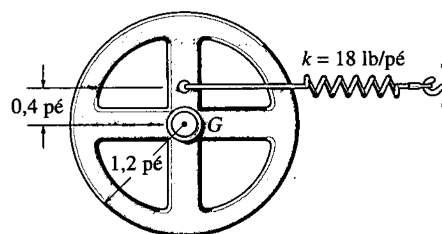

**Problema 22.23**

***22.24.** A barra uniforme tem massa $m$ e pode girar em torno do pino em $O$. Se a barra é deslocada ligeiramente e solta a seguir, determine o período natural de vibração. As molas não estão deformadas na posição mostrada na figura.




**Problema 22.24**

**22.25.** A roda de 50 lb tem raio de giração $k_G = 0{,}7$ pé, em relação a seu centro de massa $G$. Determine a freqüência de vibração se a roda for deslocada ligeiramente da posição de equilíbrio e solta a seguir. Suponha que não haja escorregamento.




**Problema 22.25**

# *22.2 MÉTODOS DE ENERGIA

O movimento harmônico simples de um corpo, discutido na seção anterior, se deve somente a forças restauradoras gravitacionais e elásticas que agem no corpo. Como essas forças são *conservativas*, também é possível usar a equação da conservação da energia para se obter a freqüência ou o período natural de vibração. Para mostrarmos como se pode obter essas quantidades, consideremos novamente o bloco e a mola mostrados na Figura 22.8. Quando o bloco em movimento ocupa a posição $x$ medida a partir da posição de equilíbrio, a energia cinética é $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ e a sua energia potencial é $V = \frac{1}{2}kx^2$. Pela conservação da energia (Equação 14.21), temos

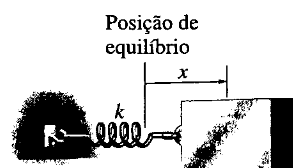



**Figura 22.8**

$$T + V = \text{constante}$$

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \qquad (22.17)$$

A equação diferencial que descreve o *movimento acelerado* do bloco pode ser deduzida *derivando-se* a equação anterior, em relação ao tempo, isto é,

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

Como a velocidade $\dot{x}$ *não é sempre* nula para um sistema em oscilação,

$$\ddot{x} + \omega_n{}^2 x = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

que é a Equação 22.1.

Se a equação da energia é escrita para um *sistema de corpos interligados*, a freqüência natural ou a equação de movimento também pode ser determinada por derivação temporal. Nesse caso, *não é necessário* desmembrar o sistema para levar em conta as forças de ligação e de reação que não realizam trabalho.



*A suspensão de um vagão de trem consiste num conjunto de molas montadas entre a estrutura do vagão e as rodas. Com essa montagem, o vagão apresenta uma freqüência natural de vibração que pode ser determinada.*

## PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE

A freqüência angular natural $\omega_n$ de um corpo ou sistema de corpos pode ser determinada aplicando-se a equação da conservação da energia de acordo com o procedimento a seguir.

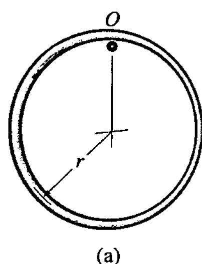
***Equação da Energia***

- Desenhe o corpo deslocado *ligeiramente* de sua posição de equilíbrio e defina a sua localização (coordenada de posição $q$) relativamente à posição de equilíbrio
- Formule a equação da energia para o corpo, $T + V = constante$, em função da coordenada de posição.
- Em geral, a energia cinética deve levar em conta os movimentos de translação e rotação do corpo, $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_n^2$ (Equação 18.2).
- A energia potencial é a soma das energias potenciais gravitacional e elástica do corpo, $V_g + V_e$ (Equação 18.16). Em particular, $V_g$ deve ser medida em relação a um nível de referência para o qual $q = 0$ (posição de equilíbrio).

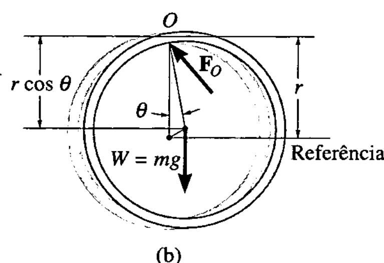
***Derivada Temporal***

- Calcule a derivada temporal da equação da energia usando a regra da cadeia do cálculo diferencial e fatore os termos comuns. A equação diferencial resultante representa a equação de movimento para o sistema. O valor de $\omega_n$ é obtido depois de se rearranjarem os termos na 'forma-padrão', $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

## EXEMPLO 22.5




(a)




(b)

**Figura 22.9**

O anel delgado mostrado na Figura 22.9*a* apóia-se em um pino em *O*. Determine o período natural de oscilação para pequenas amplitudes. A massa do anel é *m*.

### SOLUÇÃO

***Equação da Energia.*** A Figura 22.9*b* mostra um diagrama do anel deslocado de um pequeno valor ($q =$) $\theta$ em relação à posição de equilíbrio. Usando a tabela no final do livro e o teorema dos eixos paralelos para determinar $I_O$, podemos expressar a energia cinética como

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega_n^2 = \frac{1}{2}[mr^2 + mr^2]\dot{\theta}^2 = mr^2\dot{\theta}^2$$

Se uma referência horizontal é adotada no centro de gravidade do anel, para $\theta = 0$, então o centro de gravidade se move para cima $r(1 - \cos\theta)$. Para *pequenos ângulos*, $\cos\theta$ pode ser substituído pelos primeiros dois termos da sua expansão em série, $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + \dots$. Logo, a energia potencial é dada por

$$V = mgr\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right] = mgr\frac{\theta^2}{2}$$

A expressão para a energia total resulta em

$$T + V = mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\frac{\theta^2}{2}$$

***Derivada temporal.***

$$mr^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgr\theta\dot{\theta} = 0$$

$$mr\dot{\theta}(2r\ddot{\theta} + g\theta) = 0$$

Como $\dot{\theta}$ não é sempre igual a zero, o termo entre parênteses se anula:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2r}\theta = 0$$

Logo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

de modo que

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$$ ***Resposta***

---

## EXEMPLO 22.6

Um bloco de 10 kg está suspenso por uma corda enrolada na periferia de um disco de 5 kg, como mostra a Figura 22.10*a*. Se a mola tem rigidez $k = 200$ N/m, determine o período natural de vibração para o sistema.

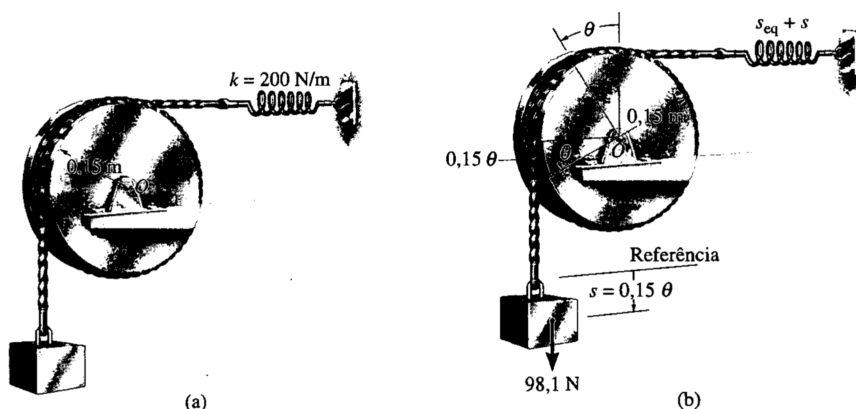



**Figura 22.10**

## SOLUÇÃO

***Equação da Energia.*** A Figura 22.10*b* mostra um diagrama do bloco e disco quando eles estão deslocados de $s$ e $\theta$ em relação a suas posições de equilíbrio, respectivamente. Como $s = (0{,}15 \text{ m})\theta$, a energia cinética do sistema é

$$T = \tfrac{1}{2}m_b v_b^2 + \tfrac{1}{2}I_O\omega_d^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})[(0{,}15 \text{ m})\dot{\theta}]^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(5 \text{ kg})(0{,}15 \text{ m})^2](\dot{\theta})^2$$

$$= 0{,}141(\dot{\theta})^2$$

Estabelecendo a referência na posição de equilíbrio do bloco e observando que a mola se alonga $s_{eq}$ no equilíbrio, podemos escrever a seguinte expressão para a energia potencial

$$V = \tfrac{1}{2}k(s_{eq} + s)^2 - Ws$$
$$= \tfrac{1}{2}(200\ \text{N/m})[s_{eq} + (0{,}15\ \text{m})\theta]^2 - 98{,}1\ \text{N}[(0{,}15\ \text{m})\theta]$$

A energia total para o sistema é, portanto,

$$T + V = 0{,}141(\dot{\theta})^2 + 100(s_{st} + 0{,}15\theta)^2 - 14{,}72\theta$$

***Derivada Temporal.***

$$0{,}281(\dot{\theta})\ddot{\theta} + 200(s_{st} + 0{,}15\theta)0{,}15\dot{\theta} - 14{,}72\dot{\theta} = 0$$

Como $s_{eq} = 98{,}1/200 = 0{,}4905$ m, a equação acima se reduz à 'forma-padrão'

$$\ddot{\theta} + 16\theta = 0$$

de modo que

$$\omega_n = \sqrt{16} = 4\ \text{rad/s}$$

e, portanto,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57\ \text{s}$$ ***Resposta***

## PROBLEMAS

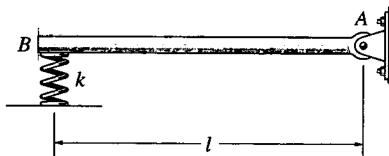
**22.26.** Resolva o Problema 22.13 usando métodos de energia.

**22.27.** Resolva o Problema 22.15 usando métodos de energia.

***22.28.** Resolva o Problema 22.16 usando métodos de energia.

**22.29.** Resolva o Problema 22.20 usando métodos de energia.

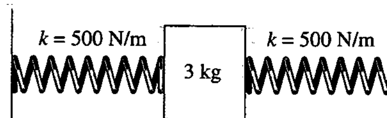
**22.30.** A barra uniforme de massa $m$ é suportada por um pino em $A$ e uma mola em $B$. Se a extremidade $B$ sofre um pequeno deslocamento para baixo e é solta, determine o período natural de vibração.



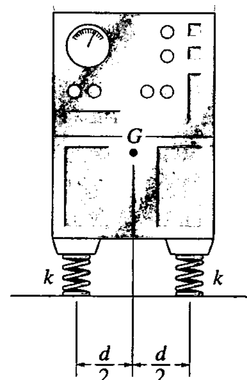

**Problema 22.30**

**22.31.** Determine a equação diferencial de movimento do bloco de 3 kg que é ligeiramente deslocado e solto a seguir. A superfície é lisa e as molas estão inicialmente não deformadas.

***22.32.** A máquina tem massa $m$ e está suportada uniformemente por *quatro* molas, cada uma com rigidez $k$. Determine o período natural de vibração vertical.



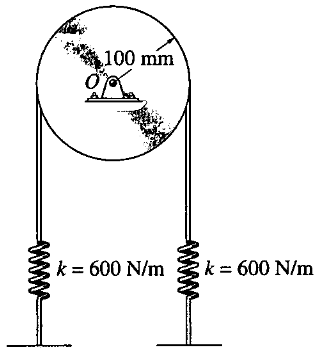

**Problema 22.31**




**Problema 22.32**

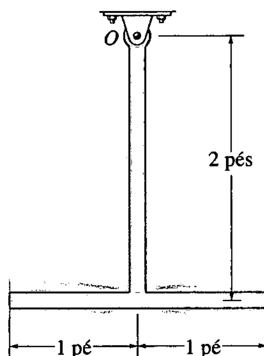
**22.33.** O disco de 7 kg pode girar em torno do pino em seu centro. Determine o período natural de vibração do disco se

as molas estão suficientemente tensas para evitar que, durante as oscilações, o cabo escorregue sobre o disco. *Dica:* suponha que a deformação inicial de cada mola seja $\delta_O$. A contribuição dessa deformação se cancela após se derivar a equação da energia.



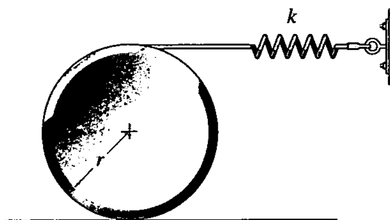

**Problema 22.33**

**22.34.** Determine o período natural de vibração do pêndulo. Considere que as duas barras sejam delgadas, cada uma com um peso de 8 lb/pé.



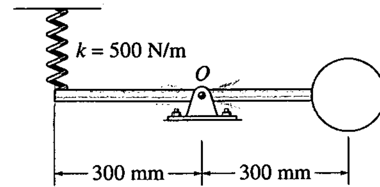

**Problema 22.34**

**22.35.** Determine o período natural de vibração do disco de massa $m$ e raio $r$. Suponha que durante as oscilações o disco não escorregue na superfície de contato.



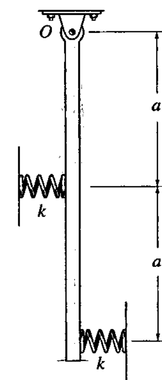

**Problema 22.35**

***22.36.** Determine o período natural de vibração da esfera de 3 kg. Despreze a massa da barra e o tamanho da esfera.



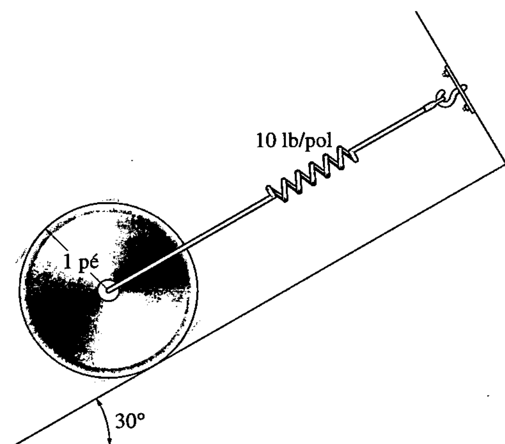

**Problema 22.36**

**22.37.** A barra delgada de massa $m$ está suspensa e pode girar em torno do pino em $O$. Quando a barra está na posição vertical, as molas não estão deformadas. Determine o período natural de vibração.



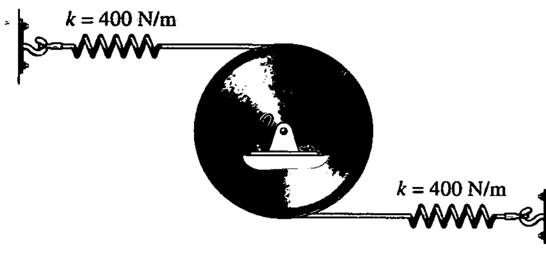

**Problema 22.37**

**22.38.** Determine a freqüência natural de vibração do disco de 20 lb. Suponha que o disco não escorregue na superfície inclinada.



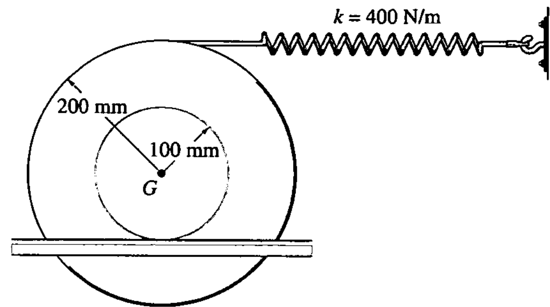

**Problema 22.38**

**22.39.** Se o disco tem massa de 8 kg, determine a freqüência natural de vibração. As molas estão inicialmente não deformadas.




Problema 22.39

***22.40.** Determine a equação diferencial de movimento da bobina de 3 kg. Suponha que, durante as oscilações, ela não escorregue na superfície de contato. O raio de giração da bobina em relação ao seu centro de massa é $k_G$ = 125 mm.




Problema 22.40

## *22.3 Vibração Forçada sem Amortecimento

Considera-se a vibração forçada não amortecida um dos tipos mais importantes de movimento vibratório em trabalhos de engenharia. Os princípios que descrevem a natureza desse movimento podem ser usados para se analisarem as forças que causam vibração em muitos tipos de máquina e estruturas.

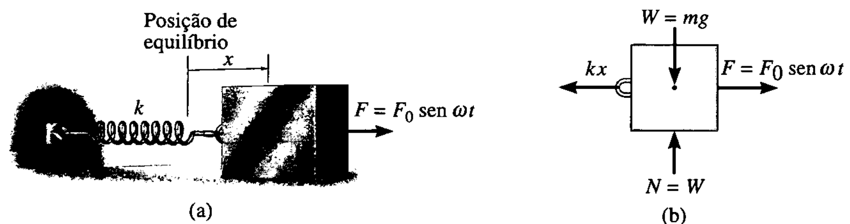



**Figura 22.11**

***Força Periódica.*** O bloco e mola mostrados na Figura 22.11*a* são um modelo conveniente para representar as características vibratórias de um sistema submetido a uma força periódica $F = F_0$ sen $\omega t$. Essa força tem amplitude $F_0$ e *freqüência angular* $\omega$. A Figura 22.11*b* mostra o diagrama de corpo livre para o bloco deslocado de uma distância $x$. A aplicação da equação de movimento resulta em

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x; \qquad F_0 \operatorname{sen} \omega t - kx = m\ddot{x}$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22.18)$$

Essa equação é uma equação diferencial de segunda ordem não homogênea, cuja solução geral consiste em uma solução 'complementar', $x_c$, *mais* uma solução particular, $x_p$.

Como *solução complementar* entende-se a solução geral da equação homogênea associada à Equação 22.18, isto é, a equação obtida ao se fazer o segundo

membro da Equação 22.18 igual a zero, que é equivalente à Equação 22.1. A solução complementar é, pois, definida pela Equação 22.3, isto é,

$$x_c = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \qquad (22.19)$$

onde $\omega_n$ é a freqüência angular natural, $\omega_n = \sqrt{k/m}$ (Equação 22.2).

Como o movimento é periódico, uma *solução particular* da Equação 22.18 pode ser determinada propondo-se uma solução da forma

$$x_p = C \operatorname{sen} \omega t \qquad (22.20)$$

onde $C$ é uma constante. Calculando a derivada temporal de segunda ordem e substituindo o resultado na Equação 22.18, temos

$$-C\omega^2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{k}{m}(C \operatorname{sen} \omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega t$$

Fatorando o termo sen $\omega t$ e resolvendo para $C$, obtemos

$$C = \frac{F_0/m}{(k/m) - \omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \qquad (22.21)$$

Substituindo essa expressão na Equação 22.20, obtemos a solução específica

$$\boxed{x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega t} \qquad (22.22)$$

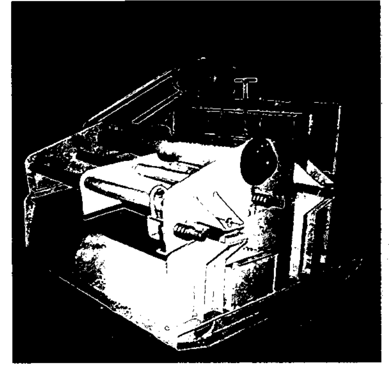
Como *solução geral* temos, portanto,

$$x = x_c + x_p = A \operatorname{sen} \omega_n + B \cos \omega_n + \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega t \qquad (22.23)$$

Nessa equação, $x$ descreve dois tipos de movimento vibratório do bloco. A *solução complementar* $x_c$ define a *vibração livre*, que depende da freqüência angular $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e das constantes $A$ e $B$ (Figura 22.12*a*). Os valores das constantes $A$ e $B$ podem ser determinados calculando-se a Equação 22.23 e sua derivada temporal (isto é, a equação para a velocidade) para um dado instante (normalmente o instante inicial), para o qual se conhecem a posição e a velocidade. A *solução particular* $x_p$ descreve a *vibração forçada* do bloco causada pela força aplicada $F = F_0$ sen $\omega t$ (Figura 22.12*b*). A vibração resultante $x$ pode ser vista na Figura 22.12*c*. Como todos os sistemas vibrantes estão, na realidade, sujeitos a *atrito*, a vibração livre, $x_c$, se atenua com o passar do tempo e tende a desaparecer (veja a Seção 22.5). Por essa razão, a vibração livre é denominada *transitória*. Por sua vez, a vibração forçada é chamada de vibração *em regime estacionário* ou *permanente*, pois se mantém indefinidamente (Figura 22.12*d*).

Podemos observar que na Equação 22.21 a *amplitude* da vibração forçada depende da *razão de freqüências* $\omega/\omega_n$. Definindo o *fator de amplificação* FA como a razão entre a amplitude de vibração no regime permanente, $(x_p)_{\text{máx}}$, e a deflexão estática $F_0/k$, que seria produzida pela amplitude $F_0$ da força periódica, então, da Equação 22.22,

$$\text{FA} = \frac{(x_p)_{\text{máx}}}{F_0/k} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \qquad (22.24)$$



*Mesas vibratórias produzem vibrações forçadas, sendo utilizadas na separação de material granular.*



*O compactador de solo opera por meio de vibração forçada desenvolvida por um motor interno. É importante que a freqüência da força aplicada não seja próxima da freqüência natural de vibração, que é determinada quando o motor é desligado; caso contrário, ocorrerá ressonância e a máquina se tornará incontrolável.*

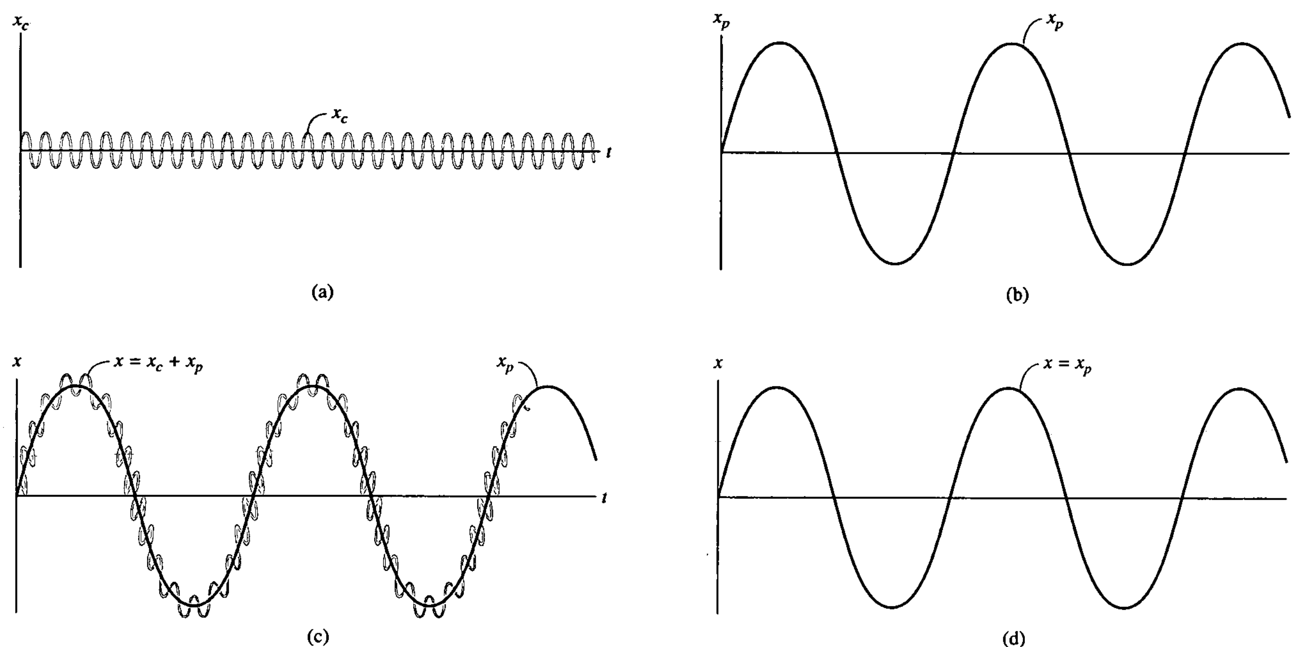



**Figura 22.12**

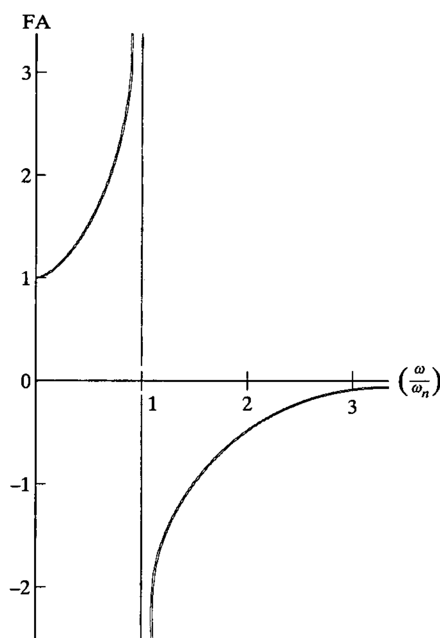



**Figura 22.13**

A equação anterior está representada graficamente na Figura 22.13. Observemos que para $\omega \approx 0$, FA $\approx 1$. Nesse caso, devido à freqüência muito baixa $\omega \ll \omega_n$, a intensidade da força excitadora **F** muda lentamente, de forma que a vibração do bloco estará em fase com **F**. Se a força ou o deslocamento é aplicado com uma freqüência próxima à freqüência natural do sistema, isto é, $\omega/\omega_n \approx 1$, a amplitude da vibração do bloco se torna extremamente grande. Isso ocorre porque a força **F** aplicada acompanha o movimento do bloco. Diz-se nesse caso que ocorre *ressonância*. Na prática, vibrações ressonantes podem causar tensões enormes e a rápida quebra de peças.[1] Quando se aplica a força cíclica $F = F_0$ sen $\omega t$ a altas freqüências ($\omega > \omega_n$), o valor de FA se torna negativo, indicando que o movimento do bloco está fora de fase com a força. Nessas condições, à medida que o bloco se desloca para a direita, a força age para a esquerda e vice-versa. Para freqüências extremamente altas ($\omega \gg \omega_n$), o bloco permanece quase parado e, portanto, FA é aproximadamente zero.

***Deslocamento Periódico do Suporte.*** Vibrações forçadas também podem aparecer devido à excitação periódica do suporte de um sistema. O modelo mostrado na Figura 22.14*a* representa a vibração periódica de um bloco causada pelo movimento harmônico $\delta = \delta_0$ sen $\omega t$ do suporte. O diagrama de corpo livre para bloco nesse caso pode ser visto na Figura 22.14*b*. A coordenada $x$ é medida a partir do ponto de deslocamento nulo do suporte, isto é, quando a linha radial $OA$ coincide com $OB$ (Figura 22.14*a*). Logo, a deformação da mola é $(x - \delta_0 \text{ sen } \omega t)$. Aplicando a equação de movimento, temos

$$\overset{+}{\rightarrow} F_x = ma_x; \qquad -k(x - \delta_0 \,\text{sen}\, \omega t) = m\ddot{x}$$

[1] Um balanço tem um período de vibração natural, como se determinou no Exemplo 22.1. Se alguém empurra o balanço quando ele atinge o seu ponto mais alto, então, desprezando a força de arrasto, ocorrerá ressonância, pois as freqüências natural e a da força aplicada serão iguais.

ou

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\delta_0}{m}\,\text{sen}\,\omega t \qquad (22.25)$$

Por comparação, essa equação tem a forma da Equação 22.18. Observemos que as duas equações são idênticas, caso se substitua $F_0$ por $k\delta_0$. Essa substituição nas soluções dadas pelas equações 22.21 a 22.23 torna os resultados apropriados à descrição do movimento do bloco submetido ao deslocamento do suporte $\delta_0$ sen $\omega t$.

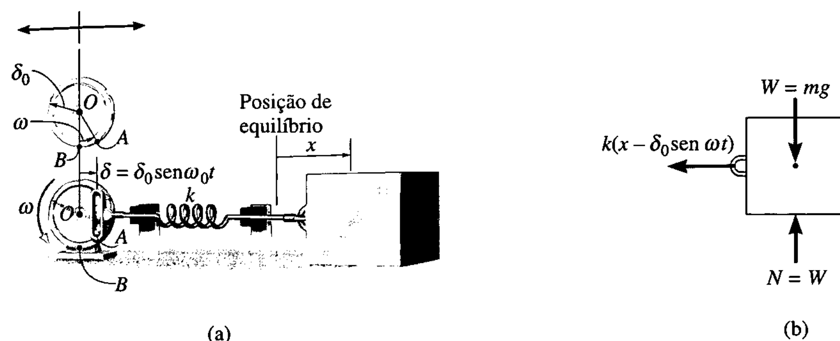



**Figura 22.14**

## EXEMPLO 22.7

O instrumento mostrado na Figura 22.15 está preso rigidamente à plataforma $P$, que por sua vez é suportada por *quatro* molas, cada uma com uma rigidez $k = 800$ N/m. A plataforma está inicialmente em repouso. Num dado instante, o piso passa a sofrer um deslocamento $\delta = 10$ sen $(8t)$ mm, onde $t$ é dado em segundos. Se o instrumento é forçado a se mover verticalmente, determine o deslocamento vertical $y$ da plataforma como uma função do tempo. Considere $y$ medido a partir da posição de equilíbrio e suponha que a massa total do instrumento e da plataforma seja de 20 kg.

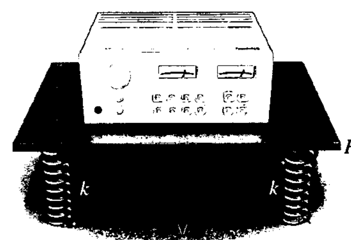



**Figura 22.15**

## SOLUÇÃO

Como a vibração é provocada pelo deslocamento dos suportes, o movimento é descrito pela Equação 22.23, com $F_0$ substituído por $k\delta_0$; isto é,

$$y = A\,\text{sen}\,\omega_n t + B\cos\omega_n t + \frac{\delta_0}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\,\text{sen}\,\omega t \qquad (1)$$

Aqui $\delta = \delta_0$ sen $\omega t = 10$ sen $(8t)$ mm, de modo que

$$\delta_0 = 10\text{ mm} \qquad \omega_0 = 8\text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4(800\text{ N/m})}{20\text{ kg}}} = 12{,}6\text{ rad/s}$$

Da Equação 22.22, com $k\delta_0$ substituindo $F_0$, a amplitude de vibração provocada pelo deslocamento do piso é

$$(y_{\omega_n})_{\text{máx}} = \frac{\delta_0}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = \frac{10}{1 - [(8\text{ rad/s})/(12{,}6\text{ rad/s})]^2} = 16{,}7\text{ mm} \qquad (2)$$

Logo, a Equação 1 e sua derivada temporal se tornam

$$y = A\,\text{sen}(12{,}6t) + B\cos(12{,}6t) + 16{,}7\,\text{sen}(8t)$$

$$\dot{y} = A(12{,}6)\cos(12{,}6t) - B(12{,}6)\,\text{sen}(12{,}6t) + 133{,}3\cos(8t)$$

As constantes $A$ e $B$ podem ser obtidas a partir dessas condições, considerando que $y = 0$ e $\dot{y} = 0$ para $t = 0$. Temos, portanto,

$$0 = 0 + B + 0 \qquad B = 0$$

$$0 = A(12{,}6) - 0 + 133{,}3 \quad A = -10{,}5$$

O movimento vibratório é descrito, portanto, pela equação

$$y = -10{,}5\,\text{sen}(12{,}6t) + 16{,}7\,\text{sen}(8t)$$ ***Resposta***

Ocorrerá ressonância quando a amplitude de vibração provocada pelo deslocamento do piso aproximar-se da infinitude. De acordo com a Equação 2, isso exige que

$$\omega = \omega_n = 12{,}6 \text{ rad/s}$$ ***Resposta***

## *22.4 Vibração Livre com Amortecimento Viscoso

A análise do movimento de vibração considerada até a seção anterior não incluía os efeitos do atrito ou amortecimento no sistema, de modo que as soluções obtidas são apenas aproximadas. Como todas as vibrações livres desaparecem com o tempo, é necessário incluir na análise o efeito de forças de amortecimento.

Em muitos casos o amortecimento é atribuído à resistência criada pela substância, como água, óleo ou ar, na qual o sistema vibra. Para um corpo que se move lentamente no meio fluido, a resistência ao movimento é diretamente proporcional à velocidade do corpo. Força desse tipo é denominada *força de amortecimento viscoso*. A intensidade dessa força é expressa por uma equação da forma

$$F = c\dot{x} \qquad (22.26)$$

onde a constante $c$ é chamada *coeficiente de amortecimento viscoso* e tem como unidades N·s/m (no SI) ou lb·s/pé.

O movimento vibratório de um corpo ou sistema com amortecimento viscoso pode ser caracterizado pelo bloco e mola mostrados na Figura 22.16*a*. O efeito do amortecimento é incluído no modelo pelo *amortecedor* ligado ao

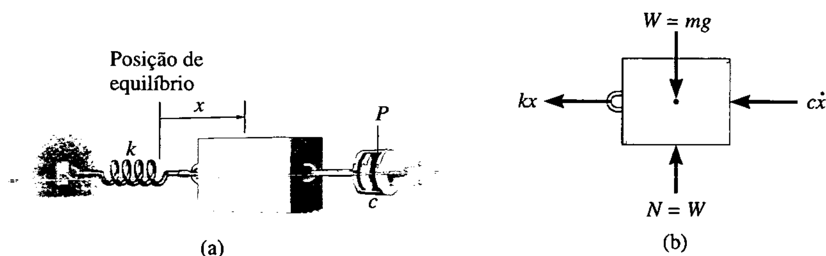



**Figura 22.16**

bloco no lado direito. Ocorre amortecimento quando o pistão $P$ no interior do cilindro se move para a direita ou para a esquerda. O cilindro contém um fluido, e o movimento do pistão é retardado, pois o fluido deve escoar ao redor do pistão ou através de um pequeno orifício nesse pistão. Supõe-se que o amortecedor apresenta um coeficiente de amortecimento viscoso $c$.

A Figura 22.16*b* mostra o diagrama de corpo livre do bloco, considerando que ele foi deslocado de uma distância $x$ a partir de sua posição de equilíbrio. Tanto a força da mola $kx$ quanto a força de amortecimento $c\dot{x}$ opõem-se ao movimento para a frente apresentado pelo bloco. A aplicação da equação de movimento resulta em

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (22.27)$$

A equação anterior (que é uma equação diferencial ordinária, linear, de segunda ordem, homogênea) tem solução da forma

$$x = e^{\lambda t}$$

onde $e$ é a base dos logaritmos naturais e $\lambda$ é uma constante. O valor de $\lambda$ pode ser obtido substituindo-se essa solução na Equação 22.27, o que nos dá

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$$

ou

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$

Como $e^{\lambda t}$ nunca é zero, uma solução será possível se impusermos

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, obtemos dois valores de $\lambda$:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$
$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad (22.28)$$

A solução geral da Equação 22.27 é, portanto, uma combinação linear de exponenciais que envolve essas duas raízes. Há três possibilidades de combinação de $\lambda_1$ e $\lambda_2$ que devem ser consideradas. Antes de discutir essas combinações, definiremos o *coeficiente de amortecimento crítico* $c_c$ como o valor de $c$ que anula o radicando nas Equações 22.28, isto é,

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

ou

$$\boxed{c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n} \qquad (22.29)$$

Nessa equação, $\omega_n$ é a freqüência angular natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$ (Equação 22.2).

***Sistema Superamortecido.*** Quando $c > c_c$, as raízes $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são reais negativas. A solução geral da Equação 22.27 pode, então, ser escrita como

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \tag{22.30}$$

O movimento correspondente a essa solução é *não vibratório*. O efeito do amortecimento é tão intenso que, quando o bloco é deslocado e solto, ele simplesmente volta para a posição inicial sem oscilar. Diz-se que o sistema é *superamortecido*.

***Sistema Criticamente Amortecido.*** Se $c = c_c$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -c_c/2m = -\omega_n$. Essa situação é conhecida como *amortecimento crítico*, pois ela representa a condição para a qual $c$ tem o menor valor necessário para o sistema ser não vibratório. Usando os métodos de equações diferenciais, podemos mostrar que a solução da Equação 22.27 para o amortecimento crítico é

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \tag{22.31}$$

***Sistema Subamortecido.*** Em muitos casos, $c < c_c$. Nessa situação o sistema é dito *subamortecido*. As raízes $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são números complexos conjugados. Podemos mostrar que a solução geral da Equação 22.27 pode ser escrita na forma

$$\boxed{x = D[e^{-(c/2m)t}\,\mathrm{sen}(\omega_d t + \phi)]} \tag{22.32}$$

onde $D$ e $\phi$ são constantes que podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema, isto é, pelos valores da posição e da velocidade iniciais. A constante $\omega_d$ é denominada *freqüência angular* (ou *pulsação*) *natural amortecida** do sistema. Seu valor é dado por

$$\boxed{\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2}} \tag{22.33}$$

onde a razão $c/c_c$ é conhecida como *fator de amortecimento*.

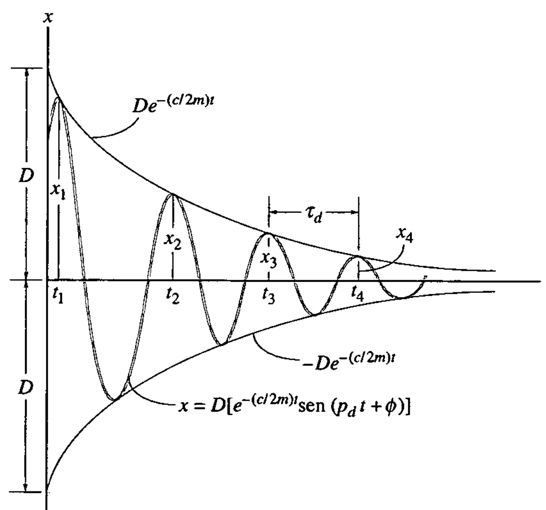



**Figura 22.17**

* Com a expressão "freqüência angular natural *amortecida*", deseja-se indicar que se trata da freqüência angular natural de *sistema com amortecimento* (N. do T.).

A Figura 22.17 mostra o gráfico da Equação 22.32. Devido à função exponencial, o deslocamento limite do sistema decresce a cada ciclo. Usando a pulsação natural amortecida $\omega_d$, o período, $\tau_d$, da vibração amortecida pode ser escrito como

$$\boxed{\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d}} \tag{22.34}$$

Como $\omega_d < \omega_n$ (Equação 22.33) o período da vibração amortecida, $\tau_d$, é maior do que o período da vibração não amortecida, $\tau = 2\pi/\omega_n$.

## *22.5 VIBRAÇÃO FORÇADA COM AMORTECIMENTO VISCOSO

O caso mais geral de movimento vibratório com um grau de liberdade ocorre quando o sistema inclui os efeitos do movimento forçado e do amortecimento induzido. A análise desse tipo de vibração é de grande valor prático quando aplicada a sistemas que apresentam características significativas de amortecimento.

Ligando-se um amortecedor ao sistema bloco-mola mostrado na Figura 22.11*a*, a equação diferencial que descreve o movimento é dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{22.35}$$

Uma equação semelhante pode ser escrita para um bloco e uma mola sujeitos a deslocamentos periódicos de seu suporte (Figura 22.14*a*), incluindo efeitos de amortecimento. Nesse caso, deve-se substituir $F_0$ por $k\delta_0$. Como a Equação 22.35 é não homogênea, sua solução geral é a soma da solução complementar, $x_c$, com uma solução particular, $x_p$. A solução complementar é determinada igualando-se a zero o primeiro membro da Equação 22.35, e resolvendo-se, portanto, a equação homogênea resultante, que é a Equação 22.27. A solução complementar é dada, portanto, pelas equações 22.30, 22.31 ou 22.32, dependendo dos valores de $\lambda_1$ e $\lambda_2$. Como já discutido, essa solução é sempre amortecida, devido ao atrito sempre presente. Somente a solução particular, que descreve a vibração estacionária do sistema, permanece indefinidamente. Como a força aplicada é harmônica, o movimento em regime estacionário também é harmônico. Conseqüentemente, a solução particular tem a forma

$$x_p = A' \operatorname{sen} \omega t + B' \cos \omega t \tag{22.36}$$

Para a determinação das constantes $A'$ e $B'$ devemos calcular as derivadas temporais necessárias e substituí-las nas equações 22.35. Após simplificarmos o resultado, obtemos

$$(-A'm\omega^2 - cB'\omega + kA') \operatorname{sen} \omega t + (-B'm\omega^2 + cA'\omega + kB') \cos \omega t = F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Como essa equação é válida para qualquer valor do tempo, os coeficientes constantes das funções sen $\omega t$ e cos $\omega t$ devem ser igualados, isto é,

$$-A'm\omega^2 - cB'\omega + kA' = F_0$$

$$-B'm\omega^2 + cA'\omega + kB' = 0$$

Resolvendo o sistema algébrico e lembrando que $\omega_n^2 = k/m$, temos

$$A' = \frac{(F_0/m)(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/m)^2}$$
$$B' = \frac{-F_0(c\omega/m^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/m)^2} \qquad (22.37)$$

Também é possível expressar a Equação 22.36 numa forma semelhante à da Equação 22.9

$$x_p = C' \operatorname{sen}(\omega t - \phi') \qquad (22.38)$$

com as constantes $C'$ e $\phi'$ dadas por

$$\boxed{C' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2}}}$$
$$\boxed{\phi' = \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{2(c/c_c)(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right]} \qquad (22.39)$$

O ângulo $\phi'$ representa a diferença de fase entre a força aplicada e a vibração resultante no regime estacionário do sistema amortecido.

O *fator de amplificação* FA foi definido na Seção 22.3 como a razão entre a amplitude da deflexão provocada pela vibração forçada e a deflexão causada pela força estática $\mathbf{F}_0$. Da Equação 22.38, a vibração forçada tem amplitude $C'$; assim,

$$\text{FA} = \frac{C'}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2}} \qquad (22.40)$$

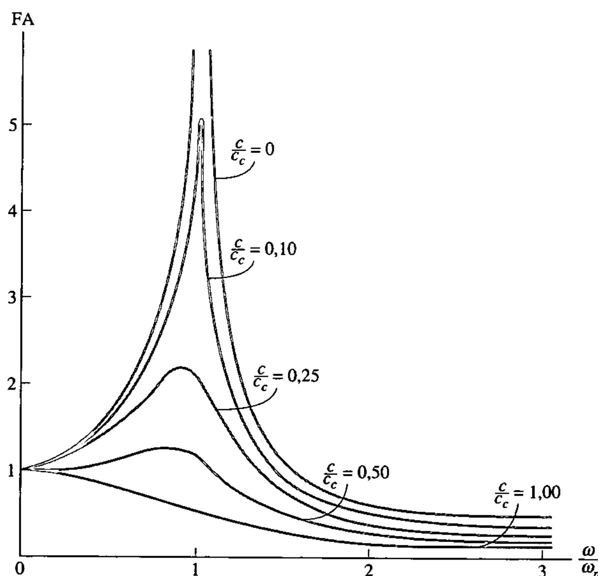



**Figura 22.18**

A Figura 22.18 mostra o gráfico do fator de amplificação FA *versus* a razão $\omega/\omega_n$ para diferentes valores do fator de amortecimento $c/c_c$. Podemos ver desse gráfico que FA aumenta à medida que o fator de amortecimento decresce. A

ressonância ocorre apenas quando o fator de amortecimento é nulo e a razão de freqüência é igual a um.

## EXEMPLO 22.8

O motor elétrico mostrado na Figura 22.19 está apoiado em *quatro* molas, cada uma com rigidez de 200 N/m. Considerando o rotor não balanceado, de modo que seu efeito seja equivalente a uma massa de 4 kg localizada a 60 mm do eixo de rotação, determine a amplitude de vibração para o rotor girando a $\omega = 10$ rad/s. O fator de amortecimento é $c/c_c = 0{,}15$.

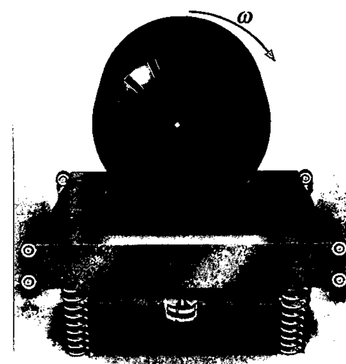



**Figura 22.19**

## SOLUÇÃO

A força periódica que causa a vibração é a força centrífuga devida ao não-balanceamento do rotor. Essa força tem módulo constante dado por

$$F_0 = ma_n = mr\omega^2 = 4\,\text{kg}(0{,}06\,\text{m})(10\,\text{rad/s})^2 = 24\,\text{N}$$

Como $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, com $\omega = 10$ rad/s, então

$$F = 24 \operatorname{sen} 10t$$

A rigidez do sistema de quatro molas é $k = 4(200\,\text{N/m}) = 800$ N/m. Logo, a freqüência natural de vibração é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\,\text{N/m}}{30\,\text{kg}}} = 5{,}16\,\text{rad/s}$$

Como o fator amortecimento é conhecido, a amplitude no regime estacionário pode ser determinada pela primeira das equações 22.39:

$$C' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2}}$$

$$= \frac{24/800}{\sqrt{[1-(10/5{,}16)^2]^2 + [2(0{,}15)(10/5{,}16)]^2}}$$

$$= 0{,}0107\,\text{m} = 10{,}7\,\text{mm}$$ ***Resposta***

# *22.6 ANALOGIA COM CIRCUITOS ELÉTRICOS

As características de um sistema mecânico vibratório podem ser representadas por um circuito elétrico. Consideremos o circuito mostrado na Figura 22.20*a*, representando um indutor de indutância $L$, um resistor de resistência $R$ e um capacitor de capacitância $C$, ligados em série. Quando se aplica uma voltagem $E(t)$, aparece no circuito uma corrente elétrica de intensidade $i$. Devido a essa corrente, a queda de voltagem no indutor é $L(di/dt)$, no resistor é $iR$ e no capacitor é $(1/C)\int i\,dt$. Em vez de analisarmos o problema em função da corrente elétrica $i$, vamos considerar a carga $q$ no capacitor, que se relaciona com a corrente pela equação $i = dq/dt$. Assim as quedas de voltagem no indutor, no resistor e no capacitor podem ser escritas como $L\,d^2q/dt^2$, $R\,dq/dt$ e $q/C$, respectivamente. De acordo com a lei de Kirchhoff para as voltagens, a voltagem aplicada é balanceada pela soma das quedas de voltagem no circuito. Logo,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \tag{22.41}$$

Consideremos agora o modelo de um sistema mecânico com um grau de liberdade, com amortecimento e submetido a uma força excitadora geral $F(t)$ (Figura 22.20*b*). A equação de movimento para esse sistema mecânico, estabelecida na seção anterior, pode ser escrita como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{22.42}$$

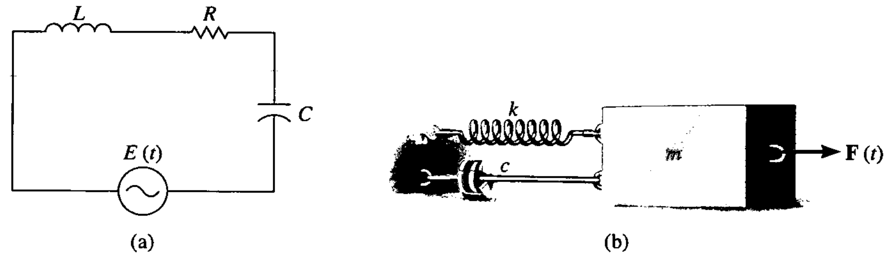



**Figura 22.20**

Por comparação, podemos ver que as equações 22.41 e 22.42 têm a mesma forma. Conseqüentemente, do ponto de vista matemático, a análise do circuito elétrico é a mesma do sistema mecânico. As analogias entre as duas equações estão apresentadas na Tabela 22.1.

TABELA 22.1 • ANÁLOGOS ELETROMECÂNICOS

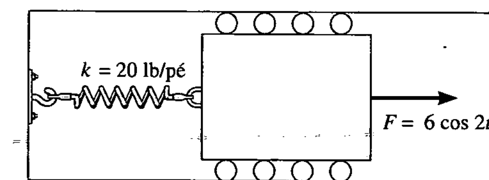
| Elétricos | | Mecânicos | |
|---|---|---|---|
| Carga elétrica | $q$ | Deslocamento | $x$ |
| Corrente elétrica | $i$ | Velocidade | $dx/dt$ |
| Voltagem | $E(t)$ | Força aplicada | $F(t)$ |
| Indutância | $L$ | Massa | $m$ |
| Resistência | $R$ | Coeficiente de amortecimento viscoso | $c$ |
| Recíproco da capacitância | $1/C$ | Rigidez da mola | $k$ |

Essa analogia tem aplicação importante em trabalhos experimentais, pois é mais fácil simular a vibração de um sistema mecânico complexo usando-se um circuito elétrico, que pode ser construído em um computador analógico, do que fazer um modelo mecânico massa-mola-amortecedor equivalente.

## PROBLEMAS

**22.41.** O bloco mostrado na Figura 22.16 tem massa de 20 kg e a mola tem rigidez $k = 600$ N/m. Após o bloco ser deslocado e solto, efetuaram-se duas medidas da amplitude $x_1 = 150$ mm e $x_2 = 87$ mm. Determine o coeficiente de amortecimento viscoso $c$.

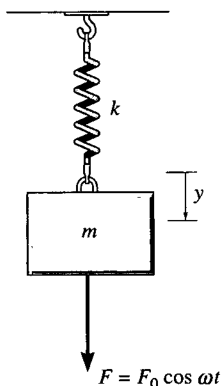
**22.42.** O bloco de 20 lb está preso a uma mola de rigidez igual a 20 lb/pé. Aplica-se ao bloco uma força $F = (6 \cos 2t)$ lb, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade máxima do bloco em regime permanente.




**Problema 22.42**

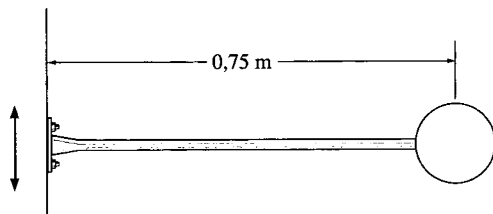
**22.43.** Um bloco de 4 kg está suspenso em uma mola de rigidez $k$ = 600 N/m. Puxa-se o bloco para baixo 50 mm de sua posição de equilíbrio. O bloco é, então, solto a partir do repouso no instante $t = 0$. Impondo ao suporte um deslocamento $\delta$ = (10 sen 4$t$) mm, onde $t$ é dado em segundos, determine a equação que descreve o movimento vertical do bloco. Suponha que o deslocamento positivo seja para baixo.

***22.44.** Se o bloco é submetido a uma força $F = F_0 \cos \omega t$, mostre que a equação diferencial de movimento é $\ddot{y} + (k/m)y = (F_0/m) \cos \omega t$, onde $y$ é medido em relação à posição de equilíbrio do bloco. Qual é a solução geral dessa equação?




**Problema 22.44**

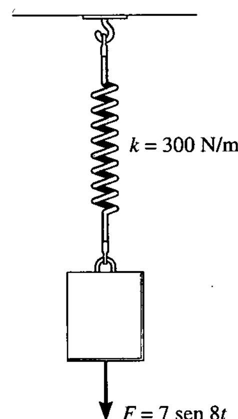
**22.45.** A barra elástica e leve suporta uma esfera de 4 kg. Quando se aplica à esfera uma força vertical de 18 N, a barra sofre deflexão de 14 mm. Se a parede oscila com freqüência harmônica de 2 Hz e tem amplitude de 15 mm, determine a amplitude de vibração da esfera.




**Problema 22.45**

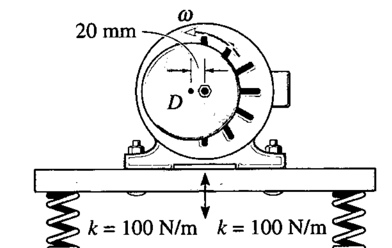
**22.46.** Um bloco de 0,8 kg está suspenso por uma mola de rigidez igual a 120 N/m. Se um amortecedor apresenta força de amortecimento de 2,5 N quando a velocidade é de 0,2 m/s, determine o período de vibração livre.

**22.47.** Um bloco de 5 kg está suspenso por uma mola de rigidez igual a 300 N/m. Se o bloco está submetido a uma força vertical $F$ = (7 sen 8$t$) N, onde $t$ é dado em segundos, determine a equação que descreve o movimento do bloco quando ele é empurrado para baixo 100 mm de sua posição de equilíbrio e solto a partir do repouso no instante $t = 0$. Suponha que os deslocamentos positivos sejam para baixo.



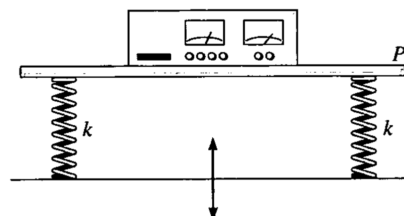

**Problema 22.47**

***22.48.** O motor elétrico tem massa de 50 kg e é suportado por *quatro* molas, cada uma com rigidez de 100 N/m. Se o motor gira um disco montado excentricamente, a 20 mm do eixo, determine a velocidade angular de rotação $\omega$ para a qual ocorre ressonância. Suponha que o motor vibre apenas na direção vertical.




**Problema 22.48**

**22.49.** O instrumento está centrado uniformemente sobre uma plataforma $P$, que por sua vez é suportada por *quatro* molas, cada uma com rigidez de 130 N/m. Se o piso está sujeito a uma vibração de 7 Hz, com amplitude de deslocamento vertical de 0,17 pé, determine a amplitude do deslocamento vertical da plataforma e instrumento. O peso total da plataforma e instrumento é de 18 lb.

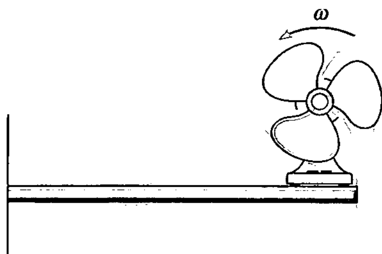



**Problema 22.49**

**22.50.** O ventilador tem massa de 25 kg e está preso na extremidade de uma viga horizontal de massa desprezível. As

pás estão montadas excentricamente no eixo, de modo que elas são equivalentes a uma massa desbalanceada com 3,5 kg e localizada a 100 mm do eixo de rotação. Se a deflexão estática da viga causada pelo peso do ventilador é de 50 mm, determine a amplitude da vibração do ventilador, no regime estacionário, quando sua velocidade angular é de 10 rad/s. *Dica:* veja a primeira parte do Exemplo 22.8.

**22.51.** Qual será a amplitude de vibração, no regime estacionário, do ventilador descrito no Problema 22.50, se a sua velocidade angular for de 18 rad/s? *Dica:* veja a primeira parte do Exemplo 22.8.

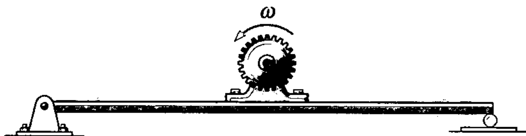



**Problemas 22.50/51**

***22.52.** O motor elétrico gira um volante excêntrico equivalente a um peso não balanceado de 0,25 lb localizado a 10 pol do eixo de rotação. Se o peso do motor causa na viga uma deflexão estática de 1 pol, determine a velocidade angular do volante para a qual ocorre ressonância. O motor pesa 150 lb. Despreze a massa da viga.

**22.53.** Qual será a amplitude de vibração em regime permanente do motor considerado no Problema 22.52, se a velocidade angular do volante é igual a 20 rad/s?

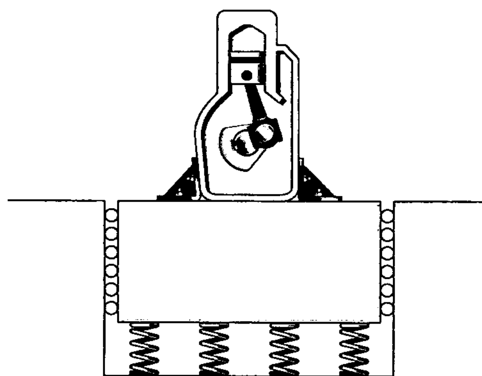
**22.54.** Determine a velocidade angular do volante considerado no Problema 22.52 que produzirá uma amplitude de vibração de 0,25 pol.




**Problemas 22.52/53/54**

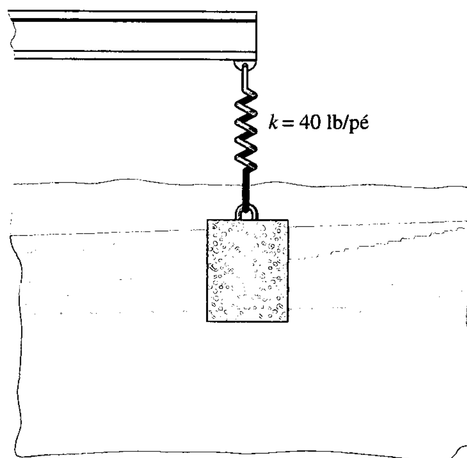
**22.55.** O motor está montado sobre um bloco de fundação suportado por molas. Descreva a vibração do sistema, em regime permanente, se o bloco e o motor têm peso total de 1.500 lb e o motor em funcionamento gera uma força excitadora $F = (50 \text{ sen } 2t)$ lb, onde $t$ é dado em segundos. Suponha que o sistema vibre apenas na direção vertical, com deslocamentos positivos medidos para baixo. A rigidez equivalente do conjunto de molas é representada por $k = 2.000$ lb/pé.

***22.56.** Determine a velocidade rotacional $\omega$ do motor considerado no Problema 22.55, na ressonância.



**Problemas 22.55/56**

**22.57.** O bloco de 1,5 lb está imerso num líquido que produz uma força de amortecimento de intensidade $F = (0{,}8|v|)$ lb, onde $v$ é dado em pés/s. Se o bloco é empurrado 0,8 pé para baixo e solto a partir do repouso, determine a sua posição em função do tempo. A mola tem rigidez $k = 40$ lb/pé. Suponha que os deslocamentos positivos sejam para baixo.




**Problema 22.57**

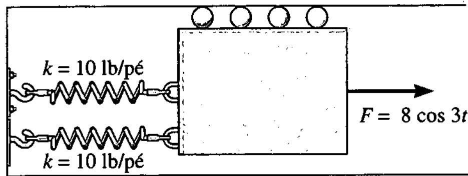
**22.58.** Suspende-se um bloco de 7 lb por meio de uma mola de rigidez $k = 75$ lb. O suporte que prende a mola tem um movimento harmônico simples expresso por $\delta = (0{,}15 \text{ sen } 2t)$ pé, onde $t$ é dado em segundos. Se o fator de amortecimento é $c/c_c = 0{,}8$, determine o ângulo de fase $\phi$ da vibração forçada.

**22.59.** Determine o fator de amplificação para o sistema bloco-mola-amortecedor considerado no Problema 22.58.

***22.60.** Considere o bloco de 30 lb preso às duas molas e ao qual se aplica uma força $F = (8 \cos 3t)$ lb, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade máxima do bloco no regime permanente.

**22.61.** Um bloco de 7 kg está suspenso por uma mola de rigidez $k = 600$ N/m. No instante $t = 0$, imprime-se ao bloco na posição de equilíbrio uma velocidade de 0,6 m/s. Determine sua posição em função do tempo. O movimento ocorre num meio que oferece uma força de amortecimento $F =$

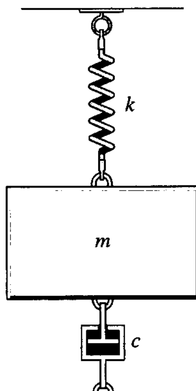
(50$|v|$) N, onde $v$ é dado em m/s. Considere deslocamentos positivos para baixo.




**Problema 22.60**

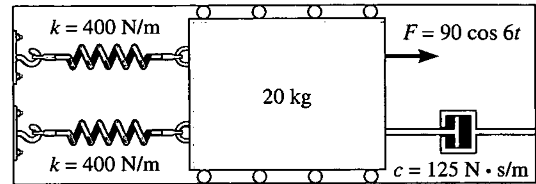
**22.62.** O fator de amortecimento, $c/c_c$, pode ser determinado experimentalmente medindo-se as amplitudes sucessivas do movimento vibratório do sistema. Se dois desses deslocamentos máximos podem ser aproximados por $x_1$ e $x_2$, como se mostra na Figura 22.17, verifique a razão $\ln x_1/x_2 = 2\pi(c/c_c)/\sqrt{1-(c/c_e)^2}$. A quantidade $\ln x_1/x_2$ é denominada *decremento logarítmico*.

**22.63.** Desenhe o circuito elétrico equivalente ao sistema mecânico mostrado na figura. Determine a equação diferencial que descreve a carga $q$ no capacitor para esse circuito.



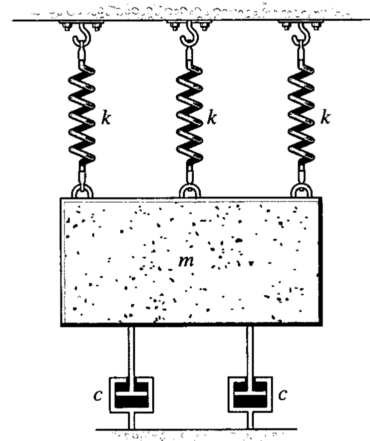

**Problema 22.63**

***22.64.** O bloco de 20 kg está submetido à ação da força harmônica $F$ = (90 cos 6$t$) N, onde $t$ é dado em segundos. Escreva a equação horária que descreve o movimento em regime estacionário.



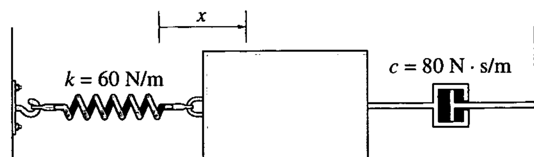

**Problema 22.64**

**22.65.** Determine a equação diferencial de movimento para o sistema vibratório amortecido mostrado na figura. Que tipo de movimento ocorre para esse sistema? Considere $k$ = 100 N/m, $c$ = 200 N·s/m e $m$ = 25 kg.




**Problema 22.65**

**22.66.** O bloco do sistema bloco-mola-amortecedor mostrado na figura tem massa $m$ = 10 kg. Se o bloco for deslocado para a posição $x$ = 50 mm e solto a partir do repouso, determine o tempo necessário para ele retornar à posição $x$ = 2 mm.



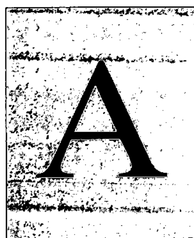

**Problema 22.66**

## REVISÃO DO CAPÍTULO

- ***Vibração Livre sem Amortecimento.*** Um corpo apresenta vibração livre quando submetido a forças restauradoras gravitacionais ou elásticas. O movimento não será amortecido quando as forças de atrito forem desprezíveis. O movimento periódico de um corpo em vibração livre não amortecida pode ser estudado ao se deslocar esse corpo de sua posição de equilíbrio e, então, se aplicar a equação de movimento ao longo da trajetória. Para um sistema com um grau de liberdade, a equação diferencial de movimento pode ser escrita na forma $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$, onde $\omega_n$ é a freqüência angular ou pulsação natural. O tempo para se completar um ciclo (período) é $\tau = 2\pi/\omega_n$, e a freqüência, ou o número de ciclos completos por unidade de tempo, é

$$f = \omega_n/2\pi$$

- ***Métodos de Energia.*** Sendo as forças restauradoras que agem em um corpo gravitacionais ou elásticas, pode-se usar a conservação da energia para se determinar seu movimento harmônico simples. Para isso, considera-se o corpo ligeiramente deslocado de sua posição de equilíbrio e se escreve uma expressão para a sua energia cinética e potencial. A derivada temporal da equação obtida pode ser rearranjada na forma-padrão $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$. Conhecendo $\omega_n$, pode-se obter as outras propriedades do movimento.
- ***Vibração Forçada sem Amortecimento.*** Para um corpo em vibração, submetido a uma força excitadora periódica ou com o seu suporte em movimento periódico, a solução da equação de movimento consiste na soma de uma solução complementar com uma solução particular. A solução complementar corresponde à vibração livre e pode ser ignorada. A solução particular é determinada pelo agente externo (força excitadora ou suporte em movimento). Ocorre ressonância quando a freqüência do agente excitador é igual à freqüência natural de vibração do sistema. A ressonância deve ser evitada para que a amplitude do movimento não se torne ilimitada.
- ***Vibração Livre com Amortecimento Viscoso.*** Uma força de amortecimento viscoso é provocada pelo arrasto do fluido com o qual o sistema está em contato. Para movimentos lentos, essa força de arrasto é proporcional à velocidade, isto é, $F = c\dot{x}$. A constante $c$ é denominada coeficiente de amortecimento viscoso. Comparando seu valor com o coeficiente de amortecimento crítico $c_c = 2m\omega_n$, pode-se especificar o tipo de vibração do sistema. Se $c > c_c$, o movimento é superamortecido; se $c/c = c_c$, o movimento é criticamente amortecido e se $c < c_c$, então ele é subamortecido.
- ***Vibração Forçada com Amortecimento Viscoso.*** O tipo mais geral de vibração para um sistema com um grau de liberdade ocorre quando o sistema é amortecido e é submetido a um movimento periódico forçado. A solução fornece uma visão clara de como o fator de amortecimento, $c/c_c$, e a razão entre freqüências, $\omega/\omega_n$, influenciam a vibração. Considerando como ressonância o caso estrito de amortecimento nulo, evita-se a ressonância quando $c/c_c \neq 0$ e $\omega/\omega_n \neq 1$.
- ***Analogia com Circuitos Elétricos.*** O movimento vibratório de um sistema complexo pode ser estudado modelando-o como um circuito elétrico. A modelagem é possível, pois ambos os sistemas são governados pela mesma equação diferencial.



# Expressões Matemáticas

### *Equação do Segundo Grau*

Se $ax^2 + bx + c = 0$, então $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

### *Funções Hiperbólicas*

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

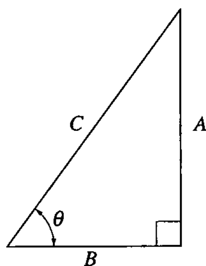
$\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

### *Identidades Trigonométricas*

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{A}{C}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{C}{A}$

$\cos\theta = \dfrac{B}{C}$, $\sec\theta = \dfrac{C}{B}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{A}{B}$, $\operatorname{cotg}\theta = \dfrac{B}{A}$




$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi \pm \cos\theta\operatorname{sen}\phi$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos(\theta \pm \phi) = \cos\theta\cos\phi \mp \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}$, $\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

### *Expansões em Séries de Potência*

$\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \operatorname{senh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots \qquad \cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$

### *Derivadas*

$\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} u) = -\operatorname{cosec}^2 u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \operatorname{tg} u \sec u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u\dfrac{du}{dx}$

*Integrais*

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C, \quad ab < 0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C, \, ab > 0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C, \quad a^2 > x^2$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right] + C, \, a > 0$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, \, a > 0$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})\right] + C$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2\sqrt{a + bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a + bx + cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C,\ c > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) + C,\ c > 0$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax) + C$$

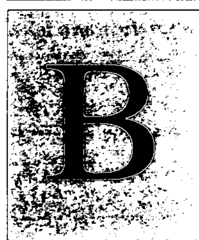
$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2 - 2}{a^3}\operatorname{sen}(ax) + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$



# Análise Numérica e Computacional

Ocasionalmente, a aplicação das leis da mecânica leva a um sistema de equações para o qual uma solução analítica é difícil ou impossível de ser obtida. Quando deparam com situações desse tipo, os engenheiros freqüentemente utilizam métodos numéricos que em muitos casos podem ser programados num computador ou numa calculadora de bolso programável. No texto que se segue apresentaremos brevemente um programa de computador para a solução de um sistema de equações algébricas lineares e três métodos numéricos que podem ser usados para resolver uma equação algébrica ou transcendental, calcular uma integral definida e resolver uma equação diferencial ordinária. A aplicação de cada método será explicada com um exemplo e será apresentado um programa de computador escrito na linguagem BASIC da Microsoft,* que foi elaborado para ser executado na maioria dos microcomputadores pessoais.[1] Recomenda-se a consulta de um texto sobre análise numérica para discussões adicionais sobre a exatidão de cada método e os erros que lhes são inerentes.

## B.1 Equações Algébricas Lineares

A aplicação das equações do equilíbrio estático ou das equações de movimento exige algumas vezes que se resolva um sistema de equações algébricas lineares. O programa de computador listado na Figura B.1 pode ser usado para este fim. O programa é baseado no método de eliminação gaussiana e pode resolver um sistema com até 10 equações e 10 incógnitas. O sistema deve ser escrito no seguinte formato geral:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= B_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= B_2 \\ &\vdots \\ A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n &= B_n \end{aligned}$$

Os coeficientes '$A$' e '$B$' são solicitados ao se executar o programa, que apresentará os valores calculados para as incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

* Pode-se obter gratuitamente um compilador do BASIC na Internet (N. do E.).

[1] Programas similares podem ser desenvolvidos ou adquiridos para calculadoras de bolso programáveis.

```
1 PRINT"Linear system of equations":PRINT
2 DIM A(10,11)
3 INPUT"Input number of equations : ",N
4 PRINT
5 PRINT"A  coefficients"
6 FOR I = 1 TO N
7 FOR J = 1 TO N
8 PRINT "A(";I;",";J;
9 INPUT")=",A(I,J)
10 NEXT J
11 NEXT I
12 PRINT
13 PRINT"B  coefficients"
14 FOR I = 1 TO N
15 PRINT "B(";I;
16 INPUT")=",A(I,N+1)
17 NEXT I
18 GOSUB 25
19 PRINT
20 PRINT"Unknowns"
21 FOR I = 1 TO N
22 PRINT "X(";I;")=";A(I,N+1)
23 NEXT I
24 END
25 REM Subroutine Guassian
26 FOR M=1 TO N
27 NP=M
28 BG=ABS(A(M,M))
29 FOR I = M TO N
30 IF ABS(A(I,M))<=BG THEN 33
31 BG=ABS(A(I,M))
32 NP=I
33 NEXT I
34 IF NP=M THEN 40
35 FOR I = M TO N+1
36 TE=A(M,I)
37 A(M,I)=A(NP,I)
38 A(NP,I)=TE
39 NEXT I
40 FOR I = M+1 TO N
41 FC=A(I,M)/A(M,M)
42 FOR J = M+1 TO N+1
43 A(I,J)=A(I,J)-FC*A(M,J)
44 NEXT J
45 NEXT I
46 NEXT M
47 A(N,N+1)=A(N,N+1)/A(N,N)
48 FOR I = N-1 TO 1 STEP -1
49 SM=0
50 FOR J=I+1 TO N
51 SM=SM+A(I,J)*A(J,N+1)
52 NEXT J
53 A(I,N+1)=(A(I,N+1)-SM)/A(I,I)
54 NEXT I
55 RETURN
```

**Figura B.1**

## EXEMPLO B.1

Resolva o sistema abaixo

$$3x_1 + x_2 = 4$$
$$2x_1 - x_2 = 10$$

### SOLUÇÃO

Quando o programa começa a ser executado, ele solicita inicialmente o número de equações (2); então, os coeficientes $A$ na seqüência $A_{11} = 3, A_{12} = 1, A_{21} = 2, A_{22} = -1$; e finalmente os coeficientes $B$, $B_1 = 4, B_2 = 10$. A saída é apresentada como*

Incógnitas[1]

$X(1) = 2.8$ ***Resposta***

$X(2) = -4.4$ ***Resposta***

# B.2 REGRA DE SIMPSON

A regra de Simpson é um método numérico que pode ser usado para determinar a área sob uma curva apresentada num gráfico ou apresentada como uma função explícita $y = f(x)$. Conseqüentemente, ela pode ser usada para se obter o valor da integral definida de uma função $y = f(x)$. A área deve ser subdividida em um *número par* de faixas ou intervalos de largura $h$. A curva entre três ordenadas consecutivas é aproximada por uma parábola, e toda a área ou integral definida é, então, determinada pela fórmula

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n] \quad \text{(B-1)}$$

A Figura B.2 traz o programa de computador para essa equação. Para o seu uso, devemos especificar primeiramente a função (na linha 6 do programa). Ao iniciar a execução, o programa solicita os limites inferior e superior da integral e o número de intervalos. O valor da integral é, então, calculado e fornecido pelo programa.

* Para os números de entrada ou saída exige-se o uso do ponto decimal em vez da vírgula (N. do T.).

```
1 PRINT"Simpson's rule":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"   1- Modify right-hand side of the equation given below,
4 PRINT"      then press RETURN key"
5 PRINT"   2- Type  RUN 6":PRINT:EDIT 6
6 DEF FNF(X)=LOG(X)
7 PRINT:INPUT" Enter Lower Limit = ",A
8 INPUT" Enter Upper Limit = ",B
9 INPUT" Enter Number (even) of Intervals = ",N%
10 H=(B-A)/N%:AR=FNF(A):X=A+H
11 FOR J%=2 TO N%
12 K=2*(2-J%+2*INT(J%/2))
13 AR=AR+K*FNF(X)
14 X=X+H:NEXT J%
15 AR=H*(AR+FNF(B))/3
16 PRINT" Integral = ",AR
17 END
```

**Figura B.2**

## EXEMPLO B.2

Calcule a integral definida

$$\int_2^5 \ln x \, dx$$

## SOLUÇÃO

O intervalo $x_0 = 2$ a $x_6 = 5$ será dividido em seis partes iguais ($n = 6$), cada uma tendo largura $(5 - 2)/6 = 0{,}5$. Calculamos então $y = f(x) = \ln(x)$ em cada ponto da subdivisão.

| $n$ | $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0,693 |
| 1 | 2,5 | 0,916 |
| 2 | 3 | 1,099 |
| 3 | 3,5 | 1,253 |
| 4 | 4 | 1,386 |
| 5 | 4,5 | 1,504 |
| 6 | 5 | 1,609 |

Logo, a Equação B.1 se torna

$$\int_2^5 \ln x \, dx \approx \frac{0{,}5}{3}[0{,}693 + 4(0{,}916 + 1{,}253 + 1{,}504)$$
$$+ 2(1{,}099 + 1{,}386) + 1{,}609]$$
$$\approx 3{,}66$$ ***Resposta***

Essa resposta é equivalente à resposta exata, considerando-se três algarismos significativos. Obviamente, a concordância com maior número de algarismos significativos pode ser obtida selecionando-se um valor menor para o intervalo $h$ (ou maior $n$).

Usando o programa de computador, especificamos primeiramente a função $\ln x$ (linha 6 na Figura B.2). Durante a execução, o programa solicita os limites inferior e superior, 2 e 5, respectivamente, e o número de intervalos, $n = 6$. Como saída, obtemos

Integral = 3.66082 ***Resposta***

## B.3 O MÉTODO DA SECANTE

Usa-se o método da secante para se obterem as raízes de uma equação algébrica ou transcendental $f(x) = 0$. O nome desse método deriva do fato de que a fórmula usada é estabelecida pela inclinação da reta secante do gráfico $y = f(x)$. A inclinação é $[f(x_n) - f(x_{n-1})]/(x_n - x_{n-1})$, e a fórmula da secante é

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right] \tag{B.2}$$

Para a aplicação deste método é necessário fornecer dois valores tentativos iniciais, $x_0$ e $x_1$, para se calcular $x_2$ pela Equação B.2 ($n = 1$). A seguir, aplica-se novamente a Equação B.2 com $x_1$ e o valor calculado $x_2$ para se obter $x_3$ ($n = 3$) etc., até o valor $x_{n+1} \approx x_n$. Pode-se ver que isso ocorrerá se $x_n$ estiver se aproximando da raiz da função $f(x) = 0$, pois o termo de correção no segundo membro da Equação B.2 tenderá a zero. Em particular, quanto maior a inclinação, menor será a correção para $x_n$ e mais rápido se obterá a raiz. Por outro lado, se a inclinação for muito pequena na vizinhança da raiz, o método conduzirá a grandes correções para $x_n$, e a convergência para a raiz será lenta, podendo mesmo falhar na obtenção da raiz. Nesses casos, outras técnicas numéricas devem ser empregadas.

Um programa de computador baseado na Equação B.2 está listado na Figura B.3. Primeiramente devemos especificar a função na linha 7 do programa. Quando o programa for executado, dois valores tentativos iniciais, $x_0$ e $x_1$, serão solicitados para uma primeira aproximação da solução. Como saída o programa fornece o valor calculado para a raiz. Caso não seja possível obter uma raiz, o programa dará essa informação.

```
1 PRINT"Secant method":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"    1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT"       then press RETURN key."
5 PRINT"    2) Type  RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(X)=.5*SIN(X)-2*COS(X)+1.3
8 INPUT"Enter point #1 =",X
9 INPUT"Enter point #2 =",X1
10 IF X=X1 THEN 14
11 EP=.00001:TL=2E-20
12 FP=(FNF(X1)-FNF(X))/(X1-X)
13 IF ABS(FP)>TL THEN 15
14 PRINT"Root can not be found.":END
15 DX=FNF(X1)/FP
16 IF ABS(DX)>EP THEN 19
17 PRINT "Root = ";X1;"     Function evaluated at this root = ";FNF(X1)
18 END
19 X=X1:X1=X1-DX
20 GOTO 12
```

**Figura B.3**

### EXEMPLO B.3

Determine a raiz da equação

$$f(x) = 0{,}5\,\text{sen}\,x - 2\cos x + 1{,}30 = 0$$

### SOLUÇÃO

Os valores tentativos iniciais para a raiz serão $x_0 = 45°$ e $x_1 = 30°$. Aplicando a Equação B.2,

$$x_2 = 30° - (-0{,}1821)\frac{(30° - 45°)}{(-0{,}1821 - 0{,}2393)} = 36{,}48°$$

Usando na Equação B.2 este valor juntamente com $x_1 = 30°$, temos

$$x_3 = 36{,}48° - (-0{,}0108)\frac{36{,}48° - 30°}{(-0{,}0108 + 0{,}1821)} = 36{,}89°$$

Repetindo o processo com este valor e $x_2 = 36{,}48°$, obtemos

$$x_4 = 36{,}89° - (0{,}0005)\left[\frac{36{,}89° - 36{,}48°}{(0{,}0005 + 0{,}0108)}\right] = 36{,}87°$$

Assim $x = 36{,}9°$ é um resultado satisfatório, considerando-se três algarismos significativos.

Se desejamos usar o programa de computador para a resolução do problema, devemos primeiramente especificar a função (linha 7 na Figura B.3). Durante a execução, devemos entrar com os dois valores tentativos iniciais, em radianos. Escolhendo os valores 0.8 rad e 0.5 rad, temos como resultado

Raiz = 0.6435022

Função calculada para essa raiz = 1.66893E-06

Convertendo o resultado acima para graus obtemos

$$x = 36{,}9°$$ ***Resposta***

---

## B.4 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

Usa-se o método de Runge-Kutta para se resolver uma equação diferencial ordinária. O método consiste em aplicar um conjunto de fórmulas para se obterem valores específicos de $y$ para os correspondentes incrementos $h$ em $x$. As fórmulas dadas em forma genérica são as seguintes:

*Equação de Primeira Ordem.* Para integrar $\dot{x} = f(t, x)$ passo a passo use

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{B.3}$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, x_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t_i + h, x_i + k_3) \end{aligned} \tag{B.4}$$

*Equação de Segunda Ordem.* Para integrar $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, use

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= x_i + h\left[\dot{x}_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3)\right] \\
\dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_i, x_i, \dot{x}_i) \\
k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\dot{x}_i, \dot{x}_i + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\dot{x}_i + \frac{h}{4}k_1, \dot{x}_i + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf\left(t_i + h, x_i + h\dot{x}_i + \frac{h}{2}k_2, \dot{x}_i + k_3\right)
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

Para aplicar essas equações, parte-se de valores iniciais $t_i = t_0$, $x_i = x_0$ e $\dot{x}_i = \dot{x}_0$ (para a equação de segunda ordem). Dando-se um incremento $h$ para $t_0$, calculam-se as quatro constantes $k$, que são, então, substituídas na Equação B.3 ou B.4 para se calcularem $x_{i+1} = x_1$, $\dot{x}_{i+1} = x_1$, correspondentes a $t_{i+1} = t_1 = t_0 + h$. Repetindo-se o processo usando-se $t_1$, $x_1$, $\dot{x}_1$ e $h$, então os valores de $x_2$, $\dot{x}_2$ e $t_2 = t_1 + h$ são calculados, e assim sucessivamente.

As figuras B.4 e B.5 listam os programas de computador que resolvem as equações de primeiro e segundo grau, respectivamente. Para o uso desses programas deve-se especificar a função $\dot{x} = f(t, x)$ ou $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ (linha 7), os valores iniciais $t_0$, $x_0$, $\dot{x}_0$ (para a equação de segunda ordem), o valor final $t_n$ e o valor do incremento (tamanho do passo) $h$. A saída fornece os valores de $t$, $x$, e $\dot{x}$ para cada incremento de tempo até se atingir $t_n$.

```
1 PRINT"Runge-Kutta Method for 1-st order Differential Equation":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"   1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT"      then Press RETURN key"
5 PRINT"   2) Type  RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(T,X)=5*T+X
8 CLS:PRINT" Initial Conditions":PRINT
9 INPUT"Input  t   = ",T
10 INPUT"       x   = ",X
11 INPUT"Final  t   = ",T1
12 INPUT"step size  = ",H:PRINT
13 PRINT"          t              x"
14 IF T>=T1+H THEN 23
15 PRINT USING"######.#####";T;X
16 K1=H*FNF(T,X)
17 K2=H*FNF(T+.5*H,X+.5*K1)
18 K3=H*FNF(T+.5*H,X+.5*K2)
19 K4=H*FNF(T+H,X+K3)
20 T=T+H
21 X=X+(K1+K2+K2+K3+K3+K4)/6
22 GOTO 14
23 END
```

**Figura B.4**

```
1 PRINT"Runge-Kutta Method for 2-nd order Differential Equation":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"   1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT"        then Press RETURN key"
5 PRINT"   2) Type  RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(T,X,XD)=
8 INPUT"Input  t   = ",T
9 INPUT"       x   = ",X
10 INPUT"     dx/dt = ",XD
11 INPUT"Final  t  = ",T1
12 INPUT"step size  = ",H:PRINT
13 PRINT"          t             x          dx/dt"
14 IF T>=T1+H THEN 24
15 PRINT USING"######.#####";T;X;XD
16 K1=H*FNF(T,X,XD)
17 K2=H*FNF(T+.5*H,X+.5*H*XD,XD+.5*K1)
18 K3=H*FNF(T+.5*H,X+(.5*H)*(XD+.5*K1),XD+.5*K2)
19 K4=H*FNF(T+H,X+H*XD+.5*H*K2,XD+K3)
20 T=T+H
21 X=X+H*XD+H*(K1+K2+K3)/6
22 XD=XD+(K1+K2+K2+K3+K3+K4)/6
23 GOTO 14
24 END
```

**Figura B.5**

## EXEMPLO

Resolva a equação diferencial $\dot{x} = 5t + x$. Obtenha os resultados para dois passos usando incrementos de tempo $h = 0{,}02$ s. Considere $t_0 = 0, x_0 = 0$.

### SOLUÇÃO

Pode-se aplicar as equações B.3 e B.4, pois se trata de uma equação de primeira ordem. Assim, para $t_0 = 0, x_0 = 0, h = 0{,}02$, tem-se

$$k_1 = 0{,}02(0 + 0) = 0$$
$$k_2 = 0{,}02[5(0{,}01) + 0] = 0{,}001$$
$$k_3 = 0{,}02[5(0{,}01) + 0{,}0005] = 0{,}00101$$
$$k_4 = 0{,}02[5(0{,}02) + 0{,}00101] = 0{,}00202$$
$$x_1 = 0 + \tfrac{1}{6}[0 + 2(0{,}001) + 2(0{,}00101) + 0{,}00202] = 0{,}00101$$

Usando-se os valores $t_1 = 0 + 0{,}02 = 0{,}02$ e $x_1 = 0{,}00101$ com $h = 0{,}02$, pode-se, então, calcular o valor para $x_2$ pelas equações B.3 e B.4.

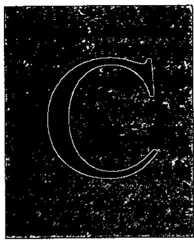
$$k_1 = 0{,}02[5(0{,}02) + 0{,}00101] = 0{,}00202$$
$$k_2 = 0{,}02[5(0{,}03) + 0{,}00202] = 0{,}00304$$
$$k_3 = 0{,}02[5(0{,}03) + 0{,}00253] = 0{,}00305$$
$$k_4 = 0{,}02[5(0{,}04) + 0{,}00406] = 0{,}00408$$
$$x_2 = 0{,}00101 + \tfrac{1}{6}[0{,}00202 + 2(0{,}00304) + 2(0{,}00305) + 0{,}00408]$$
$$= 0{,}00405$$

***Resposta***

Para se resolver este problema usando-se o programa de computador mostrado na Figura B.4, primeiramente se entra com a função na linha 7 e, então, se fornecem os dados $t_0 = 0, x_0 = 0, t_n = 0.04$ e $h = 0.02$. Os resultados aparecem como

| $t$ | $x$ |
|---|---|
| 0.00000 | 0.00000 |
| 0.02000 | 0.00101 |
| 0.04000 | 0.00405 |

***Resposta***



# ANÁLISE VETORIAL

A discussão a seguir fornece uma breve recapitulação de análise vetorial. Um tratamento mais detalhado dos tópicos pode ser encontrado em *Mecânica para Engenharia: Estática*.

*Vetor.* Um vetor **A** é um ente que possui módulo, direção e sentido, e se soma de acordo com a regra do paralelogramo. Como se mostra na Figura C.1, **A** = **B** + **C**, onde **A** é o *vetor resultante* e **B** e **C** são *vetores componentes*.

*Vetor Unitário.* Um vetor unitário, $\mathbf{u}_A$, tem módulo igual a uma unidade 'adimensional' e tem a mesma direção e sentido de **A**. O vetor unitário é determinado dividindo-se **A** pelo seu módulo $A$, isto é,

$$\boxed{\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A}} \tag{C.1}$$

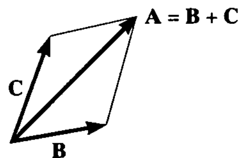



**Figura C.1**

*Notação Vetorial Cartesiana.* As direções e os sentidos positivos dos eixos $x$, $y$, $z$ são definidos pelos vetores unitários cartesianos **i**, **j**, **k**, respectivamente.

Como se mostra na Figura C.2, o vetor **A** pode ser expresso como a soma de seus componentes $x$, $y$, $z$:

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{C.2}$$

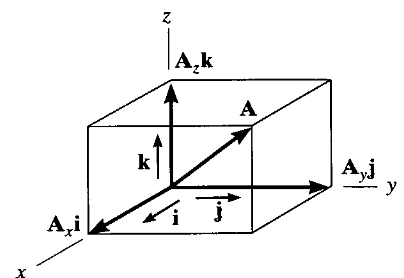



**Figura C.2**

O módulo de **A** é determinado por

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \tag{C.3}$$

A direção e o sentido de **A** são definidos em termos de seus *ângulos diretores coordenados*, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, medidos de **A** para os eixos *positivos* $x$, $y$, $z$, respectivamente (Figura C.3). Esses ângulos são determinados pelos *cossenos diretores* que representam os componentes **i**, **j**, **k** do vetor unitário $\mathbf{u}_A$, isto é, pelas equações C.1 e C.2.

$$\boxed{\mathbf{u}_A = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k}} \tag{C.4}$$

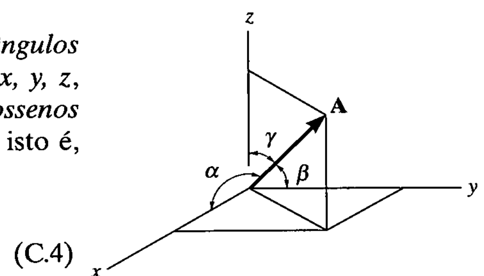



**Figura C.3**

de forma que os cossenos diretores são

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \tag{C.5}$$

Assim, $\mathbf{u}_A = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, e usando-se a Equação C.3, pode-se ver que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{C.6}$$

*O Produto Vetorial.* O produto vetorial de dois vetores **A** e **B** é um vetor **C**, escrito como

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{C.7}$$

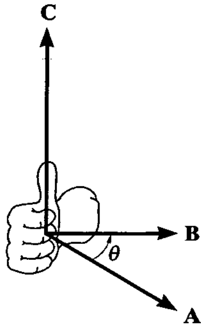



**Figura C.4**

(lê-se **C** é igual a **A** 'vetor' **B**). O *módulo* de **C** é dado por

$$C = AB\,\text{sen}\,\theta \tag{C.8}$$

onde $\theta$ é o ângulo entre **A** e **B** ($0° \leq \theta \leq 180°$). A *direção* de **C** é perpendicular ao plano definido por **A** e **B**, e o sentido é determinado pela regra da mão direita, segundo a qual os dedos da mão direita se encurvam de **A** para **B** e o polegar aponta na direção e sentido de **C** (Figura C.4).

O produto vetorial *não* é comutativo, isto é, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, valendo

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{C.9}$$

Por outro lado, vale a lei distributiva, isto é,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{D} \tag{C.10}$$

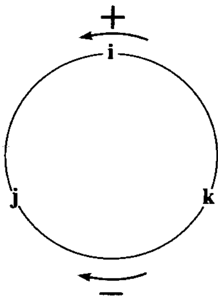



**Figura C.5**

E a multiplicação por um escalar pode ser efetuada de várias maneiras, isto é,

$$m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m \tag{C.11}$$

A Equação C.7 pode ser usada para o cálculo do produto escalar de qualquer par de vetores unitários. Por exemplo, para se encontrar $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, o módulo é $(i)\,(j)$ sen 90° = (1) (1) (1) =1 e a direção e o sentido são determinados pela regra da mão direita, resultando em $+\mathbf{k}$ (Figura C.2). Um esquema simples, como se mostra na Figura C.5, pode ser útil para a obtenção deste resultado e de outros análogos. Percorrendo-se a circunferência no sentido *anti-horário*, então, o produto de dois vetores unitários consecutivos é dado pelo terceiro vetor *positivo*, por exemplo, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. O percurso no sentido *horário* resulta num vetor unitário '*negativo*', por exemplo, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

Se **A** e **B** são expressos na forma cartesiana, então o produto vetorial (Equação C.7) pode ser calculado expandindo-se o determinante

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{C.12}$$

do que resulta

$$\mathbf{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

Observe que o produto vetorial é usado para definir o torque (ou momento) de uma força **F** em relação a um ponto $O$:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{C.13}$$

onde **r** é um vetor posição orientado do ponto $O$ para *qualquer ponto* da reta de ação de **F**.

*O Produto Escalar.* O produto escalar de dois vetores **A** e **B** é um escalar definido por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta \tag{C.14}$$

(lê-se **A** 'escalar' **B**). O ângulo $\theta$ é formado pelos vetores **A** e **B** ($0° \leq \theta \leq 180°$).
O produto escalar é comutativo, isto é,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{C.15}$$

Vale a lei distributiva, isto é,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \tag{C.16}$$

E a multiplicação por um escalar pode ser efetuada de várias maneiras, isto é,

$$m(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})m \tag{C.17}$$

Usando-se a Equação C.14, pode-se determinar o produto escalar entre quaisquer dois vetores cartesianos. Por exemplo, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1)\cos 0° = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1)\cos 90° = 0$.

Se **A** e **B** são expressos na forma cartesiana, então o produto escalar (Equação C.14) pode ser determinado por

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z} \tag{C.18}$$

O produto escalar pode ser usado para se determinar o *ângulo $\theta$ formado por dois vetores*. Da Equação C.14,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB}\right) \tag{C.19}$$

Também é possível usar o produto escalar para se obter o *componente de um vetor numa dada direção*. Por exemplo, a projeção do vetor **A** na direção do vetor **B** (Figura C.6) é definida por $A \cos\theta$. Da Equação C.14, a projeção é

$$A\cos\theta = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_B \tag{C.20}$$

onde $\mathbf{u}_B$ representa um vetor unitário na direção e sentido de **B** (Figura C.6).

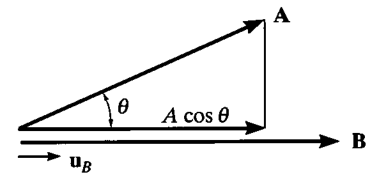


**Figura C.6**

*Derivação e Integração de Funções Vetoriais.* As regras para derivação e integração de somas e produtos de funções escalares também se aplicam às funções vetoriais. Considere, por exemplo, as duas funções vetoriais **A**($s$) e **B**($s$). Considerando-se que as funções sejam contínuas e suaves para todo $s$, então

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \tag{C.21}$$

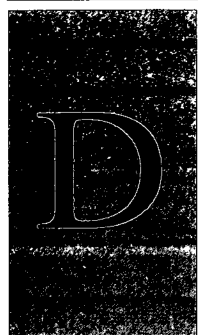
$$\int (\mathbf{A} + \mathbf{B})\, ds = \int \mathbf{A}\, ds + \int \mathbf{B}\, ds \tag{C.22}$$

Para o produto vetorial

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \left(\frac{d\mathbf{A}}{ds} \times \mathbf{B}\right) + \left(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{ds}\right) \tag{C.23}$$

De maneira similar, para o produto escalar

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} \tag{C.24}$$




# Revisão dos Fundamentos de Engenharia

Composto por problemas, este Apêndice pode ser utilizado para rever os fundamentos de engenharia na preparação para exames de verificação da qualidade de ensino de cursos de engenharia ou possíveis exames de certificação profissional para engenheiros.

Antes de você resolver qualquer um dos problemas, sugerimos que revise as seções indicadas de cada capítulo — a fim de se familiarizar com as definições em negrito —, assim como os exemplos dessas seções. Os problemas a seguir estão ordenados na mesma seqüência dos tópicos de cada capítulo e, no fim, são fornecidas soluções parciais.

## *Capítulo 12 — Revisar as Seções 12.1, 12.4–12.6, 12.8–12.9*

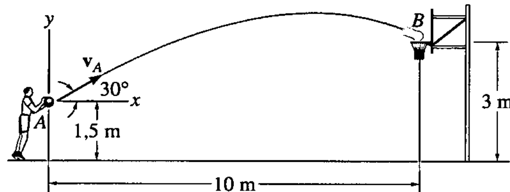
**D.1.** A posição de um ponto material é $s = (0{,}5t^3 + 4t)$ pé, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto quando $t = 3$ s.

**D.2.** Após deslocar-se uma distância de 100 m, um ponto material alcançou uma velocidade de 30 m/s, a partir do repouso. Determine sua aceleração constante.

**D.3.** Um ponto material se desloca numa linha reta, tendo sua posição dada por $s = (12t^3 + 2t^2 + 3t)$ m, onde $t$ é dado em segundos. Determine a velocidade e a aceleração do ponto quando $t = 4$ s.

**D.4.** Um ponto material se desloca ao longo de uma reta, com aceleração $a = (4t^2 - 2)$ m/s², onde $t$ é dado em segundos. Quando $t = 0$, o ponto localiza-se 2 m à esquerda da origem e, quando $t = 2$ s, ele está 20 m à esquerda da origem. Determine a posição do ponto material quando $t = 4$ s.

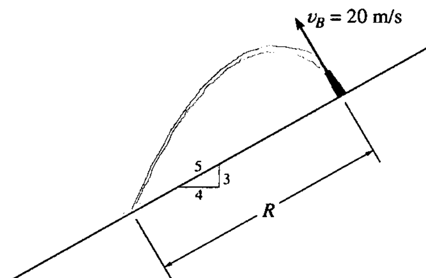
**D.5.** Determine a velocidade com a qual uma bola de basquete deve ser lançada de $A$, a um ângulo de 30°, para que seja encestada em $B$.




**Problema D.5**

**D.6.** Um ponto material tem movimento curvilíneo no plano $x$–$y$, de forma que o componente $y$ desse movimento é descrito pela equação $y = (7t^3)$ m, onde $t$ é dado em segundos. Se o ponto parte do repouso na origem, quando $t = 0$, e mantém uma aceleração *constante* de 12 m/s² na direção $x$, determine a velocidade do ponto quando $t = 2$ s.

**D.7.** Lança-se água a um ângulo de 90° de um plano inclinado, com velocidade de 20 m/s. Determine o alcance $R$.



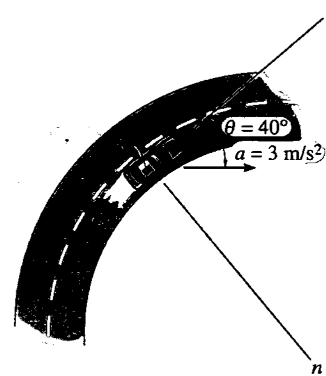

**Problema D.7**

**D.8.** Um automóvel está viajando com velocidade constante ao longo de uma curva circular de raio $\rho = 250$ m. Se o módulo da aceleração é $a = 1{,}5$ m/s², determine a velocidade do automóvel.

**D.9.** Um barco viaja ao longo de uma trajetória circular de 30 m de raio. Determine o módulo da aceleração do barco se, num dado instante, sua velocidade escalar é $v = 6$ m/s e a sua taxa de aumento é $\dot{v} = 2$ m/s².

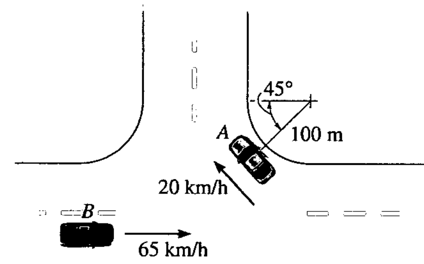
**D.10.** Um trem viaja ao longo de uma curva circular de 600 m de raio. Se a velocidade do trem aumenta uniformemente de 40 km/h para 60 km/h em 5 s, determine o módulo da aceleração no instante em que a velocidade é de 50 km/h.

**D.11.** Num dado instante, um automóvel tem velocidade de 25 m/s e aceleração de 3 m/s², na direção mostrada na figura. Determine o raio de curvatura da trajetória e a taxa de aumento da velocidade do automóvel.



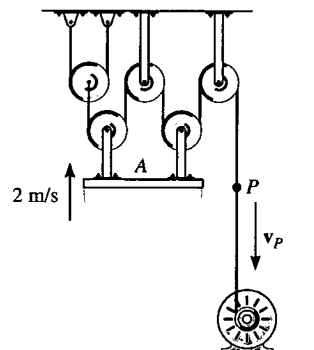

**Problema D.11**

**D.12.** Num dado instante, os carros $A$ e $B$ movem-se com as velocidades mostradas na figura. Se $B$ está acelerando a 1.200 km/h², enquanto $A$ se mantém com velocidade escalar constante, determine a velocidade e a aceleração de $A$ em relação a $B$.




**Problema D.12**

**D.13.** Determine a velocidade do ponto $P$ do cabo para elevar a plataforma com velocidade de 2 m/s.

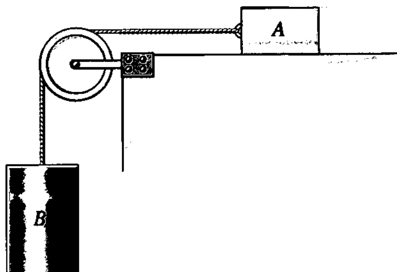



**Problema D.13**

## *Capítulo 13 — Revisar as Seções 13-1–13.5*

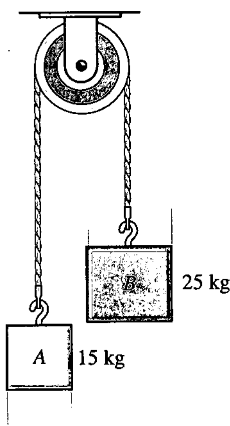
**D.14.** O peso efetivo de um homem num elevador varia entre 130 lb e 170 lb. Quando o elevador está em repouso, o homem pesa 153 lb. Determine quão rápido o elevador pode acelerar, movendo-se para cima e para baixo.

**D.15.** Desprezando o atrito e a massa da polia e da corda, determine a aceleração com a qual o bloco $B$ de 4 kg descerá. Qual é a tensão na corda? O bloco $A$ tem massa de 2 kg.



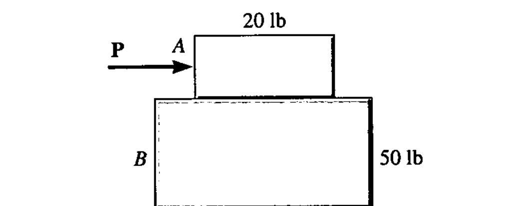

**Problema D.15**

**D.16.** Os blocos estão suspensos por um cabo que passa por uma polia. Desprezando a massa do cabo e da polia, determine a aceleração dos blocos e a tensão no cabo.



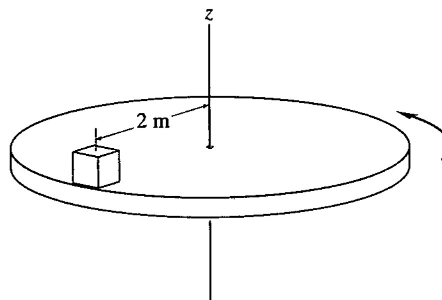

**Problema D.16**

**D.17.** O bloco $B$ apóia-se numa superfície lisa. Se os coeficientes de atrito estático e cinético entre $A$ e $B$ são $\mu_e = 0,4$ e $\mu_c = 0,3$, respectivamente, determine a aceleração de cada bloco se $P = 6$ lb.



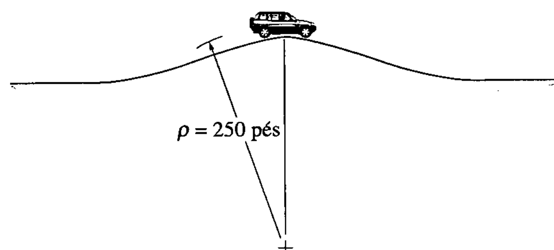

**Problema D.17**

**D.18.** O bloco apóia-se na plataforma a uma distância de 2 m do centro. Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a plataforma é $\mu_c = 0,3$, determine a velocidade máxima que o bloco pode atingir antes de começar a escorregar. Suponha que o movimento angular do disco aumente bem devagar.



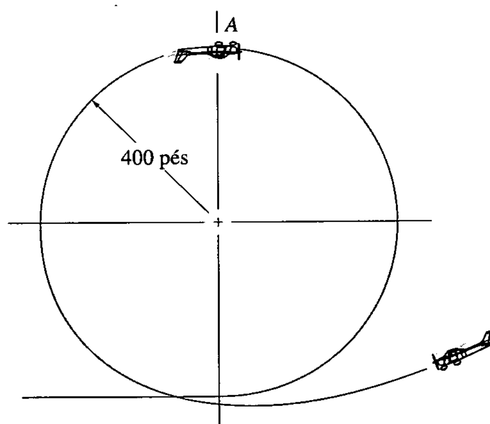

**Problema D.18**

**D.19.** Determine a velocidade máxima que o jipe pode ter ao passar pela crista da elevação, sem haver perda de contato com a pista.



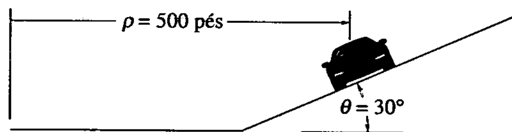

**Problema D.19**

**D.20.** Um piloto pesa 150 lb e está viajando a uma velocidade escalar constante de 120 pés/s. Determine a força normal que o piloto exerce no assento do avião quando ele passa pelo ponto $A$, de cabeça para baixo. O *loop* tem 400 pés de raio de curvatura.



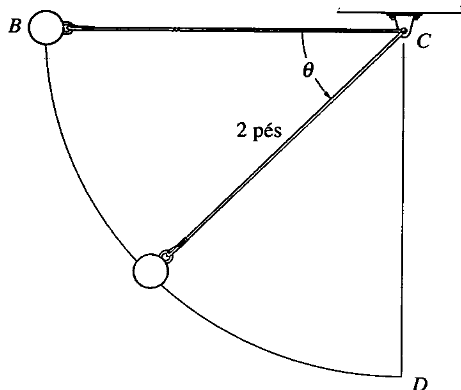

**Problema D.20**

**D.21.** O carro esporte se desloca ao longo de uma curva de raio de curvatura $\rho = 500$ pés. A pista apresenta ângulo de superelevação de 30°. Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é $\mu_e = 0,2$, determine a máxima velocidade para não haver escorregamento. Despreze o tamanho do carro.




Problema D.21

**D.22.** Abandona-se a bolinha $B$ a partir do repouso na posição $\theta = 0°$. Determine a tensão na corda $BC$ imediatamente após o pêndulo ter sido abandonado e quando ele alcança o ponto $D$, onde $\theta = 90°$. A bolinha pesa 5 lb.

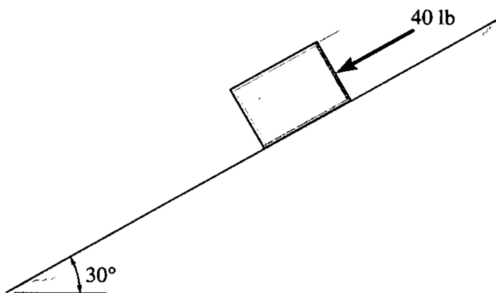



Problema D.22

## *Capítulo 14 — Revisar Todas as Seções*

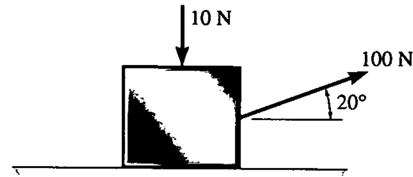
**D.23.** Um vagão de carga está sendo rebocado ao longo de trilhos horizontais. Se o vagão parte do repouso e atinge uma velocidade de 40 pés/s após ter se deslocado uma distância de 300 pés, determine o trabalho total realizado pela força de tração sobre o vagão, nesse deslocamento. O peso do vagão é 15.000 lb e a força de resistência ao rolamento entre ele e os trilhos é de 80 lb.

**D.24.** Uma força de 40 lb age sobre o bloco de 20 lb apoiado num plano inclinado de 30°. Se a velocidade inicial do bloco é 5 pés/s plano abaixo, determine sua velocidade após ter descido 10 pés. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_c = 0{,}2$.



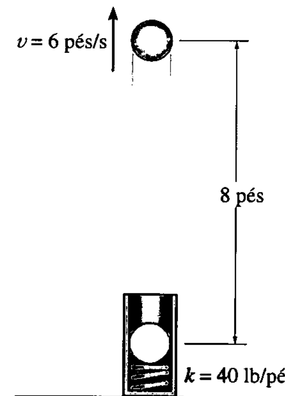

Problema D.24

**D.25.** O bloco de 3 kg está submetido à ação de duas forças, como se mostra na figura. Se o bloco parte do repouso, determine a distância que ele percorre até atingir a velocidade de 10 m/s. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é $\mu_c = 0{,}2$.



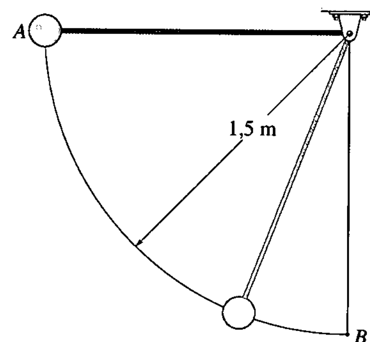

Problema D.25

**D.26.** Usando-se uma mola de rigidez $k = 40$ lb, atira-se a bola de 6 lb, a partir do repouso. Determine quanto se deve comprimir a mola para que a bola tenha velocidade de 6 pés/s ao atingir uma altura de 8 pés.



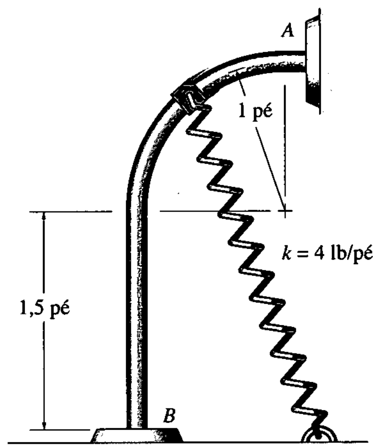

Problema D.26

**D.27.** Abandona-se o pêndulo a partir do repouso em $A$. Determine a velocidade da bolinha e a tensão na corda quando ela está em sua posição mais baixa. A bolinha tem massa de 2 kg.



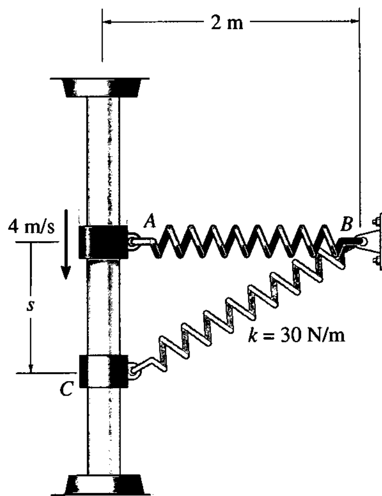

Problema D.27

**D.28.** O cursor de 5 lb, solto a partir do repouso em $A$, desloca-se ao longo de uma guia sem atrito. Determine a velocidade escalar do cursor quando ele atinge $B$. O comprimento da mola não deformada é de 0,5 pé.




**Problema D.28**

**D.29.** Comunica-se ao colar de 2 kg localizado em $A$ uma velocidade de 4 m/s para baixo. A mola tem rigidez $k = 30$ N/m e seu comprimento, quando não deformada, é de 1 m. Determine a velocidade do colar quando $s = 1$ m.



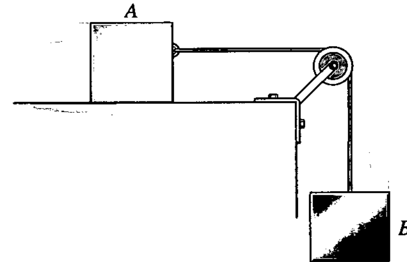

**Problema D.29**

## *Capítulo 15 — Revisar as Seções 15.1–15.4*

**D.30.** Uma locomotiva de 30 t exerce uma força horizontal constante de $40(10^3)$ lb num trem com três vagões de peso total igual a 250 t. Se a resistência durante o rolamento é de 10 lb para cada tonelada da locomotiva e dos vagões, determine o tempo necessário para se aumentar a velocidade do trem de 20 pés/s para 30 pés/s. Determine também a força das rodas da máquina sobre os trilhos.

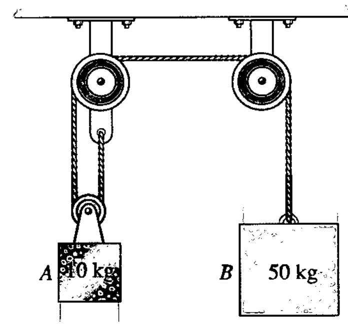
**D.31.** Um bloco de 5 kg, com velocidade inicial de 3 m/s, sobe um plano inclinado de 30°. Se o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_c = 0{,}3$, determine o tempo necessário para que uma força horizontal de 100 N agindo sobre o bloco aumente sua velocidade para 10 m/s.

**D.32.** Um bloco de 10 lb, partindo do repouso, alcança uma velocidade de 1 pé/s em 5 segundos. Determine a tensão na corda e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco $A$ e o plano horizontal. Despreze o peso da polia. O bloco $B$ tem peso de 8 lb.



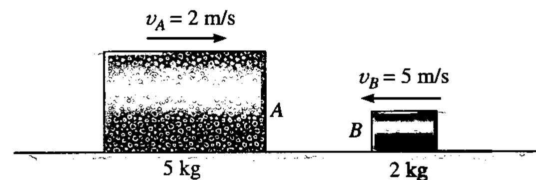

**Problema D.32**

**D.33.** Determine a velocidade de cada bloco 10 segundos após o sistema ter sido abandonado a partir do repouso. Despreze a massa das polias.




**Problema D.33**

**D.34.** Os dois blocos têm coeficiente de restituição $e = 0{,}5$. Se a superfície é lisa, determine a velocidade de cada bloco após a colisão.



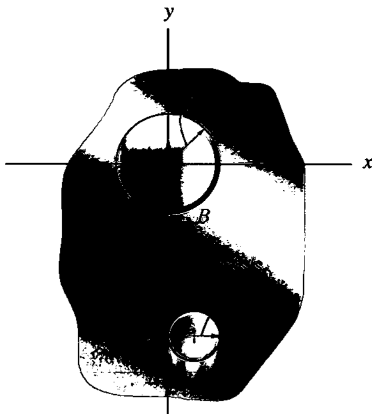

**Problema D.34**

**D.35.** Um disco $A$ de 6 kg, tendo velocidade inicial $(v_A)_1 =$ 20 m/s, colide frontalmente com o disco $B$ de 24 kg, que está inicialmente parado. Se a colisão é perfeitamente elástica, determine a velocidade de cada disco após a colisão e o impulso que $A$ comunica ao disco $B$.

**D.36.** Os blocos $A$ e $B$ pesam 5 lb e 10 lb, respectivamente. Após atingir o bloco $B$, $A$ desliza 2 pol para a direita e $B$, 3 pol para a direita. Se o coeficiente de atrito cinético entre os blocos e a superfície é $\mu_c = 0{,}2$, determine o coeficiente de restituição entre os blocos. O bloco $B$ está inicialmente em repouso.

**D.37.** O disco $A$ de 2 lb está escorregando com velocidade de 3 pés/s sobre o plano horizontal liso. O disco $B$ de 11 lb está inicialmente em repouso. Se, após a colisão, $A$ tem velo-

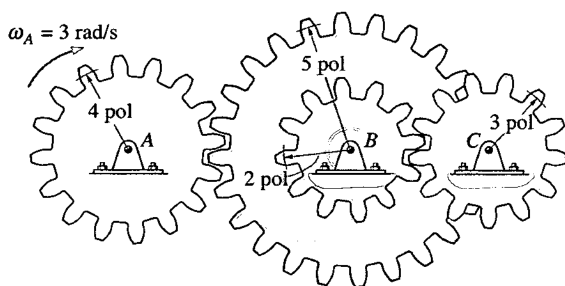
cidade de 1 pé/s na direção e sentido do eixo positivo $x$, determine a velocidade adquirida pelo disco $B$.




Problema D.37

## *Capítulo 16 — Revisar as Seções 16.3, 16.5–16.7*

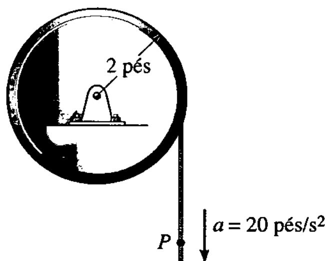
**D.38.** Se a engrenagem $A$ gira no sentido horário com velocidade angular $\omega_A = 3$ rad/s, determine as velocidades angulares das engrenagens $B$ e $C$. A engrenagem $B$ é uma peça única, com raios de 2 pol e 5 pol.




Problema D.38

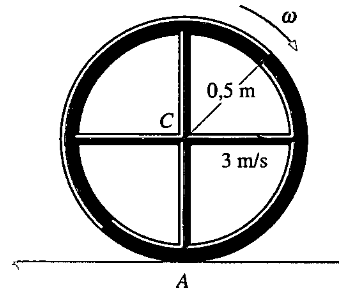
**D.39.** O tambor de uma máquina de lavar tem aceleração angular de 2 rev/s$^2$. Determine quantas voltas ele efetua em 10 s e a sua velocidade angular quando $t = 5$ s. O tambor parte do repouso.

**D.40.** Partindo do repouso, o ponto $P$ da corda adquire aceleração de 20 pés/s$^2$. Determine a aceleração e a velocidade angulares do disco após este completar 10 revoluções. Quantas revoluções o disco efetuará se, após ter completado as 10 revoluções, $P$ continuar a descer por mais 4 segundos?



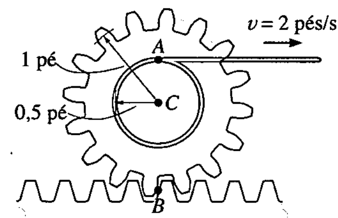

Problema D.40

**D.41.** O centro da roda tem velocidade de 3 m/s. Ao mesmo tempo, ela está escorregando e tem velocidade angular $\omega = 2$ rad/s no sentido horário. Determine a velocidade do ponto $A$ na situação mostrada na figura.



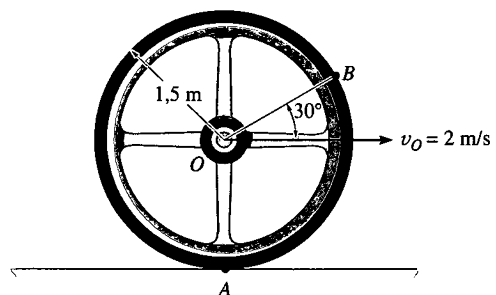

Problema D.41

**D.42.** Uma corda enrolada no cubo da engrenagem está sendo puxada com velocidade constante de 2 pés/s. Determine a velocidade do centro $C$ da engrenagem.



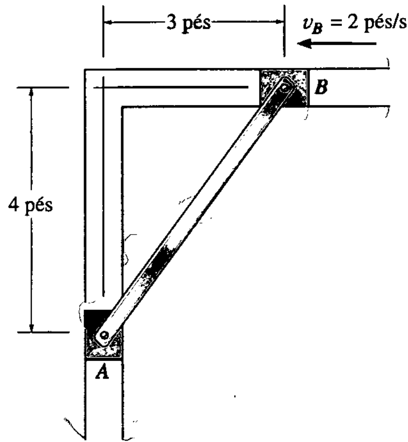

Problema D.42

**D.43.** O centro da roda está se movendo para a direita com velocidade de 2 m/s. Se não há escorregamento sobre o piso, em $A$, determine a velocidade do ponto $B$ na situação mostrada na figura.



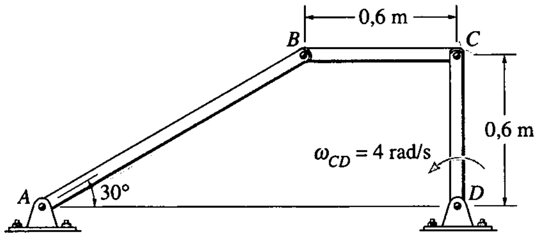

Problema D.43

**D.44.** Se a velocidade do bloco deslizante $B$ é de 2 pés/s para a esquerda, calcule a velocidade do bloco $A$ e a velocidade angular da barra, na situação mostrada na figura.



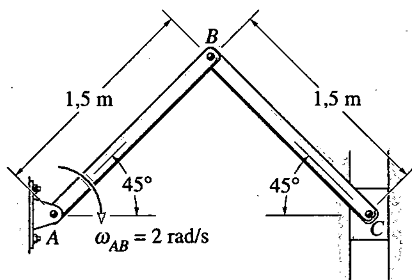

Problema D.44

**D.45.** Determine a velocidade angular da barra $AB$ na situação mostrada na figura.




Problema D.45

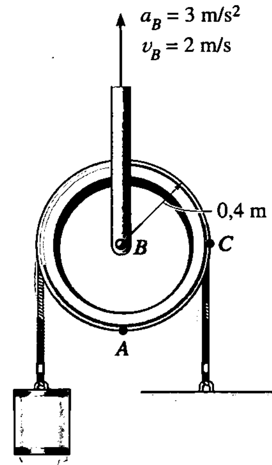
**D.46.** Quando o bloco deslizante $C$ está na posição mostrada na figura, a barra $AB$ tem velocidade angular de 2 rad/s no sentido horário. Determine a velocidade do bloco $C$.



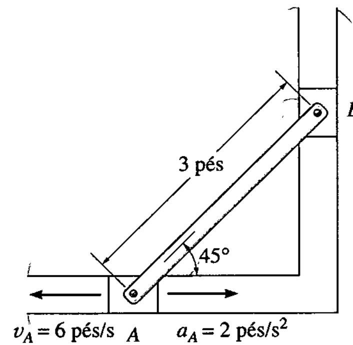

Problema D.46

**D.47.** O centro da polia está sendo erguido verticalmente com aceleração de 3 m/s$^2$ e, na situação mostrada na figura, sua velocidade é de 2 m/s. Determine as acelerações dos pontos $A$ e $B$. Suponha que a corda não escorrega na superfície da polia.

**D.48.** Num dado instante, o bloco deslizante $A$ tem a velocidade e a aceleração mostradas na figura. Determine a aceleração do bloco $B$ e a aceleração angular da barra de ligação no instante considerado.



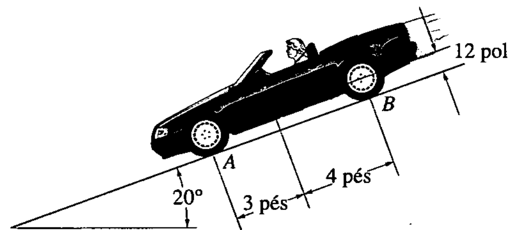

Problema D.47




Problema D.48

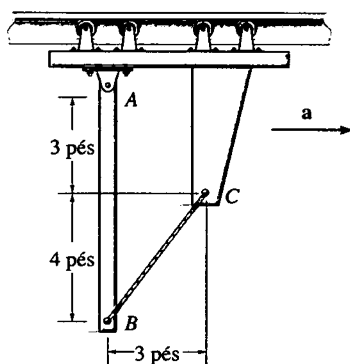
## *Capítulo 17 – Revisar Todas as Seções*

**D.49.** O carro de 3.500 lb tem seu centro de massa localizado em $G$. Determine as reações normais de ambas as rodas dianteiras e de ambas as rodas traseiras sobre o pavimento. Determine também a aceleração do carro. Suponha que as rodas rolam livremente plano abaixo. Despreze o peso das rodas.



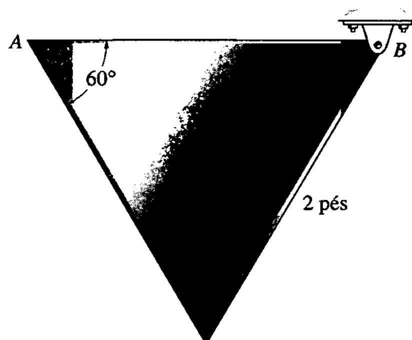

Problema D.49

**D.50.** A barra $AB$ está ligada a uma estrutura móvel por meio de um pino em $A$ e mantida numa posição vertical pelo cabo $BC$ que pode suportar uma tensão máxima de 10 lb. Determine a máxima aceleração da barra sem haver rompimento do cabo. Quais são os valores dos componentes horizontal e vertical da reação no pino $A$?



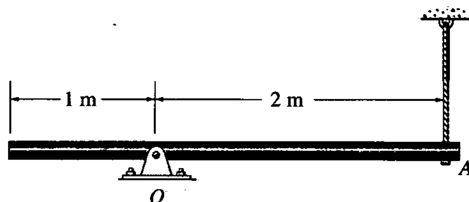

Problema D.50

**D.51.** Abandona-se a placa triangular de 50 lb a partir do repouso. Determine a aceleração angular inicial e os componentes horizontal e vertical da reação em $B$. O momento de inércia da placa em torno do eixo em $B$ é $I_B = 2{,}30$ slug · pés$^2$.



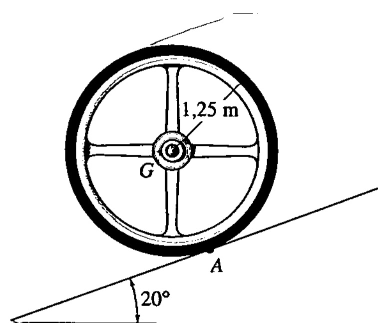

Problema D.51

**D.52.** A barra delgada pode girar em torno do pino em $O$. Determine a reação em $O$ imediatamente após o corte do cabo.



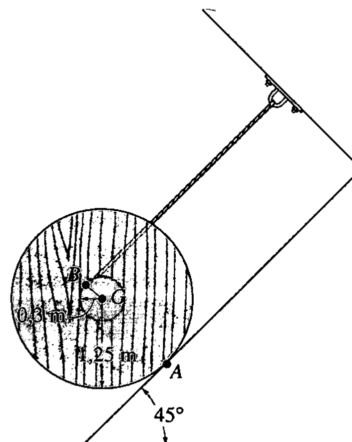

Problema D.52

**D.53.** A roda de 20 kg tem raio de giração $k_G = 0{,}8$ m. Determine a aceleração angular da roda se não há escorregamento.



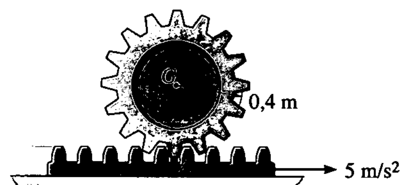

Problema D.53

**D.54.** A roda de 15 kg tem um fio enrolado no cilindro interno. Solta-se a roda a partir do repouso no plano inclinado, para o qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}1$. Se o raio de giração central da roda é $k_G = 0{,}8$ m, determine a sua aceleração angular.




Problema D.54

**D.55.** A engrenagem de 2 kg está em repouso na superfície de uma cremalheira. Repentinamente, dá-se à cremalheira uma aceleração de 5 m/s$^2$. Determine a aceleração angular inicial da engrenagem. O raio de giração da engrenagem é $k_G = 0{,}3$ m.




Problema D.55

# SOLUÇÕES E RESPOSTAS

**D.1.** $v = \frac{ds}{dt} = 1{,}5t^2 + 4|_{t=3} = 17{,}5$ pés/s ***Resp.***

$a = \frac{dv}{dt} = 3t|_{t=3} = 9$ pés/s$^2$ ***Resp.***

**D.2.** $(30)^2 = (0)^2 + 2a(100 - 0)$

$a = 4{,}5$ m/s$^2$ ***Resp.***

**D.3.** $v = \frac{ds}{dt} = 36t^2 + 4t + 3|_{t=2} = 155$ m/s ***Resp.***

$a = \frac{dv}{dt} = 72t + 4|_{t=2} = 148$ m/s$^2$ ***Resp.***

**D.4.** $v = \int (4t^2 - 2)\, dt$

$v = \frac{4}{3}t^3 - 2t + C_1$

$s = \int\left(\frac{4}{3}t^3 - 2t + C_1\right) dt$

$s = \frac{1}{3}t^4 - t^2 + C_1 t + C_2$

$t = 0,\ s = -2,\ C_2 = -2$

$t = 2,\ s = -20,\ C_1 = -9{,}67$

$t = 4,\ s = 28{,}7$ m ***Resp.***

**D.5.** $\overset{+}{\rightarrow}\ s = s_0 + v_0 t$

$10 = 0 + v_A \cos 30°\, t$

$+\uparrow\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$

$3 = 1{,}5 + v_A \text{ sen } 30°\, t + \frac{1}{2}(-9{,}81)t^2$

$t = 0{,}933,\ v_A = 12{,}4$ m/s ***Resp.***

**D.6.** $v = v_0 + a_c t$

$v_x = 0 + 12(2) = 24$ m/s

$v_y = \frac{dy}{dt} = 21t^2|_{t=2} = 84$ m/s

$v = \sqrt{(24)^2 + (84)^2} = 87{,}4$ m/s ***Resp.***

**D.7.** $(\overset{+}{\leftarrow})\ s = s_0 + v_0 t$

$R\left(\frac{4}{5}\right) = 0 + 20\left(\frac{3}{5}\right)t$

$(+\uparrow)\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$

$-R\left(\frac{3}{5}\right) = 0 + 20\left(\frac{4}{5}\right)t + \frac{1}{2}(-9{,}81)t^2$

$t = 5{,}10$ s

$R = 76{,}5$ m ***Resp.***

**D.8.** $a_t = 0$

$a_n = a = 1{,}5 = \frac{v^2}{250};\ v = 19{,}4$ m/s ***Resp.***

**D.9.** $a_t = 2$ m/s$^2$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(6)^2}{30} = 1{,}20$ m/s$^2$

$a = \sqrt{(2)^2 + (1{,}20)^2} = 2{,}33$ m/s$^2$ ***Resp.***

**D.10.** $a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{60 - 40}{[(5 - 0)/3.600]} = 14.400$ km/h$^2$

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(50)^2}{0{,}6} = 4.167$ km/h$^2$

$a = \sqrt{(14{,}4)^2 + (4{,}167)^2}\, 10^3 = 15{,}0(10^3)$ km/h$^2$ ***Resp.***

**D.11.** $a_t = 3 \cos 40° = 2{,}30$ m/s$^2$ ***Resp.***

$a_n = \frac{v^2}{\rho};\ 3 \text{ sen } 40° = \frac{(25)^2}{\rho},\ \rho = 324$ m ***Resp.***

**D.12.** $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$

$-20 \cos 45°\, \mathbf{i} + 20 \text{ sen } 45°\, \mathbf{j} = 65\mathbf{i} + \mathbf{v}_{A/B}$

$\mathbf{v}_{A/B} = -79{,}14\mathbf{i} + 14{,}14\mathbf{j}$

$v_{A/B} = \sqrt{(-79{,}14)^2 + (14{,}14)^2} = 80{,}4$ km/h ***Resp.***

$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$

$\frac{(20)^2}{0{,}1} \cos 45°\, \mathbf{i} + \frac{(20)^2}{0{,}1} \text{sen } 45°\, \mathbf{j} = 1.200\mathbf{i} + \mathbf{a}_{A/B}$

$\mathbf{a}_{A/B} = 1.628\mathbf{i} + 2.828\mathbf{j}$

$a_{A/B} = \sqrt{(1.628)^2 + (2.828)^2} = 3{,}26(10^3)$ km/h$^2$ ***Resp.***

**D.13.** $4s_A + s_P = l$

$v_P = -4v_A = -4(-2) = 8$ m/s ***Resp.***

**D.14.** $+\uparrow\ \Sigma F_y = ma_y;\ 170 - 153 = \frac{153}{32{,}2}a$

$a = 3{,}58$ pés/s$^2$ $\uparrow$ ***Resp.***

$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y;\ 153 - 130 = \frac{153}{32{,}2}a'$

$a' = 4{,}84$ pés/s$^2$ $\downarrow$ ***Resp.***

**D.15.** Bloco *B:*

$+\downarrow\ \Sigma F_y = ma_y;\ 4(9{,}81) - T = 4a$

Bloco *A:*

$\overset{+}{\leftarrow}\ \Sigma F_x = ma_x;\ T = 2a$

$T = 13{,}1$ N, $a = 6{,}54$ m/s$^2$ ***Resp.***

**D.16.** Bloco *A:*

$+\downarrow\ \Sigma F_y = ma_y;\ 15(9{,}81) - T = -15a$

Bloco *B:*

$+\downarrow\ \Sigma F_y = ma_y;\ 25(9{,}81) - T = 25a$

$a = 2{,}45$ m/s$^2$, $T = 184$ N ***Resp.***

**D.17.** Blocos $A$ e $B$:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x;\ 6 = \frac{70}{32{,}2}a;\ a = 2{,}76 \text{ pés/s}^2$

Verifique se ocorre escorregamento entre $A$ e $B$.

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x;\ 6 - F = \frac{20}{32{,}2}(2{,}76);$

$F = 4{,}29 \text{ lb} < 0{,}4(20) = 8 \text{ lb}$

$a_A = a_B = 2{,}76 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

**D.18.** $\Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho};\ (0{,}3)m(9{,}81) = m\frac{v^2}{2}$

$v = 2{,}43 \text{ m/s}$ ***Resp.***

**D.19.** $+\downarrow \Sigma F_n = ma_n;\ m(32{,}2) = m\left(\frac{v^2}{250}\right)$

$v = 89{,}7 \text{ pés/s}$ ***Resp.***

**D.20.** $+\downarrow \Sigma F_n = ma_n;\ 150 + N_p = \frac{150}{32{,}2}\left(\frac{(120)^2}{400}\right)$

$N_p = 17{,}7 \text{ lb}$ ***Resp.***

**D.21.** $\xleftarrow{+} \Sigma F_n = ma_n;\quad N_c \operatorname{sen} 30° + 0{,}2\, N_c \cos 30° = m\frac{v^2}{500}$

$+\uparrow \Sigma F_b = 0;$

$N_c \cos 30° - 0{,}2\, N_c \operatorname{sen} 30° - m(32{,}2) = 0$

$v = 119 \text{ pés/s}$ ***Resp.***

**D.22.** Em $B$:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_n = ma_n,\ T = \left(\frac{5}{32{,}2}\right)\left(\frac{(0)^2}{2}\right) = 0$ ***Resp.***

Na posição geral:

$+\nearrow \Sigma F_n = ma_n;\ T - 5 \operatorname{sen} \theta = \left(\frac{5}{32{,}2}\right)\left(\frac{v^2}{2}\right)$

$\searrow + \Sigma F_t = ma_t;\ 5 \cos \theta = \frac{5}{32{,}2}\left(\frac{v\,dv}{2\,d\theta}\right)$

$\int_0^{90°} 64{,}4 \cos \theta\, d\theta = \int_0^{v} v\, dv$

$v = 11{,}3 \text{ pés/s},$

Quando $\theta = 90°$:

$T = 15 \text{ lb}$ ***Resp.***

**D.23.** $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + U_{1-2} - 80(300) = \frac{1}{2}\left(\frac{15.000}{32{,}2}\right)(40)^2$

$U_{1-2} = 397(10^3) \text{ pés} \cdot \text{lb}$ ***Resp.***

**D.24.** $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$\frac{1}{2}\left(\frac{20}{32{,}2}\right)(5)^2 + 40(10) -$

$(0{,}2)(20 \cos 30°)(10) + 20(10 \operatorname{sen} 30°) = \frac{1}{2}\left(\frac{20}{32{,}2}\right)v^2$

$v = 39{,}0 \text{ pés/s}$ ***Resp.***

**D.25.** $+\uparrow \Sigma F_y = ma_y;\quad N_b + 100 \operatorname{sen} 20° - 10 - 3(9{,}81) = 0$

$N_b = 5{,}23 \text{ N}$

$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$0 + (100 \cos 20°)d - 0{,}2(5{,}23)d = \frac{1}{2}(3)(10)^2$

$d = 1{,}61 \text{ m}$ ***Resp.***

**D.26.** $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$0 + \frac{1}{2}(40)(x)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{32{,}2}\right)(6)^2 + 6(8)$

$x = 1{,}60 \text{ pé}$ ***Resp.***

**D.27.** $T_A + V_A = T_B + V_B$

$0 + 2(9{,}81)(1{,}5) = \frac{1}{2}(2)(v_B)^2 + 0$

$v_B = 5{,}42 \text{ m/s}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n;\ T - 2(9{,}81) = 2\left(\frac{(5{,}42)^2}{1{,}5}\right)$

$T = 58{,}9 \text{ N}$ ***Resp.***

**D.28.** $T_A + V_A = T_B + V_B$

$0 + \frac{1}{2}(4)(2{,}5 - 0{,}5)^2 + 5(2{,}5)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{32{,}2}\right)v_B^2 + \frac{1}{2}(4)(1 - 0{,}5)^2$

$v_B = 16{,}0 \text{ pés/s}$ ***Resp.***

**D.29.** $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$\frac{1}{2}(2)(4)^2 + \frac{1}{2}(30)(2 - 1)^2$

$= \frac{1}{2}(2)(v)^2 - 2(9{,}81)(1) + \frac{1}{2}(30)(\sqrt{5} - 1)^2$

$v = 5{,}26 \text{ m/s}$ ***Resp.***

**D.30.** Três vagões:

$\xrightarrow{+} mv_1 + \Sigma \int F\, dt = mv_2$

$\frac{250(2.000)}{32{,}2}(20) + 40(10^3)(t) - 10(250)t$

$= \frac{250(2.000)}{32{,}2}(30)$

$t = 4{,}14 \text{ s}$ ***Resp.***

Máquina:

$\xrightarrow{+} mv_1 + \Sigma \int F\, dt = mv_2$

$\frac{30(2.000)}{32{,}2}(20) + F(4{,}14) - 10(30)(4{,}14)$

$= \frac{30(2.000)}{32{,}2}(30)$

$F = 4.800 \text{ lb}$ ***Resp.***

**D.31.** $+\nwarrow \Sigma F_y = 0;$

$N_b - 5(9{,}81) \cos 30° - 100 \operatorname{sen} 30° = 0$

$N_b = 92{,}48 \text{ N}$

$+\nearrow\ mv_1 + \Sigma \int F\,dt = mv_2$

$5(3) + (100 \cos 30°)t - 5(9{,}81) \operatorname{sen} 30°(t) - 0{,}3(92{,}48)t = 5(10)$

$t = 1{,}02$ s ***Resp.***

**D.32.** Bloco $B$:

$(+\downarrow)\ mv_1 + \int F\,dt = mv_2$

$0 + 8(5) - T(5) = \dfrac{8}{32{,}2}(1)$

$T = 7{,}95$ lb ***Resp.***

Bloco $A$:

$(\overset{+}{\rightarrow})\ mv_1 + \int F\,dt = mv_2$

$0 + 7{,}95(5) - \mu_c(10)(5) = \dfrac{10}{32{,}2}(1)$

$\mu_c = 0{,}789$ ***Resp.***

**D.33.** $2s_A + s_B = l$

$2v_A = -v_B$

$+\downarrow\ m(v_A)_1 + \int F\,dt = m(v_A)_2$

$0 + 10(9{,}81)(10) - 2T(10) = 10(v_A)_2$

$+\downarrow\ m(v_B)_1 + \int F\,dt = m(v_B)_2$

$0 + 50(9{,}81)(10) - T(10) = 50(v_B)_2$

$T = 70{,}1$ N

$(v_A)_2 = -42{,}0$ m/s $= 42{,}0$ m/s $\uparrow$ ***Resp.***

$(v_B)_2 = 84{,}1$ m/s $\downarrow$ ***Resp.***

**D.34.** $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma mv_1 = \Sigma mv_2;\ 5(2) - 2(5) = 5(v_A)_2 + 2(v_B)_2$

$\overset{+}{\rightarrow}\ e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1};\ 0{,}5 = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{2 - (-5)}$

$(v_A)_2 = -1$ m/s $= 1$ m/s $\leftarrow$ ***Resp.***

$(v_B)_2 = 2{,}5$ m/s $\rightarrow$ ***Resp.***

**D.35.** $\overset{+}{\rightarrow} \Sigma mv_1 = \Sigma mv_2;\ 6(20) + 0 = 6(v_A)_2 + 24(v_B)_2$

$\overset{+}{\rightarrow}\ e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1};\ 1 = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{20 - 0}$

$(v_A)_2 = -12$ m/s $= 12$ m/s $\leftarrow$ ***Resp.***

$(v_B)_2 = 8$ m/s $\rightarrow$ ***Resp.***

Disco $A$:

$mv_1 + \int F\,dt = mv_2;$

$6(20) - \int F\,dt = -6(12)$

$\int F\,dt = 192$ N·s ***Resp.***

**D.36.** Depois da colisão: $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{32{,}2}\right)(v_A)_2^2 - 0{,}2(5)\left(\dfrac{2}{12}\right) = 0$

$(v_A)_2 = 1{,}465$ pés/s

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10}{32{,}2}\right)(v_B)_2^2 - 0{,}2(10)\left(\dfrac{3}{12}\right) = 0$

$(v_B)_2 = 1{,}794$ pé/s

$\Sigma mv_1 = \Sigma mv_2$

$\dfrac{5}{32{,}2}(v_A)_1 + 0 = \dfrac{5}{32{,}2}(1{,}465) + \dfrac{10}{32{,}2}(1{,}794)$

$(v_A)_1 = 5{,}054$

$e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} = \dfrac{1{,}794 - 1{,}465}{5{,}054 - 0} = 0{,}0652$ ***Resp.***

**D.37.** $\Sigma m(v_x)_1 = \Sigma m(v_x)_2$

$0 + 0 = \dfrac{2}{32{,}2}(1) + \dfrac{11}{32{,}2}(v_{Bx})_2$

$(v_{Bx})_2 = -0{,}1818$ pé/s

$\Sigma m(v_y)_1 = \Sigma m(v_y)_2$

$\dfrac{2}{32{,}2}(3) + 0 = 0 + \dfrac{11}{32{,}2}(v_{By})_2$

$(v_{By})_2 = 0{,}545$ pé/s

$(v_B)_2 = \sqrt{(-0{,}1818)^2 + (0{,}545)^2} = 0{,}575$ pés/s ***Resp.***

**D.38.** $\omega_B(5) = 3(4)$

$\omega_B = 2{,}40$ rad/s ↰ ***Resp.***

$\omega_C(3) = 2{,}40(2)$

$\omega_C = 1{,}60$ rad/s ↲ ***Resp.***

**D.39.** $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha_c t^2$

$\theta = 0 + 0 + \dfrac{1}{2}(2)(10)^2 = 100$ rev ***Resp.***

$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$

$\omega = 0 + 2(5) = 10$ rev/s ***Resp.***

**D.40.** $\alpha = \dfrac{a_t}{r} = \dfrac{20}{2} = 10$ rad/s$^2$ ***Resp.***

$10$ rev $= 20\pi$ rad

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha_c(\theta - \theta_0)$

$\omega^2 = 0 + 2(10)(20\pi - 0)$

$\omega = 35{,}4$ rad/s ***Resp.***

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha_c t^2$

$\theta = 0 + 35{,}4(4) + \dfrac{1}{2}(10)(4)^2 = 222$ rad

$\theta = \dfrac{222}{2\pi} = 35{,}3$ rev. ***Resp.***

**D.41.** $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/C}$

$v_A\mathbf{i} = 3\mathbf{i} + (-2\mathbf{k}) \times (-0{,}5\mathbf{j})$

$v_A = 2$ m/s $\rightarrow$ ***Resp.***

**D.42.** $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$

$2\mathbf{i} = \mathbf{0} + (-\omega\mathbf{k}) \times (1{,}5\mathbf{j})$

$\omega = 1{,}33 \text{ rad/s} \circlearrowright$

$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/B}$

$\mathbf{v}_C\mathbf{i} = \mathbf{0} + (-1{,}33\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j})$

$v_C = 1{,}33 \text{ pé/s} \rightarrow$ ***Resp.***

**D.43.** $\mathbf{v}_O = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{O/A}$

$2\mathbf{i} = \mathbf{0} + (-\omega\mathbf{k}) \times 1{,}5\mathbf{j}$

$\omega = 1{,}33 \text{ rad/s} \circlearrowright$

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/O}$

$\mathbf{v}_B = 2\mathbf{i} + (-1{,}33\mathbf{k}) \times (1{,}5 \cos 30° \,\mathbf{i} + 1{,}5 \text{ sen } 30° \,\mathbf{j})$

$\mathbf{v}_B = \{3\mathbf{i} - 1{,}73\mathbf{j}\} \text{ m/s}$ ***Resp.***

**D.44.** $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$

$-v_A\mathbf{j} = -2\mathbf{i} + \omega\mathbf{k} \times (-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$

$v_A = 1{,}5 \text{ pé/s} \downarrow$ ***Resp.***

$\omega = 0{,}5 \text{ rad/s} \circlearrowleft$ ***Resp.***

**D.45.** $v_C = 4(0{,}6) = 2{,}4 \text{ m/s} \leftarrow$

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/C}$

$-v_B \text{ sen } 30° \,\mathbf{i} + v_B \cos 30° \,\mathbf{j}$

$= -2{,}4\mathbf{i} + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (-0{,}6\mathbf{i})$

$v_B = 4{,}80 \text{ m/s} \nwarrow \omega_{BC} = 6{,}93 \text{ rad/s} \circlearrowright$

$\omega_{AB} = \dfrac{4{,}80}{0{,}6/\text{sen } 30°} = 4 \text{ rad/s} \circlearrowleft$ ***Resp.***

**D.46.** $v_B = 2(1{,}5) = 3 \text{ m/s} \searrow$

$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{C/B}$

$-v_C\mathbf{j} = 3 \cos 45° \,\mathbf{i} - 3 \text{ sen } 45° \,\mathbf{j}$

$+ (\omega\mathbf{k}) \times (1{,}5 \cos 45° \,\mathbf{i} - 1{,}5 \text{ sen } 45° \,\mathbf{j})$

$v_C = 4{,}24 \text{ m/s} \downarrow$ ***Resp.***

$\omega = 2 \text{ rad/s} \circlearrowright$

**D.47.** $\omega = \dfrac{v_B}{r_{B/C}} = \dfrac{2}{0{,}4} = 5 \text{ rad/s} \circlearrowright$

$\alpha = \dfrac{a_B}{r_{B/C}} = \dfrac{3}{0{,}4} = 7{,}5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$

$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/B} - \omega^2\mathbf{r}_{A/B}$

$\mathbf{a}_A = 3\mathbf{j} + (-7{,}5\mathbf{k}) \times (-0{,}4\mathbf{j}) - (5)^2(-0{,}4\mathbf{j})$

$\mathbf{a}_A = \{-3\mathbf{i} + 13\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

$a_B = 3 \text{ m/s}^2$ ***Resp.***

**D.48.** $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$

$-\mathbf{v}_B\mathbf{j} = -6\mathbf{i} + \omega\mathbf{k} \times (3 \cos 45° \,\mathbf{i} + 3 \text{ sen } 45° \,\mathbf{j})$

$\omega = 2{,}828 \text{ rad/s} \circlearrowright,\; v_B = 6 \text{ pés/s} \downarrow$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$

$-a_B\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (\alpha\mathbf{k}) \times (3 \cos 45° \,\mathbf{i} + 3 \text{ sen } 45° \,\mathbf{j})$

$-(2{,}828)^2 (3 \cos 45° \,\mathbf{i} + 3 \text{ sen } 45° \,\mathbf{j})$

$a_B = 31{,}9 \text{ pés/s}^2 \downarrow$ ***Resp.***

$\alpha = 7{,}06 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright$ ***Resp.***

**D.49.** $+\swarrow \Sigma F_x = m(a_G)_x;\; 3.500 \text{ sen } 20° = \dfrac{3.500}{32{,}2} a_G$

$a_G = 11{,}0 \text{ pés/s}^2$ ***Resp.***

$+\nwarrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;\; N_A + N_B - 3.500 \cos 20° = 0$

$\circlearrowright + \Sigma M_G = 0;\; N_B(4) - N_A(3) = 0$

$N_A = 1.879 \text{ lb}$ ***Resp.***

$N_B = 1.410 \text{ lb}$ ***Resp.***

**D.50.** $\circlearrowright + \Sigma M_A = \Sigma(M_k)_A;\; 10\left(\dfrac{3}{5}\right)(7) = \dfrac{20}{32{,}2} a(3{,}5)$

$a = 19{,}32 \text{ pés/s}^2$ ***Resp.***

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;\; A_x + 10\left(\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{20}{32{,}2}(19{,}32)$

$A_x = 6 \text{ lb}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;\; A_y - 20 + 10\left(\dfrac{4}{5}\right) = 0$

$A_y = 12 \text{ lb}$ ***Resp.***

**D.51.** $\circlearrowright + \Sigma M_B = I_B\alpha;\; 50(1) = 2{,}30\alpha$

$\alpha = 21{,}7 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$a_G = \left(\dfrac{1}{\cos 30°}\right)(21{,}7) = 25{,}1 \text{ m/s}^2$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x;$

$B_x = \left(\dfrac{50}{32{,}2}\right) 25{,}1 \text{ sen } 30° = 19{,}5 \text{ lb}$ ***Resp.***

$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y;$

$B_y - 50 = -\left(\dfrac{50}{32{,}2}\right) 25{,}1 \cos 30°.$

$B_y = 16{,}2 \text{ lb}$ ***Resp.***

**D.52.** $\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha;$

$20(9{,}81)(0{,}5) = \left[\dfrac{1}{12}(20)(3)^2 + 20(0{,}5)^2\right]\alpha$

$\alpha = 4{,}90 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

**D.53.** Não há escorregamento, logo

$a_G = 1{,}25\alpha$

$\circlearrowright + \Sigma M_A = \Sigma(M_k)_A;\; 20(9{,}81) \text{sen } 20° (1{,}25)$

$= 20(0{,}8)^2\alpha + (20a_G)(1{,}25)$

$\alpha = 1{,}90 \text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

$a_G = 2{,}38 \text{ m/s}^2$

**D.54.** $+\nwarrow \Sigma F_y = 0;\ N_A - 15(9{,}81)\cos 45° = 0;$

$N_A = 104{,}1\text{ N}$

$a_G = \alpha(0{,}3)$

$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(M_k)_B;\ (0{,}1)(104{,}1)(1{,}55) -$

$15(9{,}81)\text{ sen } 45°(0{,}3) = -15(0{,}8)^2\alpha - 15(a_G)(0{,}3)$

$a_G = 0{,}413\text{ m/s}^2$

$\alpha = 1{,}38\text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

**D.55.** $\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x;\ F_A = 2a_G$

$\circlearrowleft + \Sigma M_G = I_G\alpha;\ F_A(0{,}4) = 2(0{,}3)^2\alpha$

$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/G} - \omega^2 r_{A/G}$

$5\mathbf{i} = a_G\mathbf{i} + (\alpha\mathbf{k}) \times (-0{,}4\mathbf{j}) - \mathbf{0}$

$5 = a_G + 0{,}4\alpha$

$F_A = 3{,}60\text{ N}$

$a_G = 1{,}80\text{ m/s}^2$

$\alpha = 8\text{ rad/s}^2$ ***Resp.***

# RESPOSTAS

## Capítulo 12

**12.1.** $a_c = 1{,}74\ \text{m/s}^2,\ t = 4{,}80\ \text{s}$
**12.2.** $a_c = 6{,}40\ \text{pés/s}^2,\ t = 12{,}5\ \text{s}$
**12.3.** $v_2 = 59{,}5\ \text{pés/s},\ t = 1{,}29\ \text{s}$
**12.5.** $t = 30\ \text{s},\ s = 792\ \text{m}$
**12.6.** $s = 123\ \text{pés},\ a = 2{,}99\ \text{pés/s}^2$
**12.7.** $a_{máx} = 42\ \text{pés/s}^2,\ v_{máx} = 135\ \text{pés/s}$
**12.9.** $t = 21{,}9\ \text{s}$
**12.10.** $a = 0{,}603\ \text{pés/s}^2$
**12.11.** $v = 32\ \text{m/s},\ s = 67\ \text{m},\ d = 66\ \text{m}$
**12.13.** $s|_{t=6} = -27{,}0\ \text{pés},\ s_{tot} = 69{,}0\ \text{pés}$
**12.14.** $s|_{t=6} = -18\ \text{pés},\ s_{tot} = 46\ \text{pés}$
**12.15.** $s = 7{,}87\ \text{m}$
**12.17.** $d_A = 41{,}0\ \text{pés},\ d_B = 200\ \text{pés},$
$\Delta s_{AB} = 152\ \text{pés}$
**12.18.** $a|_{t=4} = 1{,}06\ \text{m/s}^2$
**12.19.** $\Delta s = 48{,}3\ \text{pés}$
**12.21.** $k = -10{,}2\ \text{s}^{-2},\ s = 1{,}56\ \text{pés}$
**12.22.** $v = 322\ \text{m/s},\ t = 19{,}3\ \text{s}$
**12.23.** $t = 5{,}62\ \text{s}$
**12.25.** $v = 1{,}29\ \text{m/s}$
**12.26.** $v_B = 31{,}4\ \text{pés/s}$
**12.29.** $\Delta s = 3{,}56\ \text{m}$
**12.30.** $v = 1{,}27\ \text{m/s}$
**12.31.** $t = 48{,}3\ \text{s}$
**12.33.** **a)** $v = 45{,}5\ \text{m/s}$, **b)** $v = 100\ \text{m/s}$
**12.34.** $v = 11{,}2\ \text{km/s}$
**12.35.** $v = 3{,}02\ \text{km/s} \downarrow$
**12.38.** $t = 7{,}48\ \text{s}$
**12.39.** $t' = 27{,}3\ \text{s}$
**12.41.** $v_{máx} = 0{,}89442\ \text{m/s},\ t' = 0{,}44721\ \text{s}$
**12.45.** $t' = 33{,}3\ \text{s}$
**12.46.** $s = 114\ \text{m}$
**12.47.** $s = 3.600\ \text{pés},\ (v_{perc})_{méd} = 30\ \text{pés/s}$
**12.49.** $a_{máx} = 8\ \text{pés/s}^2$
**12.50.** $(v_{perc})_{méd} = 37{,}8\ \text{pés/s},\ s_T = 1{,}13(10^3)\ \text{pés}$
**12.51.** $s = 144\ \text{m}$
**12.53.** $\Delta s = 87{,}5\ \text{m}$
**12.55.** Em $s = 75$ pés, $v = 27{,}4$ pés/s;
em $s = 100$ pés,
$v = 31{,}62$ pés/s; em $s = 125$ pés,
$v = 82{,}3$ pés/s
**12.58.** $t = 9{,}88\ \text{s}$
**12.59.** Em $s = 50$ m, $a = 0{,}32\ \text{m/s}^2$;
em $s = 150$ m, $a = -0{,}32\ \text{m/s}^2$
**12.62.** Em $s = 100$ m, $a = 16\ \text{m/s}^2$;
em $s = 150$ m, $a = 4{,}5\ \text{m/s}^2$
**12.63.** Em $s = 40$ pés, $v = 12{,}7$ pés/s;
em $s = 90$ pés, $v = 22{,}8$ pés/s;
em $s = 200$ pés, $v = 36{,}1$ pés/s
**12.65.** Em $s = 50$ pés, $v = 22{,}4$ pés/s;
em $s = 150$ pés, $v = 38{,}7$ pés/s;
em $s = 200$ pés, $v = 47{,}4$ pés/s
**12.66.** (4, 2, 6) pés
**12.67.** $a = 80{,}2\ \text{m/s}^2$, (42,7, 16,0, 14,0) pés
**12.69.** $v = 9{,}68\ \text{m/s},\ a = 16{,}8\ \text{m/s}^2$
**12.70.** $\Delta r = 3{,}61\ \text{km},\ d = 5\ \text{km}$
**12.71.** $(v_{perc})_{méd} = 4{,}28\ \text{m/s}$
**12.73.** $a_{AB} = \{0{,}404\ \mathbf{i} + 7{,}07\ \mathbf{j}\}\ \text{m/s}^2,$
$a_{AC} = \{2{,}50\ \mathbf{i}\}\ \text{m/s}^2$
**12.74.** $v_x = 0{,}398\ \text{pés/s},\ v_y = 3{,}98\ \text{pés/s}$
**12.75.** $a_y = c,\ a_x = \dfrac{c}{2k}(y + ct^2)$
**12.77.** $v_x = v_0\left[1 + \left(\frac{\pi}{L}c\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]^{-\frac{1}{2}},$
$v_y = \dfrac{v_0 \pi c}{L}\left(\cos\dfrac{\pi}{L}x\right)$
$\left[1 + \left(\frac{\pi}{L}c\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{L}x\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$
**12.78.** $d = 4{,}00\ \text{pés},\ a = 37{,}8\ \text{pés/s}^2$
**12.79.** $v = 201\ \text{m/s},\ a = 405\ \text{m/s}^2$
**12.81.** $h = 2{,}87\ \text{m},\ s_x = 19{,}9\ \text{m}$
**12.82.** $t = 3{,}55\ \text{s},\ v = 32{,}0\ \text{m/s}$
**12.83.** $h = 11{,}1\ \text{pés}$
**12.85.** $v_0 = 67{,}7\ \text{pés/s},\ \theta = 58{,}9°$
**12.86.** $v_A = 27{,}3\ \text{pés/s}$
**12.87.** $v_A = 36{,}7\ \text{pés/s},\ h = 11{,}5\ \text{pés}$
**12.89.** $a = g = -9{,}81\ \text{m/s}^2,$
$v_B = 19{,}5\ \text{m/s}$
**12.90.** $d = 166\ \text{pés}$
**12.91.** $v_A = 19{,}4\ \text{m/s},\ t_{AB} = 4{,}54\ \text{s}$
**12.93.** $x = 13{,}3\ \text{pés},\ y = -7{,}09\ \text{pés}$
**12.94.** $v_A = 16{,}5\ \text{pés/s},\ v_B = 29{,}2\ \text{pés/s}$
**12.95.** $v_A = 39{,}7\ \text{pés/s},\ s = 6{,}11\ \text{pés}$
**12.97.** $\theta_D = 14{,}7°,$
$\theta_c = 75{,}3°;\ \Delta t = 1{,}45\ \text{s}$
**12.98.** $x = 32{,}3\ \text{pés},\ y = 6{,}17\ \text{pés},\ v = 71{,}8\ \text{pés/s}$
**12.99.** $d = 28{,}0\ \text{pés},\ v_B = 20{,}0\ \text{pés/s}$
**12.101.** $a = 21{,}6\ \text{pés/s}^2,\ \Delta s = 40{,}5\ \text{pés}$
**12.102.** $a_t = 35{,}0\ \text{pés/s}^2,\ \rho = 2{,}64(10^3)\ \text{pés}$
**12.103.** $a = 7{,}42\ \text{pés/s}^2$
**12.105.** $v = 1{,}96\ \text{m/s},\ a = 0{,}930\ \text{m/s}^2$
**12.106.** $a = 0{,}921\ \text{m/s}^2$
**12.107.** $v = 5{,}66\ \text{m/s},\ a = 1{,}02\ \text{m/s}^2$
**12.109.** $a = 15{,}1\ \text{pés/s}^2,\ \Delta s = 14\ \text{pés}$
**12.110.** $v = 19{,}9\ \text{m/s},\ a = 24{,}2\ \text{m/s}^2$
**12.111.** $a_t = 3{,}62\ \text{m/s}^2,\ \rho = 29{,}6\ \text{m}$
**12.113.** $v = 97{,}2\ \text{pés/s},\ a = 42{,}6\ \text{m/s}^2$
**12.114.** $v = 115\ \text{pés/s},\ a = 58{,}4\ \text{pés/s}^2$
**12.115.** $v = 4{,}58\ \text{m/s},\ a = 0{,}653\ \text{m/s}^2$

**12.117.** $a_n = 5{,}02\ \text{m/s}^2$

**12.118.** $v = 51{,}1$ pés/s, $a = 10{,}3$ pés/s$^2$

**12.119.** $v_B = 3{,}68\ \text{m/s}$, $a_B = 4{,}98\ \text{m/s}^2$

**12.121.** $a = 8{,}61\ \text{m/s}^2$

**12.122.** $y = -0{,}0766x^2$, $v = 8{,}37\ \text{m/s}$,
$a_n = 9{,}38\ \text{m/s}^2$, $a_t = 2{,}88\ \text{m/s}^2$

**12.123.** $v_n = 0$, $v_t = 7{,}21\ \text{m/s}$,
$a_n = 0{,}555\ \text{m/s}^2$,
$a_t = 2{,}77\ \text{m/s}^2$

**12.125.** **a)** $s_A = 1{,}40\ \text{m}$, $s_B = 3\ \text{m}$,
**b)** $\mathbf{r}_A = \{1{,}38\,\mathbf{i} + 0{,}195\,\mathbf{j}\}\ \text{m}$,
$\mathbf{r}_B = \{-2{,}82\,\mathbf{i} + 0{,}873\,\mathbf{j}\}\ \text{m}$,
**c)** $\Delta r = 4{,}26\ \text{m}$

**12.126.** $t = 14{,}3\ \text{s}$, $a_B = 0{,}45\ \text{m/s}^2$

**12.127.** $t = 1{,}21\ \text{s}$

**12.129.** $v_x = \dfrac{v_0}{\sqrt{1+b^2}}$, $v_y = \dfrac{v_0 b}{\sqrt{1+b^2}}$,
$a_n = \dfrac{2c\,v_0^2}{(1+b^2)^{3/2}}$

**12.130.** $y = \{0{,}839x - 0{,}131x^2\}\ \text{m}$,
$a_t = 3{,}94\ \text{m/s}^2$, $a_n = 8{,}98\ \text{m/s}^2$

**12.131.** $d = 17{,}0\ \text{m}$, $a_A = 190\ \text{m/s}^2$,
$a_B = 12{,}8\ \text{m/s}^2$

**12.133.** $v = 4{,}58\ \text{m/s}$, $a = 0{,}653\ \text{m/s}^2$

**12.134.** $a = 35{,}0\ \text{m/s}^2$, $s = 67{,}1$ pés

**12.135.** $\alpha = 52{,}5°$, $\beta = 142°$, $\gamma = 85{,}1°$
ou $\alpha = 128°$, $\beta = 37{,}9°$, $\gamma = 94{,}9°$

**12.137.** $v_r = -1{,}66\ \text{m/s}$, $v_\theta = -2{,}07\ \text{m/s}$,
$a_r = -4{,}20\ \text{m/s}^2$, $a_\theta = 2{,}97\ \text{m/s}^2$

**12.138.** $a = 14{,}3$ pol/s$^2$

**12.139.** $v = 120$ pés/s, $a = 76{,}8$ pés/s$^2$

**12.141.** $v_r = -2{,}33\ \text{m/s}$, $v_\theta = 7{,}91\ \text{m/s}$,
$a_r = -158\ \text{m/s}^2$, $a_\theta = -18{,}6\ \text{m/s}^2$

**12.142.** $a = 2{,}32\ \text{m/s}^2$

**12.143.** $v_r = 16{,}0$ pés/s, $v_\theta = 1{,}94$ pés/s,
$a_r = 7{,}76$ pés/s$^2$, $a_\theta = 1{,}94$ pés/s$^2$

**12.145.** $a_r = -6{,}67\ \text{m/s}^2$, $a_\theta = 3\ \text{m/s}^2$

**12.146.** $a = 48{,}3$ pol/s$^2$

**12.147.** $v_r = 1{,}20\ \text{m/s}$, $v_\theta = 1{,}26\ \text{m/s}$,
$a_r = -3{,}77\ \text{m/s}^2$, $a_\theta = 7{,}20\ \text{m/s}^2$

**12.149.** $v_r = 1{,}20\ \text{m/s}$, $v_\theta = 1{,}50\ \text{m/s}$,
$a_r = -4{,}50\ \text{m/s}^2$, $a_\theta = 7{,}20\ \text{m/s}^2$

**12.150.** $v = 12{,}6\ \text{m/s}$, $a = 83{,}2\ \text{m/s}^2$

**12.151.** $\mathbf{v} = \{-116\mathbf{u}_r - 163\mathbf{u}_z\}\ \text{mm/s}$,
$\mathbf{a} = \{-5{,}81\mathbf{u}_r - 8{,}14\mathbf{u}_z\}\ \text{mm/s}^2$

**12.153.** $a = 0{,}217\ \text{m/s}^2$

**12.154.** $v_r = -0{,}212\ \text{m/s}$, $v_\theta = 0{,}812\ \text{m/s}$,
$a_r = -0{,}703\ \text{m/s}^2$, $a_\theta = 0{,}0838\ \text{m/s}^2$

**12.155.** $v_r = -2{,}80\ \text{m/s}$, $v_\theta = 19{,}8\ \text{m/s}$

**12.157.** $v = 5{,}95$ pés/s, $a = 3{,}44$ pés/s$^2$

**12.158.** $v = 24{,}1$ pés/s, $a = 8{,}17$ pés/s$^2$

**12.159.** $v = 164\ \text{mm/s}$, $a = 659\ \text{mm/s}^2$

**12.161.** $\dot{\theta} = 0{,}0178\ \text{rad/s}$

**12.162.** $\ddot{\theta} = 0{,}00404\ \text{rad/s}^2$

**12.163.** $v_r = -\dfrac{20}{\sqrt{1+\theta^2}}$, $v_\theta = \dfrac{20\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$
Quando $\theta = 1$ rad, $v_r = -14{,}1$ pés/s,
$v_\theta = 14{,}1$ pés/s

**12.165.** $v_r = 0{,}242\ \text{m/s}$, $v_\theta = 0{,}943\ \text{m/s}$,
$a_r = -2{,}32\ \text{m/s}^2$, $a_\theta = 1{,}74\ \text{m/s}^2$

**12.166.** $a = 6{,}54\ \text{m/s}^2$

**12.167.** $\dot{\theta} = 0{,}75\ \text{rad/s}$

**12.169.** $v = 7{,}83\ \text{m/s}$, $a = 2{,}27\ \text{m/s}^2$

**12.170.** $v = 0{,}242\ \text{m/s}$, $a = 0{,}169\ \text{m/s}^2$,
$v_x = 0{,}162\ \text{m/s}$, $v_y = 0{,}180\ \text{m/s}$

**12.171.** $v = 20{,}0$ pés/s, $a = 74{,}5$ pés/s$^2$

**12.173.** $v_B = 0{,}5\ \text{m/s}\uparrow$

**12.174.** $v_A = 12$ pés/s $\rightarrow$

**12.175.** $t = 160\ \text{s}$

**12.177.** $v_P = 12$ pés/s

**12.178.** $\Delta s_B = 2$ pés $\uparrow$

**12.179.** $v_A = 1$ pés/s $\uparrow$, $a_A = 0{,}5$ pés/s$^2\downarrow$

**12.181.** $v_B = 1$ pés/s $\uparrow$

**12.182.** $v_{B/C} = 30$ pés/s $\uparrow$

**12.183.** $v_E = 0{,}250\ \text{m/s}\uparrow$

**12.185.** $v_C = 1{,}50$ pés/s $\uparrow$

**12.186.** $v_C = 0{,}667\ \text{m/s}\uparrow$

**12.187.** $\dot{s}_B = 1{,}20$ pés/s $\downarrow$, $\ddot{s}_B = 1{,}11$ pés/s$^2\uparrow$

**12.189.** $v_C = 1{,}2\ \text{m/s}\uparrow$, $a_C = 0{,}512\ \text{m/s}^2\uparrow$

**12.190.** $\dot{x}_B = 6{,}08$ pés/s $\leftarrow$

**12.191.** $v_B = 1{,}41\ \text{m/s}\uparrow$

**12.193.** $v_A = -v_B\left(1 + \left(\dfrac{h}{s_A}\right)^2\right)^{1/2}$,
$a_A = -a_B\left(1 + \left(\dfrac{h}{s_B}\right)^2\right)^{1/2} +$
$\dfrac{v_A v_B h^2}{s_A^3}\left(1 + \left(\dfrac{h}{s_A}\right)^2\right)^{-1/2}$

**12.194.** $\Delta s_C = 2$ pés

**12.195.** $v_{A/C} = 2{,}40\ \text{m/s}$, $\theta = 50{,}3°$ ∡

**12.197.** $v_{B/A} = 26{,}5$ mi/h, $\theta = 40{,}9°$ ∡,
$a_{B/A} = 1{,}79(10^3)$ mi/h$^2$, $\theta = 72.0°$ ∡

**12.198.** $a_{B/A} = 1955$ mi/h$^2$, $\theta = 0{,}767°$ ∡

**12.199.** $v_{A/B} = 21{,}7$ pés/s, $\theta = 18{,}0°$ ∡,
$t = 36{,}9\ \text{s}$

**12.201.** $v_{A/B} = 6{,}69\ \text{m/s}$, $\theta = 53{,}3°$ ∡,
$a_{A/B} = 1{,}52\ \text{m/s}^2$, $\theta = 41{,}9°$ ∡

**12.202.** $v_{B/A} = 28{,}5$ mi/h, $\theta = 44{,}5°$ ∡,
$a_{B/A} = 3.418$ mi/h$^2$, $\theta = 80{,}6°$ ∡

**12.203.** $v_{A/B} = 98{,}4$ pés/s, $\theta = 67{,}6°$ ∡,
$a_{A/B} = 19{,}8$ pés/s$^2$, $\theta = 57{,}4°$ ∡

**12.205.** $v_b = 6{,}21\ \text{m/s}$, $t = 11{,}4\ \text{s}$

**12.206.** $v_r = 34{,}6$ km/h

**12.207.** $v_{C/B} = 17{,}8\ \text{m/s}$, $\theta = 76{,}2°$ ∡,
$a_{C/B} = 9{,}81\ \text{m/s}^2\downarrow$

## Capítulo 13

**13.1.** $F = 199(10^{18})\text{N}$

**13.2.** $v = 46{,}2$ pés/s, $s = 66{,}2$ pés

**13.3.** $t_B = 1{,}09\ \text{s}$, $t_C = 1{,}54\ \text{s}$, $t_D = 2{,}32\ \text{s}$

**13.5.** $a = 0{,}19\ \text{m/s}^2\uparrow$

**13.6.** $a = 0{,}343\ \text{m/s}^2$, $a = 0{,}436\ \text{m/s}^2$

**13.7.** $T = 3{,}01\ \text{kN}$

**13.9.** $a = 1{,}66\ \text{m/s}^2$

**13.10.** $a = 1{,}75\ \text{m/s}^2$

**13.11.** $v_2 = 77{,}9$ pés/s

**13.13.** $s = 745$ pés

**13.14.** $a_A = \dfrac{P}{2m} - 2\,\mu g$

**13.15.** $a = 3{,}43$ pés/s$^2$

**13.17.** Para $0 \le t < 10$ s: $F = 652$ lb;
para $10 < t \le 30$ s: $F = 109$ lb

**13.18.** $a = 14{,}8$ pés/s$^2$

**13.19.** $R = 5{,}30$ pés, $t = 1{,}82\ \text{s}$

**13.21.** $T = 4{,}92\ \text{kN}$

**13.22.** $v = 11{,}9$ pés/s

**13.23.** $s = 64{,}4$ pés

13.25. $m_A = 13{,}7$ kg
13.26. $a_E = 0{,}75$ m/s$^2$ ↑, $T = 1{,}32$ kN
13.27. $a_B = 2{,}30$ pés/s$^2$ ↑
13.29. $s = 5{,}43$ m
13.30. $a_A = 1{,}51$ m/s$^2$ ↑, $T_A = 90{,}6$ N, $a_B = 6{,}04$ m/s$^2$ ↓, $T_B = 22{,}6$ N
13.31. $v = 30$ m/s
13.33. $a_C = 7{,}49$ m/s$^2$, $\theta = 22{,}8°$
13.34. **a)** $T = 40$ lb, **b)** $T = 59{,}9$ lb
13.35. $A_x = 35{,}6$ lb, $A_y = 236$ lb, $M_A = 678$ lb·pés
13.37. $t = 2{,}04$ s
13.38. $v = 14{,}6$ pés/s
13.39. $v_B = 4{,}52$ m/s
13.41. $a_B = 7{,}59$ pés/s$^2$
13.42. $P = 2mg \operatorname{tg} \theta$
13.43. $P = 2mg\left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \mu_e \cos\theta}{\cos\theta - \mu_e \operatorname{sen}\theta}\right)$
13.45. $x = \dfrac{mv_0}{k}\cos\theta_0(1 - e^{-(k/m)t})$, $y = -\dfrac{mgt}{k} + \dfrac{m}{k}\left(v_0 \operatorname{sen}\theta_0 + \dfrac{mg}{k}\right)(1 - e^{-(k/m)t})$, $x_{máx} = \dfrac{mv_0 \cos\theta_0}{k}$
13.46. $T = 1{,}63$ kN
13.47. $T = 1{,}80$ kN
13.49. $x = d$, $v = \sqrt{\dfrac{kd^2}{(m_A + m_B)}}$
13.50. $x = d$
13.51. $d = \dfrac{(m_A + m_B)g}{k}$
13.53. $v_{máx} = 24{,}4$ m/s
13.54. $v_{mín} = 12{,}2$ m/s
13.55. 3,13 m/s
13.57. $T = 9{,}09$ kN, $\theta = 43{,}3°$
13.59. $a_t = 16{,}1$ pés/s$^2$, $T = 46{,}9$ lb
13.61. $\theta = 78{,}1°$
13.62. $\theta = 75{,}6°$
13.63. $v = 80{,}2$ pés/s
13.65. $N = 277$ lb, $F = 13{,}4$ lb
13.66. $\theta = 47{,}5°$
13.67. $v = 6{,}30$ m/s, $F_n = 283$ N, $F_t = 0$, $F_b = 490$ N
13.69. $a_t = 3{,}36$ m/s$^2$ ↙, $T = 361$ N
13.70. $v_C = 19{,}9$ pés/s, $N_C = 7{,}91$ lb, $v_B = 21{,}0$ pés/s
13.71. $\rho = 9{,}32$ m
13.73. $F = 3{,}51$ kN, $N = 6{,}73$ kN
13.74. $v = 2{,}10$ m/s
13.75. $N = 5{,}88$ lb, $a_t = 23{,}0$ pés/s$^2$
13.77. $v = 1{,}48$ m/s
13.78. $t = 7{,}39$ s
13.79. $N = 1{,}02$ kN
13.81. $a_t = 29{,}4$ pés/s$^2$, $N = 69{,}0$ lb
13.82. $a = 7{,}32$ m/s$^2$, $N = 59{,}2$ N
13.83. $F_r = -240$ N, $F_\theta = 66$ N, $F_z = -3{,}28$ N
13.85. $F_A = 2{,}06$ lb
13.86. $(F_A)_{máx} = 2{,}06$ lb, $(F_A)_{mín} = 0{,}335$ lb
13.87. $(F_z)_{mín} = 15{,}6$ N, $(F_z)_{máx} = 23{,}6$ N
13.89. $N = 2{,}77$ lb
13.90. $F = 0{,}143$ lb
13.91. $N = 5{,}79$ N, $F = 1{,}78$ N
13.93. $N = 59{,}3$ N, $P = 17{,}8$ N
13.94. $F = -0{,}0155$ lb
13.95. $F = -0{,}0108$ lb
13.97. $F = 7{,}67$ N
13.98. $F = 7{,}82$ N
13.99. $F_r = -20{,}0$ N, $F_\theta = 0$, $F_z = 2{,}45$ kN
13.101. $\dot{\theta} = 4{,}00$ rad/s, $T = 8$ N
13.102. $N = 24{,}8$ N, $F = 24{,}8$ N
13.103. $N = 54{,}4$ N, $F = 54{,}4$ N
13.105. $T = 509$ lb
13.106. $a_t = 12$ m/s$^2$, 5,71°
13.107. $a_t = 11.0$ m/s$^2$, 5,71°
13.109. $P = 12{,}6$ lb, $N = 4{,}22$ lb
13.110. $N = 113$ lb
13.111. $r = 0{,}198$ m
13.114. $v_B = 7{,}71$ km/s, $v_A = 4{,}63$ km/s
13.115. $v_p = 7{,}31$ km/s
13.117. **a)** $r = 194(10^3)$ mi, **b)** $r = 392(10^3)$ mi, **c)** $194(10^3)$ mi $< r < 392(10^3)$ mi, **d)** $r > 392(10^3)$ mi
13.118. $v_{r/s} = 1{,}68$ km/s
13.119. $v_0 = 7{,}45$ km/s
13.121. $v_p = 7{,}47$ km/s
13.122. $v_a = 3{,}94$ km/s, $t = 46{,}1$ min
13.123. $\Delta v_A = -466$ m/s, $\Delta v_B = -2{,}27$ km/s
13.125. $v_A = 6{,}11$ km/s, $\Delta v_B = -2{,}37$ km/s
13.126. $v_B = 1{,}20$ km/s, $\Delta v_A = -2{,}17$ km/s
13.127. $t = 2{,}90$ hr, $v = 4{,}42$ km/s, $\Delta v = 578$ m/s

## Capítulo 14

14.1. $U_W = 4{,}12$ kJ, $U_{N_P} = -2{,}44$ kJ; A diferença é responsável por uma mudança da energia cinética.
14.2. $s = 59{,}7$ m
14.3. $v = 12{,}6$ m/s
14.5. $v = 0{,}365$ pés/s
14.6. $v_2 = 2{,}12$ km/s (aprox.)
14.7. $k = 15{,}0$ MN/m$^2$
14.9. $d = 12$ m
14.10. $s = 179$ mm
14.11. $s = 3{,}41$ m
14.13. $v_2 = 6{,}08$ m/s no referencial de $A$, $v_2 = 4{,}08$ m/s no referencial de $B$
14.14. $v = 2{,}64$ m/s, $T = 115$ N
14.15. $v_A = 7{,}18$ pés/s
14.17. $v_C = 1{,}37$ m/s
14.18. $h = 47{,}5$ m
14.19. $v_2 = 15{,}4$ m/s
14.21. $s = 9{,}29$ pés
14.22. $v_A = 3{,}52$ pés/s
14.23. $v_B = 7{,}22$ pés/s, $N_B = 27{,}1$ lb, $v_C = 17{,}0$ pés/s, $N_C = 133$ lb, $v_D = 18{,}2$ pés/s
14.25. $k_B = 11{,}1$ kN/m
14.26. $s = 2{,}48$ pés, $T_A = 36{,}0$ lb
14.27. $s_{Tot} = 3{,}88$ pés
14.29. $\rho = 88{,}3$ pés
14.30. $v_A = 28{,}3$ m/s
14.31. $s = 0{,}730$ m
14.33. $y = 0{,}815$ m, $N_b = 568$ N, $a = 6{,}23$ m/s$^2$
14.34. $s = 3{,}33$ pés

**14.35.** $v_D = 17{,}7$ m/s, $R = 33{,}0$ m
**14.37.** $s = 1{,}90$ pés
**14.38.** $v_A = 3{,}82$ m/s
**14.39.** $v_C = 2{,}36$ m/s
**14.41.** $P_{méd} = 200$ kW
**14.42.** potência de entrada = 4,20 hp
**14.43.** $\Delta t = 6{,}78$ s
**14.45.** 102 kW
**14.46.** $P_{máx} = 119$ hp
**14.47.** $s = 181$ pés
**14.49.** $P_{mín} = 0{,}644$ hp
**14.50.** $s = \dfrac{mv^3}{3P}$
**14.51.** $t = 46{,}2$ min
**14.53.** $P_s = 35{,}4$ kW
**14.54.** $P_s = 1{,}12$ kW
**14.55.** $P_e = 22{,}2$ kW
**14.57.** $P_e = 483$ kW
**14.58.** $P_e = 622$ kW
**14.59.** $P_e = 1{,}63$ hp
**14.61.** $P = 0{,}229$ hp
**14.62.** Para $0 \le t \le 0{,}2$: $P = 53{,}3t$ kW; para $0{,}2 \le t \le 0{,}3$: $P = (160t - 533t^2)$ kW; $U = 1{,}69$ kJ
**14.63.** $P_{máx} = 10{,}7$ kW
**14.65.** $v_A = 7{,}18$ pés/s
**14.66.** $v = 1{,}37$ m/s
**14.67.** $s = 0{,}730$ m
**14.69.** $v_B = 7{,}22$ pés/s, $N_B = 27{,}1$ lb, $v_C = 17{,}0$ pés/s, $N_C = 133$ lb, $v_D = 18{,}2$ pés/s
**14.70.** $k_B = 287$ N/m
**14.71.** $v_B = 25{,}4$ pés/s
**14.73.** $v_2 = 13{,}9$ pés/s
**14.74.** $v_2 = 11{,}7$ pés/s
**14.75.** $v_A = 2{,}45$ m/s
**14.77.** $v = 12{,}6$ pés/s, $N_C = 18{,}9$ lb
**14.78.** $v_C = 19{,}4$ pés/s
**14.79.** $h = 24{,}5$ m, $N_B = 0$, $N_C = 16{,}8$ kN
**14.81.** $v_C = 7{,}58$ m/s, imediatamente antes de atingir $B$: $T = 1{,}56$ kN, imediatamente depois de atingir $B$: $T = 2{,}90$ kN
**14.82.** $v_B = 27{,}2$ pés/s
**14.83.** $l = 90$ pés, $h = 219$ pés, $a = 483$ pés/s$^2$
**14.85.** $v = 80{,}2$ pés/s, $N_G = 952$ lb
**14.86.** $\theta = 22{,}3°$, $s = 0{,}587$ m
**14.87.** $x = 17{,}7$ pés, $y = 8{,}83$ pés
**14.89.** $d = 8{,}53$ m, $v_D = 10$ m/s
**14.90.** $\theta = 48{,}2°$
**14.91.** $v = 32{,}3$ pés/s
**14.93.** Apenas uma mola se comprime, em $s = 0{,}195$ pés.
**14.94.** $s_A = 1{,}29$ pés

## Capítulo 15

**15.1.** $v = 29{,}4$ pés/s
**15.2.** $t = 0{,}280$ s, $v_B = 15{,}6$ pés/s
**15.3.** $t = 0{,}439$ s
**15.5.** $I = 90{,}0$ lb · s
**15.6.** $I = 0{,}706$ N · s, 40°$\measuredangle$
**15.7.** $I = 0{,}311$ lb · s
**15.9.** $I = 63{,}4$ N · s
**15.10.** $I = 2{,}61$ N · s, 30°$\measuredangle$
**15.11.** $t = 150$ pés/s
**15.13.** $F_0 = 2{,}67$ kN
**15.14.** $v = 7{,}40$ m/s no referencial de $A$, $v = 5{,}40$ m/s no referencial de $B$
**15.15.** $t = 1{,}42$ s
**15.17.** $F = 24$ kN, $T = 24$ kN
**15.18.** $F_{méd} = 3{,}64$ kip
**15.19.** $I = 63{,}4$ N · s
**15.21.** $(v_x)_2 = 91{,}4$ pés/s ←
**15.22.** $v = 20{,}4$ m/s
**15.23.** $I = 8{,}49$ N · s
**15.25.** $v_A = 21{,}5$ pés/s ↑, $v_B = 21{,}5$ pés/s
**15.26.** $t = 5{,}47$ s
**15.27.** $(v_A)_2 = 10{,}5$ pés/s →
**15.29.** $v_2 = 21{,}8$ m/s
**15.30.** $v_2 = 3{,}44$ m/s ↓
**15.31.** $v_2 = 7{,}65$ m/s
**15.33.** $v_2 = 0{,}600$ pés/s ←
**15.34.** $v = 3{,}5$ pés/s →
**15.35.** $\theta = \phi\, 9{,}52°$
**15.37.** $v_M = 0{,}178$ m/s, $N = 771$ N
**15.38.** $v_C = 0{,}115$ pés/s, $t = 3{,}06$ s
**15.39.** $s_b = 18{,}2$ pés
**15.41.** $t_{tot} = 0{,}510$ s, $d_{tot} = 0{,}0510$ m
**15.42.** $(v_B)_2 = 3{,}29$ pés/s
**15.43.** $W_B = 75$ lb
**15.45.** $R = 145$ pés
**15.46.** **a)** $v_c = 1{,}17$ pés/s ←, **b)** $v_c = 1{,}17$ pés/s ←
**15.47.** $d = 6{,}87$ mm
**15.49.** $v = 3{,}33$ pés/s, $t = 0{,}518$ s
**15.50.** $t = 0{,}518$ s, $s = 0{,}863$ pés
**15.51.** $v_R = 1{,}10$ m/s, $v_C = 5{,}43$ m/s, 35,8° ⦩
**15.53.** $v_{b/c} = 0{,}632$ m/s →
**15.54.** $v_A = 3{,}29$ m/s, $v_B = 2{,}19$ m/s
**15.55.** $e = 0{,}901$
**15.57.** $(v_A)_2 = 1{,}53$ m/s ←, $(v_B)_2 = 1{,}27$ m/s →
**15.58.** $(v_A)_2 = 1{,}04$ pés/s, $(v_B)_3 = 0{,}964$ pés/s, $(v_C)_3 = 11{,}9$ pés/s
**15.61.** **a)** $v_{p2} = 27{,}0$ pés/s, $v_{h2} = 13{,}4$ pés/s, **b)** $x = 2{,}61$ pés
**15.62.** $h = 4{,}82$ pés
**15.63.** $(v_C)_2 = \dfrac{v(1+e)^2}{4}$
**15.65.** $d = 13{,}8$ pés
**15.66.** $e = 0{,}502$, $d = 7{,}23$ pés
**15.67.** $h = 21{,}8$ mm
**15.69.** $e = \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\operatorname{sen}\theta}\left(\dfrac{\cos\theta - \mu\operatorname{sen}\theta}{\mu\operatorname{sen}\phi + \cos\phi}\right)$
**15.70.** $\mu = 0{,}25$
**15.71.** **a)** $(v_A)_2 = 0{,}600$ m/s ←, $(v_B)_2 = 3{,}40$ m/s ←, **b)** $s = 304$ mm
**15.73.** $v_A = 29{,}3$ pés/s, $v_{B2} = 33{,}1$ pés/s, $\theta = 27{,}7°$
**15.74.** $v_A = 29{,}3$ pés/s, $v_{B2} = 33{,}8$ pés/s, $e = 0{,}770$
**15.75.** $h = 0{,}390$ m
**15.77.** $v_{B3} = 3{,}24$ m/s, $\theta = 43{,}9°$
**15.78.** $s = 0{,}456$ pés
**15.79.** $v_c = \left(\dfrac{1+e}{7}\right)v$
**15.81.** $d = 1{,}15$ pés, $h = 0{,}770$ pés

15.82. $(v_B)_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+e)v,$

$\Delta U_k = \frac{3mv^2}{16}(1-e^2)$

15.83. $(v_B)_2 = 0{,}298$ pés/s, $(v_A)_2 = 0{,}766$ pés/s

15.85. $v_A = 1{,}35$ m/s →, $v_B = 5{,}89$ m/s, 32,9° ⦣

15.86. $e = 0{,}0113$

15.87. $v_B = 3{,}50$ m/s, $v_A = 6{,}47$ m/s

15.89. $\theta = 90°$

15.90. $(\mathbf{H}_A)_0 = \{-1{,}83\mathbf{i} - 0{,}913\mathbf{k}\}$ slug · pés²/s

15.91. $\mathbf{H}_O = \{42\mathbf{i} + 21\mathbf{k}\}$ kg · m²/s

15.93. $(H_A)_P = -57{,}6$ kg · m²/s, $(H_B)_P = 94{,}4$ kg · m²/s, $(H_C)_P = -41{,}2$ kg · m²/s

15.94. $\mathbf{H}_O = \{-16{,}8\mathbf{i} + 14{,}9\mathbf{j} - 23{,}6\mathbf{k}\}$ slug · pés²/s

15.95. $\mathbf{H}_P = \{-14{,}3\mathbf{i} - 9{,}32\mathbf{j} - 34{,}8\mathbf{k}\}$ slug · pés²/s

15.97. $(H_A)_0 = 72.0$ kg · m²/s↻, $(H_B)_0 = 59{,}5$ kg · m²/s↻

15.98. $(H_A)_P = 66{,}0$ kg · m²/s↻, $(H_B)_P = 73{,}9$ kg · m²/s↻

15.99. $v = 3{,}47$ m/s

15.101. $v = 13{,}4$ m/s

15.102. $v_2 = 19{,}3$ pés/s

15.103. $v_B = 10{,}2$ km/s, $r_B = 13{,}8$ Mm

15.105. $v_2 = 9{,}22$ pés/s, $\Sigma U_{1-2} = 3{,}04$ pés · lb

15.106. $r_2 = 1{,}52$ pés, $t = 0{,}739$ s

15.107. $v_2 = 4{,}60$ pés/s

15.109. $v = 20{,}2$ pés/s, $h = 6{,}36$ pés

15.110. $h = 196$ mm, $\theta = 75{,}0°$

15.111. $F = 19{,}6$ lb, $N = 174$ lb

15.113. $A_x = 3{,}98$ kN, $A_y = 3{,}81$ kN, $M = 1{,}99$ kN · m

15.114. $F_x = 9{,}87$ lb, $F_y = 4{,}93$ lb

15.115. $T = 0{,}680$ lb

15.117. $F_x = 19{,}5$ lb ←, $F_y = 1{,}96$ lb ↑

15.118. $a = 0{,}528$ m/s²

15.119. $p = 452$ Pa

15.121. $F = v^2 \rho A$ em cada caso

15.122. $F = 22{,}4$ lb

15.123. 9,72 N

15.125. $v_{máx} = 580$ pés/s

15.126. $F = 3{,}49$ kN

15.127. $a = 0{,}0476$ m/s²

15.129. $\frac{dm}{dt} = m_0\left(\frac{(a_0+g)}{v_{e/r}}\right)e[(a_0+g)/v_{e/r}]t$

15.130. $F_D = 11{,}5$ kN

15.131. $a = 37{,}5$ pés/s²

15.133. $F = m'v^2$

15.134. $F = (7{,}85t + 0{,}320)$ N

## Capítulo 16

16.1. $\theta = 3{,}32$ rev, $t = 1{,}67$ s

16.2. $a_t = 0{,}562$ pés/s², $a_n = 3.600$ pés/s²

16.3. $v_A = 2{,}60$ m/s, $a_A = 9{,}35$ m/s²

16.5. $\omega_B = 22{,}3$ rad/s

16.6. $\alpha = 10{,}0$ rad/s², $\omega = 35{,}4$ rad/s, $\theta = 35{,}3$ rev

16.7. $\theta = 5.443$ rev, $\omega = 740$ rad/s, $\alpha = 8$ rad/s²

16.9. $v_P = 6{,}30$ pol/s, $a_P = 10{,}0$ pol/s², $(v_{Pmáx}) = 16{,}0$ pol/s

16.10. $a_n = 242$ pés/s², $a_t = 12$ pés/s²

16.11. $a_n = 322$ pés/s², $a_t = 9$ pés/s²

16.13. $v_B = 1{,}37$ m/s, $a_B = 0{,}472$ m/s²

16.14. $v = 52{,}0$ pés/s, $a_t = 12{,}0$ pés/s², $a_n = 1{,}35(10^3)$ pés/s²

16.15. $t = 100$ s

16.17. $v_P = 143$ pol/s, $a_P = 9{,}29(10^3)$ pol/s²

16.18. $v_B = 14{,}7$ m/s

16.19. $v_B = 1{,}34$ m/s

16.21. $v_F = 0{,}318$ mm/s

16.22. $\omega_B = 465$ rad/s

16.23. $\omega_B = 12$ rad/s

16.25. $(a_P)_n = 4267$ m/s², $(a_P)_t = 20{,}7$ m/s²

16.26. $v_A = v_B = 2{,}4$ pés/s, $a_A = 0{,}4$ pés/s², $a_B = 17{,}3$ pés/s²

16.27. $\omega_H = 126$ rad/s

16.29. $(\omega_B)_{máx} = 8{,}49$ rad/s, $v_C = 0{,}6$ m/s

16.30. $(\omega_B)_2 = 10{,}6$ rad/s

16.31. $a = \frac{\omega^2}{2\pi}\left(\frac{r_2 - r_1}{L}\right)d$

16.33. $v_{AB} = \omega l\cos\theta,\ a_{AB} = -\omega^2 l\,\mathrm{sen}\,\theta$

16.34. $\dot{y} = 1{,}5\,\mathrm{cotg}\,\theta$

16.35. $v_{CD} = -\omega l\,\mathrm{sen}\,\theta,\ a_{CD} = -\omega^2 l\cos\theta$

16.37. $v = -\left(\frac{r_1^2\,\omega\,\mathrm{sen}\,2\theta}{2\sqrt{r_1^2\cos^2\theta + r_2^2 + 2r_1r_2}} + r_1\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$

16.38. $v_P = 18{,}5$ pés/s ←

16.39. $\omega = 8{,}70$ rad/s, $\alpha = -50{,}5$ rad/s²

16.41. $\omega' = -\frac{(R-r)\omega}{r},\ \alpha' = -\frac{(R-r)\alpha}{r}$

16.42. $\omega = \frac{-v(\mathrm{sen}\,\phi)}{l\cos(\phi-\theta)},$

$\alpha = \frac{-v^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\,\mathrm{sen}(\phi-\theta)}{l^2\cos^3(\phi-\theta)}$

16.43. $\omega = -\left(\frac{r}{x\sqrt{x^2-r^2}}\right)v_A,$

$\alpha = \left[\frac{r(2x^2-r^2)}{x^2(x^2-r^2)^{3/2}}\right]v_A^2$

16.45. $v_C = L\omega\uparrow,\ a_C = 0{,}577\,L\omega^2\uparrow$

16.46. $\omega = 1{,}08$ rad/s, $v_B = 4{,}39$ pés/s

16.47. $v_B = \frac{15\omega\,\mathrm{sen}\,\theta}{(34-30\cos\theta)^{\frac{1}{2}}},$

$a_B = \frac{15(\omega^2\cos\theta + \alpha\,\mathrm{sen}\,\theta)}{(34-30\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} - \frac{225\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{(34-30\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$

16.49. $\omega_A = 2\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta - 1}{3 - 2\sqrt{2}\cos\theta}\right)$

16.50. $v_B = 12{,}6$ pol/s, 65,7° ⦣

16.51. $v_C = 50$ m/s

16.53. $\omega = 20$ rad/s, $v_A = 2$ pés/s →

16.54. $v_C = 1{,}64$ m/s

16.55. $v_C = 1{,}70$ m/s

16.57. $\omega_{AB} = 2{,}00$ rad/s

16.58. $\omega_{CD} = 4{,}03$ rad/s

16.59. $\omega_A = 32{,}0$ rad/s

16.61. $v_G = 9$ m/s ←

16.62. $\omega = 5{,}33$ rad/s

16.63. $\omega_P = 5$ rad/s, $\omega_A = 1{,}67$ rad/s

16.65. $\omega_A = 0$

16.66. $v_A = 2{,}5$ pés/s ←

16.67. $\omega_{CB} = 2{,}45$ rad/s ↺, $v_C = 2{,}20$ pés/s ←

16.69. $v_G = 5t$ m/s →

16.70. $\omega = 6$ rad/s ↺

16.71. $v_A = -0{,}173$ m/s

16.73. $v_D = 7{,}07$ m/s

16.74. $\omega_R = 11{,}4$ rad/s↻

**16.75.** $v_C = 0{,}776$ m/s ↙, $v_D = 1{,}06$ m/s ↖
**16.77.** $v_E = 4{,}42$ pol/s
**16.78.** $v_C = 50$ m/s
**16.79.** $v_C = 1{,}64$ m/s
**16.81.** $v_G = 9$ m/s ←
**16.82.** $\omega = 5{,}33$ rad/s
**16.83.** $\omega_P = 5$ rad/s, $\omega_A = 1{,}67$ rad/s
**16.85.** $v_A = 2{,}5$ pés/s ←
**16.87.** $\omega_{BC} = 6{,}79$ rad/s
**16.89.** $v_B = 7{,}33$ pés/s →, $v_A = 2{,}83$ pés/s, 45° ∡
**16.90.** $\omega_{AB} = 6$ rad/s ↺, $v_E = 4{,}76$ m/s, 40,9° ∡
**16.91.** $\omega_{BC} = 5{,}77$ rad/s, $\omega_{CD} = 2{,}17$ rad/s
**16.93.** $v_A = 60{,}0$ pés/s →, $v_C = 220$ pés/s ←, $v_B = 161$ pés/s, 60,3° ∡
**16.94.** $\omega_{CB} = 7{,}81$ rad/s, $v_C = 2{,}45$ m/s
**16.95.** $\omega_{AB} = 13{,}1$ rad/s
**16.97.** $v_C = 2{,}50$ pés/s, $v_E = 7{,}91$ pés/s
**16.98.** $v_C = 0{,}897$ m/s ↗
**16.99.** $v_D = 0{,}518$ m/s ↘
**16.101.** $v_D = 5{,}72$ m/s, 36,2° ∡
**16.102.** $\omega_C = 26{,}7$ rad/s, $\omega_B = 28{,}75$ rad/s, $\omega_A = 14{,}0$ rad/s
**16.103.** $\omega_{AB} = 7{,}17$ rad/s
**16.105.** $\alpha = 1{,}47$ rad/s$^2$, $a_B = 24{,}9$ pés/s$^2$ ↓
**16.106.** $\alpha = 0{,}0962$ rad/s$^2$, $a_A = 0{,}385$ pés/s$^2$ →
**16.107.** $\alpha = 0{,}332$ rad/s$^2$, $a_B = 7{,}88$ pés/s$^2$ ←
**16.109.** $a_B = 13{,}9$ pés/s$^2$, 8,80° ∡
**16.110.** $a_A = 12{,}5$ m/s$^2$ ←
**16.111.** $\alpha_{AB} = 0{,}75$ rad/s$^2$ ↺, $\alpha_{BC} = 3{,}94$ rad/s$^2$ ↺
**16.113.** $a_B = 2{,}25$ m/s$^2$, 32,6° ∡
**16.114.** $a_D = 10{,}0$ m/s$^2$, 2,02° ∡
**16.115.** $a_A = 5{,}94$ m/s$^2$, 53,9° ∡
**16.117.** $\alpha_{BC} = 5{,}21$ rad/s$^2$ ↺
**16.118.** $\alpha_r = 0{,}231$ rad/s$^2$
**16.119.** $\omega = 2$ rad/s, $\alpha = 7{,}68$ rad/s$^2$ ↻,
**16.121.** $v_C = 9{,}38$ pol/s ↙, $a_C = 54{,}7$ pol/s$^2$ ↙
**16.122.** $\alpha = 10{,}67$ rad/s$^2$ ↺, $a_D = 14{,}1$ pol/s$^2$
**16.123.** $\omega_F = 10{,}7$ rad/s, $\omega_{AC} = 0$, $\alpha_{AC} = 28{,}7$ rad/s$^2$ ↻
**16.125.** $v_B = 1{,}58\,\omega\, a$, $a_B = 1{,}58\alpha\, a - 1{,}77\omega^2\, a$
**16.126.** $a_A = 73{,}0$ pol/s$^2$, 80,5° ∡, $a_B = 113$ pol/s$^2$ →, $\alpha_{AB} = 18$ rad/s$^2$ ↻
**16.127.** $\alpha_{AB} = 36$ rad/s$^2$ ↻
**16.129.** $\omega = 4{,}73$ rad/s ↺, $\alpha = 131$ rad/s$^2$ ↻
**16.130.** $\omega = 0{,}25$ rad/s ↻, $v_B = 5{,}00$ pés/s ↓, $\alpha = 0{,}875$ rad/s$^2$ ↺, $a_B = 1{,}51$ pés/s$^2$, 85,2° ∡
**16.131.** $\mathbf{a}_A = \{-5{,}60\mathbf{i} - 16\mathbf{j}\}$ m/s$^2$
**16.133.** $\mathbf{v}_A = \{-2{,}50\mathbf{i} + 2{,}00\mathbf{j}\}$ pés/s, $\mathbf{a}_A = \{-3{,}00\mathbf{i} + 1{,}75\mathbf{j}\}$ pés/s$^2$
**16.134.** $\mathbf{v}_B = \{-12{,}0\mathbf{i} + 5{,}77\mathbf{j}\}$ pés/s, $\mathbf{a}_B = \{-28{,}9\mathbf{i} - 70{,}0\mathbf{j}\}$ pés/s$^2$
**16.135.** $\mathbf{v}_m = \{7{,}5\mathbf{i} - 5\mathbf{j}\}$ pés/s, $\mathbf{a}_m = \{5\mathbf{i} + 3{,}75\mathbf{j}\}$ pés/s$^2$
**16.137.** **a)** $\mathbf{a}_B = \{-1\mathbf{i}\}$ m/s$^2$, **b)** $\mathbf{a}_B = \{-1{,}69\mathbf{i}\}$ m/s$^2$
**16.138.** **a)** $\mathbf{a}_B = \{-1\mathbf{i} + 0{,}2\mathbf{j}\}$ m/s$^2$, **b)** $\mathbf{a}_B = \{-1{,}69\mathbf{i} + 0{,}6\mathbf{j}\}$ m/s$^2$
**16.139.** $v_C = 2{,}40$ m/s ←, $a_C = \{-14{,}4\mathbf{j}\}$ m/s$^2$
**16.141.** $\omega_{CD} = 0{,}750$ rad/s, $\alpha_{CD} = 1{,}95$ rad/s$^2$
**16.142.** $\mathbf{v}_C = \{-0{,}944\mathbf{i} + 2{,}20\mathbf{j}\}$ m/s, $\mathbf{a}_C = \{-11{,}2\mathbf{i} - 4{,}15\mathbf{j}\}$ m/s$^2$
**16.143.** $\omega_{DC} = 3{,}22$ rad/s ↻, $\alpha_{DC} = 7{,}26$ rad/s$^2$ ↻
**16.145.** $\omega_{BC} = 0{,}720$ rad/s ↺, $\alpha_{BC} = 2{,}02$ rad/s$^2$ ↺,
**16.146.** $\omega_{CD} = 1{,}73$ rad/s, $\alpha_{CD} = 3{,}46$ rad/s$^2$
**16.147.** $\mathbf{v}_C = \{-7{,}00\mathbf{i} + 17{,}3\mathbf{j}\}$ pés/s, $\mathbf{a}_C = \{-34{,}6\mathbf{i} - 15{,}5\mathbf{j}\}$ pés/s$^2$
**16.149.** $\mathbf{v}_C = \{-7{,}5\mathbf{i} - 37{,}0\mathbf{j}\}$ pés/s, $\mathbf{a}_C = \{85{,}0\mathbf{i} - 7{,}5\mathbf{j}\}$ pés/s$^2$
**16.150.** $\mathbf{v}_D = \{-31{,}5\mathbf{i} - 13{,}0\mathbf{j}\}$ pés/s, $\mathbf{a}_D = \{13{,}0\mathbf{i} - 79{,}5\mathbf{j}\}$ pés/s$^2$

## Capítulo 17

**17.1.** $I_y = \frac{1}{3} m\, l^2$
**17.2.** $I_z = m\, R^2$
**17.3.** $I_x = \frac{3}{10} m\, r^2$
**17.5.** $k_y = 1{,}56$ pol
**17.6.** $I_x = \frac{2}{5} m\, r^2$
**17.7.** $I_z = m\left(R^2 + \frac{3}{4}a^2\right)$
**17.9.** $I_y = 2{,}25$ slug · pés$^2$
**17.10.** $I_x = \frac{93}{70} mb^2$
**17.11.** $I_y = \frac{m}{6}(a^2 + h^2)$
**17.13.** $L = 6{,}39$ m, $I_o = 53{,}2$ kg · m$^2$
**17.14.** $I_o = 6{,}99$ kg · m$^2$
**17.15.** $I_A = 7{,}67$ kg · m$^2$
**17.17.** $I_O = \frac{1}{2} ma^2$
**17.18.** $I_A = 2{,}17$ slug · pés$^2$
**17.19.** $k_O = 3{,}15$ pés
**17.21.** $I_O = 13{,}4$ kg · m$^2$
**17.22.** $I_X = 5{,}64$ slug · pés$^2$
**17.23.** $I_O = 6{,}23$ kg · m$^2$
**17.25.** $a_{máx} = 4{,}73$ m/s$^2$
**17.26.** $a_G = 6{,}04$ pés/s$^2$
**17.27.** $F_{CD} = 289$ kN
**17.29.** $N_A = 568$ N, $N_B = 544$ N
**17.30.** $a = 3{,}96$ m/s$^2$
**17.31.** $N_B = 95{,}0$ lb, $N_A = 105$ lb, $s = 9{,}66$ pés
**17.33.** $M_A = 5{,}08(10^3)$ lb · pés
**17.34.** $T = 1{,}52$ kN, $\theta = 18{,}6°$
**17.35.** $T = 2{,}38$ kN, $a = 1{,}33$ m/s$^2$
**17.37.** $T = 15{,}7$ kN, $C_x = 8{,}92$ kN, $C_y = 16{,}3$ kN
**17.38.** Para tração nas rodas traseiras: $t = 17{,}5$ s, para tração nas quatro rodas: $t = 11{,}3$ s
**17.39.** $N_A = 1.393$ lb, $N_B = 857$ lb, $t = 2{,}72$ s
**17.41.** $a_G = 1{,}07$ pés/s$^2$, $N_B = 86{,}7$ lb, $N_A = 213$ lb
**17.43.** $a = 96{,}6$ pés/s$^2$
**17.45.** $s = 82{,}8$ pés estando vazia ou cheia
**17.46.** $a = 2{,}01$ m/s$^2$ O engradado deslizará.
**17.47.** $N_A' = 383$ N, $N_B' = 620$ N
**17.49.** $N_B = 402$ N, $N_A = 391$ N

17.50. $\alpha = 5{,}95\ \text{rad/s}^2$
17.51. $\alpha = 9{,}67\ \text{rad/s}^2$
17.53. $A_x = 0,\ A_y = 262\ \text{N}$
17.54. $\omega = 56{,}2\ \text{rad/s},\ A_x = 0,\ A_y = 98{,}1\ \text{N}$
17.55. $\omega = 20{,}8\ \text{rad/s}$
17.57. $P = 39{,}6\ \text{N},\ N_A = N_B = 325\ \text{N}$
17.58. $\omega = 4{,}78\ \text{rad/s}$
17.59. $\omega = 10{,}9\ \text{rad/s}$
17.61. $\alpha = 7{,}28\ \text{rad/s}^2$
17.62. $t = 6{,}71\ \text{s}$
17.63. $\omega = 2{,}71\ \text{rad/s}$
17.66. $r_P = 2{,}67\ \text{pés},\ A_x = 0$
17.67. $\alpha = 7{,}36\ \text{rad/s}^2,\ a_G = 7{,}36\ \text{m/s}^2$
17.69. $\omega = 96{,}6\ \text{rad/s}$
17.70. $A_x = 11{,}25\ \text{lb},\ A_y = 18{,}75\ \text{lb}$
17.71. $29{,}0\ \text{pés/s}^2$
17.73. $F_{CB} = 193\ \text{N},\ t = 3{,}11\ \text{s}$
17.74. $\alpha = \dfrac{2mg}{R(M + 2m)},\ v = \sqrt{\dfrac{8mgR}{M + 2m}}$
17.75. $a = \dfrac{g(M_B - M_A)}{\frac{1}{2}M + M_B + M_A}$
17.77. $M = 0{,}3gml$
17.78. $v = 0{,}548\ \text{m/s}$
17.79. $A_x = 89{,}2\ \text{N},\ A_y = 66{,}9\ \text{N},\ t = 1{,}26\ \text{s}$
17.81. $\theta = 29{,}8°$
17.82. $t = 1{,}09\ \text{s}$
17.83. $N = \omega x\left[\dfrac{\omega^2}{g}(L - \frac{x}{2}) + \cos\theta\right],$
$V = \omega x \operatorname{sen}\theta,\ M = \frac{1}{2}\omega x^2 \operatorname{sen}\theta$
17.85. $\omega = 800\ \text{rad/s}$
17.86. $\omega = 17{,}6\ \text{rad/s}$
17.89. Não escorrega
17.90. $\alpha = 0{,}274\ \text{rad/s}^2,\ a_B = 49{,}0\ \text{pés/s}^2,\ 80{,}3°$ ↘,
17.91. $a_G = 12{,}9\ \text{pés/s}^2,\ \alpha = 2{,}58\ \text{rad/s}^2$
17.93. $\alpha = 1{,}25\ \text{rad/s},\ T = 2{,}32\ \text{kN}$
17.94. $T = 3{,}13\ \text{kN},\ \alpha = 1{,}684\ \text{rad/s},$
$a_C = 1{,}35\ \text{m/s}^2$
17.95. $\alpha = 1{,}30\ \text{rad/s}^2$
17.97. $\alpha = 15{,}6\ \text{rad/s}^2$
17.98. $\omega = 5{,}21\ \text{rad/s}$
17.99. $T = 5{,}61\ \text{N},\ \alpha = 28{,}0\ \text{rad/s}^2$
17.101. $a_A = 167\ \text{pés/s}^2$
17.102. $\alpha = 5{,}01\ \text{rad/s}^2$
17.103. $B_x = 16{,}7\ \text{lb},\ B_y = 18{,}75\ \text{lb},$
$C_y = 31{,}25\ \text{lb}$
17.105. $\alpha = \dfrac{6P}{mL},\ a_B = \dfrac{2P}{m}\rightarrow$
17.106. $\alpha = \dfrac{3g}{2l}\cos\theta$
17.107. $s = 4{,}06\ \text{pés}$
17.109. $A_y = 15{,}0\ \text{lb},\ A_x = 0{,}466\ \text{lb},$
$a_G = 1{,}00\ \text{pé/s}^2$
17.110. $A_y = 118\ \text{N}$
17.111. $\alpha = 13{,}4\ \text{rad/s}^2$
17.113. $B_y = 9{,}62\ \text{lb},\ \alpha = 23{,}4\ \text{rad/s}^2$

## Capítulo 18

18.2. $\omega = 14{,}1\ \text{rad/s}$
18.3. $T = 210\ \text{pés}\cdot\text{lb}$
18.5. $T = 0{,}0188\ \text{pé}\cdot\text{lb}$
18.6. $\omega = 4{,}78\ \text{rad/s}$
18.7. $\omega = 10{,}9\ \text{rad/s}$
18.9. $\omega = 2{,}02\ \text{rad/s}$
18.10. $\omega = 3{,}89\ \text{rad/s}$
18.11. $s = 0{,}304\ \text{pés}$
18.13. $\omega_2 = 2{,}83\ \text{rad/s}$
18.14. $v_A = 26{,}7\ \text{pés/s}$
18.15. $U = 237\ \text{J}$
18.17. $\omega = 11{,}2\ \text{rad/s}$
18.18. $v = 4{,}97\ \text{m/s}$
18.19. $v = 5{,}34\ \text{m/s}$
18.21. $v = 2{,}10\ \text{m/s}$
18.22. $\omega = 11{,}0\ \text{rad/s}$
18.23. $s = 2{,}00\ \text{m}$
18.25. $\omega_{AB} = 5{,}92\ \text{rad/s}$
18.26. $\omega = 1{,}32\ \text{rad/s}$
18.27. $\theta = 8{,}53°$
18.29. $\theta = 12{,}0$ rev independentemente da orientação
18.30. $\omega_{AB} = 4{,}28\ \text{rad/s}$
18.31. $\theta_0 = 1{,}66\ \text{rad}$
18.33. $v_G = 3\sqrt{\frac{3}{7}gR}$
18.34. $v_A = 14{,}2\ \text{pés/s}$
18.35. $\omega = 2{,}83\ \text{rad/s}$
18.37. $\omega_{AB} = 4{,}28\ \text{rad/s}$
18.38. $s = 0{,}304\ \text{pés}$
18.39. $v_G = v_A = 14{,}2\ \text{pés/s}$
18.41. $s = 0{,}301\ \text{m},\ T = 163\ \text{N}$
18.42. $k = 42{,}8\ \text{N/m}$
18.43. $\omega = 1{,}80\ \text{rad/s}$
18.45. $\omega_{AB} = \omega_{BC} = \sqrt{\dfrac{3g}{L}\operatorname{sen}\theta}$
18.46. $\omega = 19{,}8\ \text{rad/s}$
18.47. $v_A = 1{,}40\ \text{m/s}$
18.49. $\omega = 1{,}74\ \text{rad/s}$
18.50. $v = 1{,}52\ \text{m/s}$
18.51. $\theta = 70{,}5°$
18.53. $\omega = 2{,}82\ \text{rad/s}$
18.54. $\omega = 41{,}8\ \text{rad/s}$
18.55. $\omega = 39{,}3\ \text{rad/s}$
18.57. $\omega = 2{,}30\ \text{rad/s}$
18.58. $\theta = 25{,}4°$
18.59. $k = 100\ \text{lb/pés}$

## Capítulo 19

19.5. $\omega = 20{,}8\ \text{rad/s}$
19.6. $\omega = 56{,}2\ \text{rad/s},\ A_x = 0,\ A_y = 98{,}1\ \text{N}$
19.7. $\omega = 96{,}6\ \text{rad/s}$
19.9. $T_{BC} = 193\ \text{N},\ t = 3{,}11\ \text{s}$
19.10. $\omega = 18{,}7\ \text{rad/s}$
19.11. $\omega = 2{,}25\ \text{rad/s},\ (v_G)_2 = 1{,}25(10^3)\ \text{pés/s}$
19.13. $\omega = 6.04\ \text{rad/s}$
19.14. $\omega_B = 3{,}56\ \text{rad/s},\ t = 5{,}12\ \text{s}$
19.15. $\int M\,dt = 0{,}833\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
19.17. $\omega = 27{,}9\ \text{rad/s}$
19.18. $v_A = 24{,}1\ \text{m/s}$
19.19. $\omega = 12{,}7\ \text{rad/s}$
19.21. $t = 5{,}08\ \text{s}$
19.22. $\omega_2 = 53{,}7\ \text{rad/s}$
19.23. $v_B = 34{,}0\ \text{pés/s}$
19.25. $\omega = 119\ \text{rad/s},\ v_G = 64{,}5\ \text{pés/s},\ 22{,}5$ ∠
19.26. $\theta = \text{tg}^{-1}(3{,}5\mu)$
19.27. $v_B = 4{,}26\ \text{pés/s}$
19.29. $\omega_0 = 2{,}5\left(\dfrac{v_0}{r}\right)$
19.30. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a$

**19.31.** $\int F\,dt = 15{,}2\ \text{kN}\cdot\text{s}$

**19.33.** $v_0 = \sqrt{\frac{2gdm_s}{m}}\,\text{sen}\,\theta$

**19.34.** $\omega = \frac{m_A k_A^2 \omega_A + m_B k_B^2 \omega_B}{m_A k_A^2 + m_B k_B^2}$

**19.35.** $\omega = 0{,}175$ rad/s

**19.37.** $\omega' = \frac{11}{3}\omega_1$

**19.38.** $(\omega_z)_2 = 6{,}75$ rad/s

**19.39.** **a)** $\omega_M = 0$, **b)** $\omega_M = \frac{I}{I_z}\omega$, **c)** $\omega_M = \frac{2I}{I_z}\omega$

**19.41.** $\omega = 0{,}0708$ rad/s

**19.42.** $\omega = 0{,}0708$ rad/s

**19.43.** $\omega_2 = \frac{1}{3}\omega_1$

**19.45.** $\omega_1 = 7{,}37$ rad/s

**19.46.** $h = \frac{7}{5}r$

**19.47.** $\theta = 17{,}9°$

**19.49.** $\omega = 3{,}23$ rad/s, $\theta = 32{,}8°$

**19.50.** $\theta = 22{,}4°$

**19.51.** $(v_b)_2 = 3{,}36$ pés/s $\rightarrow$,

**19.53.** $\omega_2 = 7{,}73$ rad/s

**19.54.** $\omega_1 = 1{,}02\sqrt{\frac{g}{r}}$

**19.55.** $\theta = \text{tg}^{-1}\left(\sqrt{\frac{7}{5}}e\right)$

## Capítulo 20

**20.1.** $\mathbf{v}_A = \{-5{,}20\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 20{,}8\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_A = \{-24{,}1\mathbf{i} - 13{,}3\mathbf{j} - 7{,}20\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.2.** $\mathbf{v}_A = \{-5{,}20\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 20{,}8\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_A = \{-3{,}33\mathbf{i} - 21{,}3\mathbf{j} + 6{,}66\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.3.** $\boldsymbol{\omega} = \{5{,}66\mathbf{j} + 6{,}26\mathbf{k}\}$ rad/s,
$\boldsymbol{\alpha} = \{-3{,}39\mathbf{i}\}$ rad/s$^2$

**20.5.** $\mathbf{v}_C = \{-0{,}800\mathbf{i} + 0{,}400\mathbf{j} + 0{,}800\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_C = \{-10{,}3\mathbf{i} - 3{,}84\mathbf{j} + 0{,}320\mathbf{k}\}$ m/s$^2$

**20.6.** $\omega = 41{,}2$ rad/s, $v_P = 4{,}00$ m/s,
$\alpha = 400$ rad/s$^2$, $a_P = 100$ m/s$^2$

**20.7.** $\mathbf{v}_A = \{-7{,}79\mathbf{i} - 2{,}25\mathbf{j} + 3{,}90\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_A = \{8{,}30\mathbf{i} - 35{,}2\mathbf{j} + 7{,}02\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.9.** $\mathbf{v}_B = \{-7{,}06\mathbf{i} - 7{,}52\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_B = \{77{,}3\mathbf{i} - 28{,}3\mathbf{j} - 0{,}657\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.10.** $\boldsymbol{\omega}_A = \left(\frac{r_C}{h_1}\right)\left(\frac{r_B h_1 \omega}{r_C h_2 + r_B h_1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{r_B h_1 \omega}{r_C h_2 + r_B h_1}\right)\mathbf{k}$

**20.11.** $\boldsymbol{\omega}_P = \{-40\mathbf{j}\}$ rad/s,
$\boldsymbol{\alpha} = \{-6400\mathbf{i}\}$ rad/s$^2$

**20.13.** $\boldsymbol{\omega} = \{4{,}35\mathbf{i} + 12{,}7\mathbf{j}\}$ rad/s,
$\boldsymbol{\alpha} = \{-26{,}1\mathbf{k}\}$ rad/s$^2$

**20.14.** $\mathbf{v}_A = \{-1{,}80\mathbf{i}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_A = \{-0{,}720\mathbf{j} - 0{,}831\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.15.** $\mathbf{v}_A = \{-8{,}66\mathbf{i} + 8.00\mathbf{j} - 13{,}9\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_A = \{-24{,}8\mathbf{i} + 8{,}29\mathbf{j} - 30{,}9\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.17.** $\omega_A = 47{,}8$ rad/s, $\omega_B = 7{,}78$ rad/s

**20.18.** $\boldsymbol{\omega}_{BD} = \{-2{,}00\mathbf{i}\}$ rad/s

**20.19.** $\boldsymbol{\omega}_{BD} = \{-2{,}00\mathbf{i}\}$ rad/s,
$\boldsymbol{\alpha}_{BD} = \{34{,}5\mathbf{i}\}$ rad/s$^2$

**20.21.** $\mathbf{a}_B = \{-96{,}5\mathbf{i}\}$ pés/s$^2$

**20.22.** $v_B = 1{,}875$ m/s

**20.23.** $a_B = -6{,}57$ m/s$^2$

**20.25.** $\boldsymbol{\omega}_{BC} = \{0{,}769\mathbf{i} - 2{,}31\mathbf{j} + 0{,}513\mathbf{k}\}$ rad/s,
$\mathbf{v}_B = \{-0{,}333\mathbf{j}\}$ m/s

**20.26.** $\mathbf{v}_A = \{-2{,}50\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{v}_C = \{4{,}33\mathbf{i} + 2{,}17\mathbf{j} - 2{,}50\mathbf{k}\}$ pés/s

**20.27.** $\mathbf{v}_B = 4{,}71$pés/s,
$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \{1{,}17\mathbf{i} + 1{,}27\mathbf{j} - 0{,}779\mathbf{k}\}$ rad/s

**20.29.** $\boldsymbol{\omega} = \{1{,}50\mathbf{i} + 2{,}60\mathbf{j} + 2{,}00\mathbf{k}\}$ rad/s,
$\mathbf{v}_C = \{10{,}4\mathbf{i} - 7{,}79\mathbf{k}\}$ pés/s

**20.30.** $\mathbf{a}_C = \{99{,}6\mathbf{i} - 117\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$,
$\boldsymbol{\alpha} = \{10{,}4\mathbf{i} + 30{,}0\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s$^2$

**20.31.** $\mathbf{v}_C = \{-1{,}00\mathbf{i} + 5{,}00\mathbf{j} + 0{,}800\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_C = \{-28{,}8\mathbf{i} - 5{,}45\mathbf{j} + 32{,}3\mathbf{k}\}$ m/s$^2$

**20.33.** $\mathbf{v}_A = \{5{,}20\mathbf{i} - 5{,}20\mathbf{j} - 3{,}00\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_A = \{25\mathbf{i} - 26{,}8\mathbf{j} + 8{,}78\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.34.** $\mathbf{v}_C = \{-6{,}75\mathbf{i} - 6{,}25\mathbf{j}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_A = \{28{,}75\mathbf{i} - 26{,}25\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\}$ m/s$^2$

**20.35.** $\mathbf{v}_B = \{-17{,}3\mathbf{i} + 18{,}8\mathbf{j} + 10{,}0\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_B = \{-19{,}1\mathbf{i} + 24{,}0\mathbf{j} - 8{,}66\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.37.** $\mathbf{v}_P = \{2\mathbf{i} + 20\mathbf{j}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_P = \{-101\mathbf{i} - 14{,}8\mathbf{j}\}$ m/s$^2$

**20.38.** $\mathbf{v}_B = \{-10{,}2\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 52{,}0\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_B = \{-31{,}0\mathbf{i} - 161\mathbf{j} - 90\mathbf{k}\}$ m/s$^2$

**20.39.** $\mathbf{v}_B = \{-10{,}2\mathbf{i} - 28\mathbf{j} + 52{,}0\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_B = \{-33{,}0\mathbf{i} - 159\mathbf{j} - 90\mathbf{k}\}$ m/s$^2$

**20.41.** $\mathbf{v}_P = \{-25{,}5\mathbf{i} - 13{,}4\mathbf{j} + 20{,}5\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_P = \{161\mathbf{i} - 249\mathbf{j} - 39{,}6\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.42.** $\mathbf{v}_P = \{-25{,}5\mathbf{i} - 13{,}4\mathbf{j} + 20{,}5\mathbf{k}\}$ pés/s,
$\mathbf{a}_P = \{161\mathbf{i} - 243\mathbf{j} - 33{,}9\mathbf{k}\}$ pés/s$^2$

**20.43.** $\mathbf{v}_P = \{-0{,}849\mathbf{i} + 0{,}849\mathbf{j} + 0{,}566\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_P = \{-5{,}09\mathbf{i} - 7{,}35\mathbf{j} + 6{,}79\mathbf{k}\}$ m/s$^2$

**20.45.** $\mathbf{v}_C = \{2{,}80\mathbf{j} - 5{,}60\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_C = \{-56\mathbf{i} + 2{,}1\mathbf{j}\}$ m/s$^2$

**20.46.** $\mathbf{v}_C = \{2{,}80\mathbf{j} - 5{,}60\mathbf{k}\}$ m/s
$\mathbf{a}_C = \{-56\mathbf{i} + 2{,}1\mathbf{j} - 1{,}40\mathbf{k}\}$ m/s$^2$

**20.47.** $\mathbf{v}_A = \{-8{,}66\mathbf{i} + 2{,}26\mathbf{j} + 2{,}26\mathbf{k}\}$ m/s,
$\mathbf{a}_A = \{-22{,}6\mathbf{i} - 47{,}8\mathbf{j} + 4{,}53\mathbf{k}\}$ m/s$^2$

## Capítulo 21

**21.2.** $I_{zz} = \frac{m}{12}(3a^2 + 4h^2)$

**21.3.** $I_y = 2.614$ slug·pés$^2$

**21.5.** $I_y = 4{,}48(10^3)\rho$

**21.6.** $I_{yz} = \frac{m}{6}ah$

**21.7.** $I_{xy} = \frac{m}{12}a^2$

**21.9.** $I_{x'} = \frac{m}{12}(a^2 + h^2)$

**21.10.** $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}ma^2 & \frac{1}{4}ma^2 & \frac{1}{4}ma^2 \\ \frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 \\ \frac{1}{4}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{2}{3}ma^2 \end{pmatrix}$

**21.11.** $I_x = 4{,}50$ kg·m$^2$, $I_y = 4{,}38$ kg·m$^2$,
$I_z = 0{,}125$ kg·m$^2$

**21.13.** $\bar{y} = 0{,}5$ pés, $\bar{x} = -0{,}667$ pés,
$I_{x'} = 0{,}0272$ slug·pé$^2$,
$I_{y'} = 0{,}0155$ slug·pé$^2$,
$I_{z'} = 0{,}0427$ slug·pé$^2$

**21.14.** $I_{z'} = 0{,}0595$ kg·m$^2$

**21.15.** $I_x = 0{,}0292$ slug·pé$^2$

**21.17.** $I_{aa} = 1{,}13$ slug·pé$^2$

**21.18.** $I_z = 0{,}429$ kg·m$^2$

**21.19.** $I_z = 16{,}3$ slug·pés$^2$,
$I_x = I_y = 20{,}2$ slug·pés$^2$

**21.23.** $\omega_{OB} = 15{,}1$ rad/s

**21.25.** $T_2 = 15{,}5$ pés·lb

**21.26.** $T = \frac{9mh^2}{20}\left[1 + \frac{r^2}{6h^2}\right]\omega^2$

**21.27.** $h = 2{,}24$ pol

**21.29.** $H_A = 26{,}9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

**21.30.** $v_G = \{-10{,}2\mathbf{k}\}$ pés/s

**21.31.** $\omega_y = 26{,}2$ rad/s

**21.33.** $\omega_2 = 61{,}7$ rad/s

**21.34.** $\omega_2 = 87{,}2$ rad/s

**21.35.** $\omega_{AB} = 21{,}4$ rad/s; a mesma

**21.37.** $\omega = 58{,}4$ rad/s

**21.38.** $\omega = \{0{,}0536\mathbf{i} + 0{,}0536\mathbf{k}\}$ rad/s

**21.39.** Para o componente **i**:
$$\Sigma M_x = \frac{d}{dt}(I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z) - \Omega_z(I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z - I_{yx}\omega_x) + \Omega_y(I_z\omega_z - I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y)$$

**21.42.** $F_A = 277$ N, $F_B = 166$ N

**21.43.** $F_A = 213$ N, $F_B = 128$ N

**21.45.** $A_x = -2{,}00$ lb, $A_y = 0{,}627$ lb, $B_x = 2{,}00$ lb, $B_y = -0{,}814$ lb

**21.46.** $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{3g}{2L\omega^2}\right)$

**21.47.** $F_A = 8{,}83$ lb, $F_B = 11{,}2$ lb

**21.49.** $D_y = -12{,}9$ N, $\dot{\omega}_z = 200\ \text{rad/s}^2$, $D_x = -37{,}5$ N, $C_x = -37{,}5$ N, $C_y = -11{,}1$ N, $C_z = 36{,}8$ N

**21.50.** $\dot{\omega}_y = 25{,}9\ \text{rad/s}^2$, $B_x = -0{,}0791$ N, $B_z = 12{,}3$ N, $A_x = -1{,}17$ N, $A_z = 12{,}3$ N

**21.51.** $B_y = -41{,}4$ lb, $B_x = -12{,}5$ lb, $A_x = -15{,}6$ lb, $A_y = -51{,}8$ lb, $A_z = 50$ lb

**21.53.** $T = 23{,}4$ lb·pés

**21.54.** $\Sigma M_x = 0$, $\Sigma M_y = (-0{,}036\ \text{sen}\ \theta)$ N·m, $\Sigma M_z = (0{,}003\ \text{sen}\ 2\theta)$ N·m

**21.55.** $M_z = -0{,}9\omega^2$ mN·m

**21.57.** $\dot{\omega}_y = -102\ \text{rad/s}^2$, $A_x = B_x = 0$, $A_y = 0$, $A_z = 297$ N, $B_z = -143$ N

**21.58.** $A_x = 0$, $A_y = 4{,}89$ lb, $A_z = 5{,}47$ lb, $M_x = -8{,}43$ lb·pés, $M_y = 0$, $M_z = 0$

**21.59.** $\theta_D = 139°$, $m_D = 0{,}661$ kg, $\theta_F = 40{,}9°$, $m_F = 1{,}32$ kg

**21.62.** $\alpha = 90°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 45°$; não

**21.63.** **a)** $A_y = 1{,}49$ kN, $B_y = 2{,}43$ kN, **b)** $A_y = -1{,}24$ kN, $B_y = 5{,}17$ kN, **c)** $A_y = 1{,}49$ kN, $B_y = 2{,}43$ kN

**21.65.** $\omega = 6{,}34$ rad/s

**21.66.** $M_x = 27{,}0$ N·m

**21.67.** $M_x = 12{,}4$ lb·pés, $M_y = 0$, $M_z = 0$

**21.69.** $\dot{\phi} = \left(\dfrac{2g\ \text{ctn}\ \theta}{a + r\cos\theta}\right)^{1/2}$

**21.70.** $\omega_p = 1{,}21$ rad/s (baixa precessão), $\omega_p = 76{,}3$ rad/s (alta precessão)

**21.71.** $\omega_p = 1{,}19$ rad/s

**21.73.** $\omega_R = 368$ rad/s

**21.74.** $\Delta F = 53{,}4$ N

**21.77.** $\dot{\phi} = 23{,}3$ rad/s

**21.78.** $H_G = 17{,}2\ \text{Mg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$

**21.79.** $\dot{\phi} = 12{,}8$ rad/s

## Capítulo 22

**22.1.** $\tau = 0{,}452$ s, $f = 2{,}21$ Hz

**22.2.** $x = -0{,}05\cos(12{,}2t)$ m

**22.3.** $f = 7{,}88$ Hz, $\tau = 0{,}127$ s

**22.5.** $f = 3{,}13$ Hz, $C = 1$ pol, $y = (0{,}0833\cos 19{,}7t)$ pés

**22.6.** $y = (-1{,}44\ \text{sen}(13{,}9t) - 0{,}167\cos(13{,}9t))$ pés, $C = 1{,}45$ pés

**22.7.** $x = -0{,}0693\ \text{sen}(5{,}77t) - 0{,}075\cos(5{,}77t)$, $C = 0{,}102$ m

**22.9.** $f = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

**22.10.** $\theta = -0{,}101\ \text{sen}(4{,}95t) + 0{,}3\cos(4{,}95t)$

**22.11.** $f = 2{,}52$ Hz, $T_{máx} = 83{,}7$ kN

**22.13.** $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_G^2 + d^2}{gd}}$

**22.14.** $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{2r}{g}}$

**22.15.** $\tau = 1{,}18$ s

**22.17.** $\theta = 0{,}4\cos(20{,}7t)$

**22.18.** $\tau = 0{,}167$ s

**22.19.** $k_G = 0{,}627$ m, $d = 146$ mm,

**22.21.** $\tau = 1{,}28$ s

**22.22.** $\tau = 2{,}67$ s

**22.23.** $(I_{G_z})_C = 2{,}50(10^3)\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

**22.25.** $f = 0{,}624$ Hz

**22.26.** $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{k_G^2 + d^2}{gd}}$

**22.27.** $\tau = 1{,}18$ s

**22.29.** $\tau = 0{,}401$ s

**22.30.** $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$

**22.31.** $\ddot{x} + 333x = 0$

**22.33.** $\tau = 0{,}339$ s

**22.34.** $\tau = 1{,}52$ s

**22.35.** $\tau = 3{,}85\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

**22.37.** $\tau = \dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{ma}{5ka + mg}\right)^{\frac{1}{2}}$

**22.38.** $f = 1{,}81$ Hz

**22.39.** $f = 2{,}25$ Hz

**22.41.** $c = 18{,}9$ N·s/m

**22.42.** $v_{máx} = 0{,}685$ pés/s

**22.43.** $y = (-3{,}66\ \text{sen}\ 12{,}25t + 50\cos 12{,}25t + 11{,}2\ \text{sen}\ 4t)$ mm

**22.45.** $(x_P)_{máx} = 29{,}5$ mm

**22.46.** $\tau_d = 0{,}666$ s

**22.47.** $y = (361\ \text{sen}\ 7{,}75t + 100\cos 7{,}75t - 350\ \text{sen}\ 8t)$ mm

**22.49.** $(x_p)_{máx} = 1{,}89$ in.

**22.50.** $(x_p)_{máx} = 14{,}6$ mm

**22.51.** $(x_p)_{máx} = 35{,}5$ mm

**22.53.** $C = 0{,}490$ pol

**22.54.** $\omega = 19{,}0$ rad/s

**22.55.** $x_p = (0{,}0276\ \text{sen}\ 2t)$ pés

**22.57.** $y = (361\ \text{sen}\ 7{,}75t + 100\cos 7{,}75t - 350\ \text{sen}\ 8t)$ mm

**22.58.** $\phi' = 9{,}89°$

**22.59.** MF = 0,997

**22.61.** $y = (-0{,}0702e^{-3{,}57t}\ \text{sen}\,8{,}54t)$ m
portanto $y = (-0{,}0702e^{-3{,}57t}\ \text{sen}\ 8{,}54t)$ m

**22.63.** $L\ddot{q} + R\dot{q} + \dfrac{1}{C}q = 0$

**22.65.** $\ddot{y} + 16\dot{y} + 12y = 0$ superamortecido.

**22.66.** $t = 3{,}99$ s

## Problemas de Revisão 1

**R1.1.** $t_{mín} = 23{,}8$ s

**R1.2.** $y = 0{,}0208x^2 + 0{,}333x$

**R1.3.** $v_B = 55{,}2$ pés/s, $v_A = 27{,}6$ pés/s

**R1.5.** $v = 38{,}5$ pés/s

**R1.6.** **a)** $t = 1{,}07$ s, **b)** $v_{A/B} = 5{,}93$ m/s →

**R1.7.** $t = 5$ s

**R1.9.** $a = 0{,}343$ m/s², $a = 0{,}436$ m/s²

**R1.10.** $y = 3\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right)$

**R1.11.** $v_B = 3{,}33$ pés/s↑, $v_{B/C} = 13{,}3$ pés/s↑

**R1.13.** $s = 1{,}84$ m

**R1.14.** $s = 980$ m

**R1.15.** $P = 946$ kW

**R1.17.** $v = 4{,}38$ m/s

**R1.18.** $x = 7{,}85$ pol

**R1.19.** $v_B = 10{,}4$ m/s

**R1.21.** $(v_B)_2 = 0{,}575$ pés/s, 71,5° ∠,
$\Delta T = -0{,}192$ pés · lb

**R1.22.** $a = 29{,}0$ m/s²

**R1.23.** $v_B = 0{,}5$ m/s ↑

**R1.25.** $(v_A)_{mín} = 0{,}838$ m/s,
$(v_A)_{máx} = 1{,}76$ m/s

**R1.26.** $v = 2{,}68$ pés/s

**R1.27.** $v = 25{,}4$ pés/s

**R1.29.** $a = 322$ m/s², 26,6° ∠

**R1.30.** $F = 38{,}5$ N

**R1.31.** $s = 20{,}2$ m

**R1.33.** $N_e = 240$ lb

**R1.34.** $v_B = 47{,}8$ pés/s

**R1.35.** $e = 0{,}901$

**R1.37.** $v_2 = 13{,}8$ pés/s

**R1.38.** $T = 158$ N

**R1.39.** $s = 20{,}0$ pés

**R1.41.** $v_A = 26{,}8$ pés/s ↓

**R1.42.** $t' = 27{,}3$ s

**R1.43.** $P_i = 1{,}80$ hp

**R1.45.** **a)** $a_B = a_A = 2{,}76$ pés/s²,
**b)** $a_A = 70{,}8$ pés/s², $a_B = 3{,}86$ pés/s²

**R1.46.** $s = 0{,}933$ m

**R1.47.** $v_2 = 31{,}7$ m/s

**R1.49.** $v_2 = 21{,}5$ pés/s

**R1.50.** $a_A = 0{,}755$ m/s², $a_B = 1{,}51$ m/s²,
$T_A = 90{,}6$ N,
$T_B = 45{,}3$ N

**R1.51.** $v = 5{,}38$ pés/s

## Problemas de Revisão 2

**R2.1.** $\alpha_A = 12{,}5$ m/s ←

**R2.2.** $v_W = 14{,}2$ pés/s, $a_W = 0{,}25$ pés/s²

**R2.3.** $\omega = 28{,}6$ rad/s, $\theta = 24{,}1$ rad,
$v_P = 7{,}16$ m/s,
$a_P = 205$ m/s²

**R2.5.** $h = 1{,}80$ m

**R2.6.** $\omega = 0{,}275$ rad/s, $\alpha = 0{,}0922$ rad/s²

**R2.7.** **a)** $C_y = 7{,}22$ N, $B_y = 7{,}22$ N,
**b)** $C_y = 14{,}7$ N, $B_y = 14{,}7$ N

**R2.9.** $v_C = 25{,}3$ pol/s, 63,4° ∠;
$a_C = 73{,}8$ pol/s², 32,5° ∠

**R2.10.** $\alpha = 8{,}89$ rad/s²

**R2.11.** $\omega = 25{,}0$ rad/s

**R2.13.** $v = -r\omega \operatorname{sen}\theta$, $a = -r\omega^2\cos\theta$

**R2.14.** $a_A = 282$ pés/s²

**R2.15.** $a = \frac{s}{2\pi}\omega^2$

**R2.17.** $v = 4{,}78$ m/s

**R2.18.** $\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left[\frac{\mu(k_O^2 + r^2)}{k_O^2}\right]$

**R2.19.** $d = 5{,}75$ pés

**R2.21.** $T = 218$ N, $\alpha = 21{,}0$ rad/s²

**R2.22.** $v = -r_1\omega \operatorname{sen}\theta - \frac{r_1^2\omega \operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 \operatorname{sen}\theta)^2}}$

**R2.23.** $L = 3{,}92$ slug · pés/s

**R2.25.** $v_B = 0{,}860$ m/s

**R2.26.** $a_B = 8{,}00$ m/s² ↑

**R2.27.** $\alpha = 12{,}1$ rad/s², $F = 30{,}0$ lb

**R2.29.** $\omega = 215$ rad/s

**R2.30.** $\omega = 39{,}5$ rad/s

**R2.31.** $P = 24$ lb, $a_G = 3{,}22$ pés/s²,
$N_B = 14{,}8$ lb,
$N_A = 65{,}3$ lb

**R2.33.** $B_y = 180$ N, $A_y = 252$ N, $A_x = 139$ N

**R2.34.** $B_y = 143$ N, $A_y = 200$ N, $A_x = 34{,}3$ N

**R2.35.** 14,2 rad/s²

**R2.37.** $F_C = 12{,}4$ lb, $N'_B = 3{,}09$ kip,
$N'_A = 1{,}31$ kip, $F'_A = 68{,}3$ lb

**R2.38.** $\omega_A = 1{,}70$ rad/s, $\omega_B = 5{,}10$ rad/s

**R2.39.** $E_x = 9{,}87$ lb, $E_y = 4{,}86$ lb,
$M_E = 7{,}29$ lb · pés

**R2.41.** $F'_B = 4{,}50$ kN, $N'_A = 1{,}78$ kN,
$N'_B = 5{,}58$ kN

**R2.42.** 1,41 m/s², 1,38 m/s²

**R2.43.** $N'_A = 383$ N, $N'_B = 620$ N
$N'_B = 5{,}58$ kN

**R2.45.** $\alpha_A = 56{,}2$ pés/s² ↓, $\alpha_B = 40{,}2$ pés/s²,
53,3° ∠

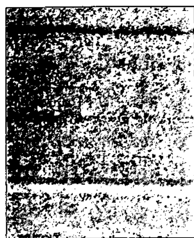
**R2.46.** 39,3°

**R2.47.** 2,26 m/s², $N_B = 226$ N, $N_A = 559$ N,
$N_B = 454$ N

**R2.49.** 0,661 m

**R2.50.** 0,859 m

**R2.51.** 3,46 m/s



# ÍNDICE

## A

### F



### G



### H



### I

## N



## O



## P

## Q



## R



## S



## T



## V

## W

# Equações Fundamentais da Dinâmica

## *CINEMÁTICA*

### *Movimento Retilíneo de um Ponto Material*

| *Aceleração Variável a* | *Aceleração Constante* $a = a_c$ |
|---|---|
| $a = \dfrac{dv}{dt}$ | $v = v_0 + a_c t$ |
| $v = \dfrac{ds}{dt}$ | $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_c t^2$ |
| $a\,ds = v\,dv$ | $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$ |

### *Movimento Curvilíneo de um Ponto Material*

| *Coordenadas x, y, z* | | *Coordenadas r, θ, z* | |
|---|---|---|---|
| $v_x = \dot{x}$ | $a_x = \ddot{x}$ | $v_r = \dot{r}$ | $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ |
| $v_y = \dot{y}$ | $a_y = \ddot{y}$ | $v_\theta = r\dot{\theta}$ | $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ |
| $v_z = \dot{z}$ | $a_z = \ddot{z}$ | $v_z = \dot{z}$ | $a_z = \ddot{z}$ |

*Coordenadas n, t, b*

$v = \dot{s}$

$a_t = \dot{v} = v\dfrac{dv}{ds}$

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \qquad \rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$

*Movimento Relativo*

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$

### *Movimento de um Corpo Rígido em Torno de um Eixo Fixo*

| *Aceleração Angular Variável α* | *Aceleração Angular Constante* $\alpha = \alpha_c$ |
|---|---|
| $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ | $\omega = \omega_0 + \alpha_c t$ |
| $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ | $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha_c t^2$ |
| $\omega\,d\omega = \alpha\,d\theta$ | $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$ |

*Para um ponto P*

$s = \theta r \qquad v = \omega r \qquad a_t = \alpha r \qquad a_n = \omega^2 r$

### *Movimento Relativo Plano Geral — Eixos em Translação*

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pin})} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A(\text{pin})}$

### *Movimento Relativo Plano Geral — Eixos em Translação e Rotação*

$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$

$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \Omega \times \mathbf{r}_{B/A} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\Omega \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \times (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$

## *DINÂMICA*

**Momento de Inércia** $\qquad I = \int r^2\,dm$

*Teorema dos Eixos Paralelos* $\qquad I = I_G + md^2$

*Raio de Giração* $\qquad k = \sqrt{\dfrac{I}{m}}$

### *Equações de Movimento*

| *Ponto Material* | $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ |
|---|---|
| *Corpo Rígido (Movimento Plano)* | $\Sigma F_x = m(a_G)_x$<br>$\Sigma F_y = m(a_G)_y$<br>$\Sigma M_G = I_G\alpha$ ou $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ |

### *Princípio do Trabalho e Energia*

$T_1 + U_{1-2} = T_2$

*Energia Cinética*

| *Ponto Material* | $T = \frac{1}{2}mv^2$ |
|---|---|
| *Corpo Rígido (Movimento Plano)* | $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$ |

*Trabalho*

| | |
|---|---|
| *Força Variável* | $U_F = \int F\cos\theta\,ds$ |
| *Força Constante* | $U_F = (F_c\cos\theta)\,\Delta s$ |
| *Peso* | $U_W = -W\,\Delta y$ |
| *Mola* | $U_s = -(\frac{1}{2}ks_2^2 - \frac{1}{2}ks_1^2)$ |
| *Momento de Binário* | $U_M = M\,\Delta\theta$ |

### *Potência e Rendimento*

$P = \dfrac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \epsilon = \dfrac{P_{\text{saída}}}{P_{\text{entr}}} = \dfrac{U_{\text{saída}}}{U_{\text{entr}}}$

### *Teorema da Conservação da Energia*

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

*Energia Potencial*

$V = V_g + V_e$, onde $V_g = \pm Wy$, $V_e = +\frac{1}{2}ks^2$

### *Princípio do Impulso e Quantidade de Movimento*

| *Ponto Material* | $m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$ |
|---|---|
| *Corpo Rígido* | $m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$ |

### *Conservação da Quantidade de Movimento*

$\Sigma(\text{sist. } m\mathbf{v})_1 = \Sigma(\text{sist. } m\mathbf{v})_2$

***Coeficiente de Restituição*** $\qquad e = \dfrac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$

### *Princípio do Impulso e Momento Angulares*

| *Ponto Material* | $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$<br>onde $H_O = (d)(mv)$ |
|---|---|
| *Corpo Rígido (Movimento Plano)* | $(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$<br>onde $H_G = I_G\omega$<br>$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$<br>onde $H_O = I_O\omega$ |

### *Conservação do Momento Angular*

$\Sigma(\text{sist. } \mathbf{H})_1 = \Sigma(\text{sist. } \mathbf{H})_2$

## Prefixos do SI

| *Múltiplo* | *Forma Exponencial* | *Prefixo* | *Símbolo SI* |
|---|---|---|---|
| 1 000 000 000 | $10^9$ | giga | G |
| 1 000 000 | $10^6$ | mega | M |
| 1 000 | $10^3$ | quilo | k |
| *Submúltiplo* | | | |
| 0,001 | $10^{-3}$ | mili | m |
| 0,000 001 | $10^{-6}$ | micro | $\mu$ |
| 0,000 000 001 | $10^{-9}$ | nano | n |

## Fatores de Conversão (FPS para SI)

| *Grandeza* | *Unidade de Medida (FPS)* | *igual a* | *Unidade de Medida (SI)* |
|---|---|---|---|
| Força | lb | | 4,4482 N |
| Massa | slug | | 14,5938 kg |
| Comprimento | pé | | 0,3048 m |

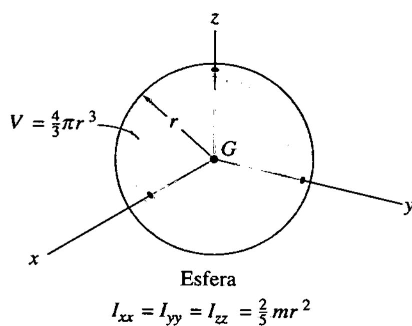
## Fatores de Conversão

1 pé = 12 pol (polegadas)
1 mi (milha) = 5.280 pés
1 kip (quilolibra) = 1.000 lb (libras)
1 t (tonelada) = 2.000 lb = 1.000 kg

# Propriedades Geométricas de Elementos de Curva e Área

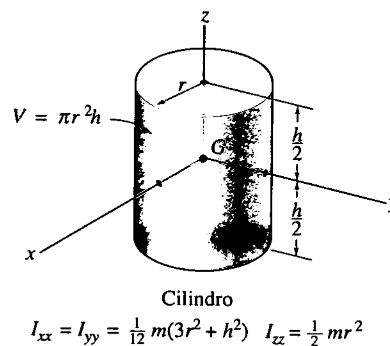
| Posição do Centróide | Posição do Centróide | Momento de Inércia (área) |
|---|---|---|
| $L = 2\theta r$; $\frac{r \operatorname{sen} \theta}{\theta}$<br>Segmento de arco de circunferência | $A = \theta r^2$; $\frac{2}{3}\frac{r \operatorname{sen} \theta}{\theta}$<br>Área de setor circular | $I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta)$<br>$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta)$ |
| $L = \frac{\pi}{2} r$; $L = \pi r$; $\frac{2r}{\pi}$<br>Arcos de quarto de circunferência e semicircunferência | $A = \frac{1}{4} \pi r^2$; $\frac{4r}{3\pi}$; $\frac{4r}{3\pi}$<br>Área de quarto de círculo | $I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$<br>$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$ |
| $A = \frac{1}{2} h(a + b)$; $\frac{1}{3}\left(\frac{2a + b}{a + b}\right) h$<br>Área do trapézio | $A = \frac{\pi r^2}{2}$; $\frac{4r}{3\pi}$<br>Área de semicírculo | $I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$<br>$I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$ |
| $A = \frac{2}{3} ab$; $\frac{2}{5} a$; $\frac{3}{8} b$<br>Área semiparabólica | $A = \pi r^2$<br>Área do círculo | $I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$<br>$I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$ |
| $A = \frac{1}{3} ab$; $\frac{3}{4} a$; $\frac{3}{10} b$<br>Área sob curva parabólica | $A = bh$<br>Área do retângulo | $I_x = \frac{1}{12} bh^3$<br>$I_y = \frac{1}{12} hb^3$ |
| $A = \frac{4}{3} ab$; $\frac{2}{5} a$<br>Área parabólica | $A = \frac{1}{2} bh$; $\frac{1}{3} h$<br>Área do triângulo | $I_x = \frac{1}{36} bh^3$ |

# Centro de Massa/Gravidade e Momento de Inércia de Sólidos Homogêneos



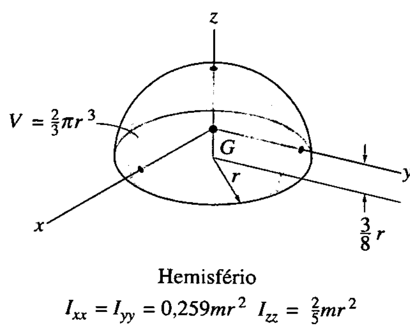

Esfera

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$



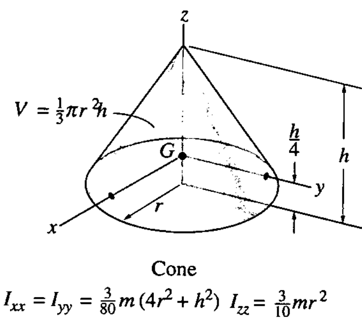

Cilindro

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$



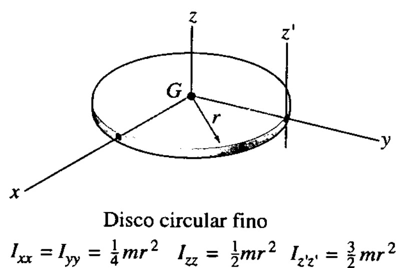

Hemisfério

$I_{xx} = I_{yy} = 0{,}259mr^2 \quad I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$



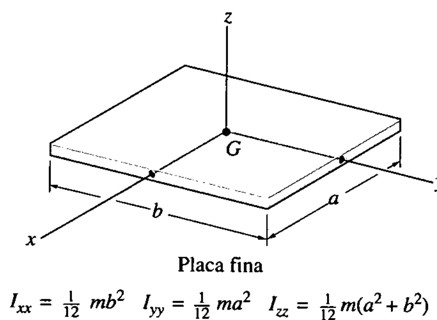

Cone

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{80}m(4r^2 + h^2) \quad I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$



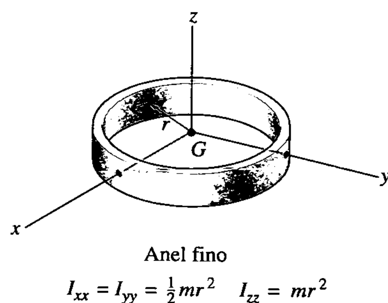

Disco circular fino

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{z'z'} = \frac{3}{2}mr^2$



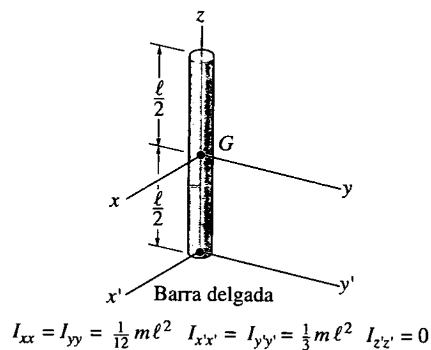

Placa fina

$I_{xx} = \frac{1}{12}mb^2 \quad I_{yy} = \frac{1}{12}ma^2 \quad I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$




Anel fino

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_{zz} = mr^2$




Barra delgada

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}m\ell^2 \quad I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{1}{3}m\ell^2 \quad I_{z'z'} = 0$

DOBRE AQUI E COLE

ISR - 40 - 1248/89
UP - AC - ITAIM BIBI
DR/São Paulo

**CARTA RESPOSTA**

NÃO É NECESSÁRIO SELAR.

O selo será pago por

**Pearson Education do Brasil Ltda.**

**04533-970 - São Paulo - SP**

DOBRE AQUI



# DINÂMICA

## MECÂNICA PARA ENGENHARIA

**10ª EDIÇÃO**

Mecânica para engenharia

Desenvolvida para facilitar o ensino e o aprendizado, esta obra de R. C. Hibbeler apresenta em profundidade toda a teoria da dinâmica em engenharia e suas aplicações.

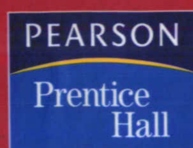
Entre os temas abordados estão: cinemática e dinâmica de um ponto material — com foco em equação de movimento, trabalho, energia, impulso e quantidade de movimento/momento angular —, movimentos plano e tridimensional de um corpo rígido e vibrações.

Buscando-se vincular a teoria à experiência real, fotografias são utilizadas para a construção de exemplos, e os exercícios são elaborados com diversos graus de dificuldade.

Juntamente com o livro *Estática*, que a complementa, esta obra é uma referência na área de mecânica para engenharia.

**www.prenhall.com/hibbeler_br**
**Site de apoio com manual de soluções (em inglês) e transparências em PowerPoint para os professores e atividades extras em inglês para os estudantes**




www.pearson.com.br


ISBN 85-87918-96-6
9 788587 918963

